П. С. АЛЕКСАНДРОВ

ЛЕКЦИИ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ,

ПОПОЛНЕННЫЕ НЕОБХОДИМЫМИ СВЕДЕНИЯМИ ИЗ АЛГЕБРЫ

с приложением
собрания задач, снабженных решениями,
составленного А. С. Пархоменко

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебника для студентов университетов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

А 46
517.3
УДК 516, 0

2-2-3
1-68

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 13

Глава I Координаты на прямой 17

§ 1 Отношение отрезков 17
§ 2 Направленные отрезки (векторы), их отношение 18
§ 3 Ось Алгебраическое значение (координата) вектора на оси 20
§ 4 Сложение векторов на прямой 21
§ 5 Система координат на прямой 22
§ 6 Деление отрезка в данном отношении 23
§ 7 Пропорциональность пар чисел 25
§ 8. Бесконечно удаленная точка прямой 28
§ 9 Пропорциональность двух последовательностей, состоящих из n чисел 29

Глава II Векторы 32

§ 1 Равенство векторов Свободный вектор 32
§ 2 Линейные операции над векторами (сложение и умножение на число) 34

1 Сложение векторов (34) 2 Умножение вектора на число (38)

§ 3 Проекции 39
§ 4 Коллинеарные и компланарные векторы, координаты вектора относительно данного базиса 44
§ 5. Линейная зависимость и независимость векторов 49
§ 6. Геометрический смысл линейной зависимости векторов . . . 50
§ 7. Векторные многообразия 52

Глава III Аффинная система координат на плоскости и в пространстве 55

§ 1 Определение аффинной системы координат 55

1 Аффинная система координат на плоскости (55) 2 Аффинная система координат в пространстве (58)

§ 2 Перенос начала координат 61
§ 3 Деление отрезка в данном отношении 62

Глава IV Прямоугольная система координат. Полярные координаты 66

§ 1 Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве Расстояние между двумя точками Уравнения окружности и сферы 66

1 Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве (66) 2 Формула для длины вектора (для расстояния между двумя точками) в прямоугольной системе

координат (66). 3. Уравнение окружности; замечание об уравнении линии вообще (67). 4. Уравнение сферы (68).

§ 2. Скалярное произведение векторов; угол между двумя векторами **69**

1. Угол между двумя векторами (69). 2. Направляющие косинусы (71). 3. Скалярное произведение двух векторов (72). 4. Выражение скалярного произведения и угла между двумя векторами через координаты этих векторов (73).

§ 3. Угол от одного вектора до другого на плоскости 75
§ 4. Полярная система координат на плоскости 77

1. Определение полярных координат (77). 2. Связь прямоугольных координат с полярными (79). 3. Примеры (81).

§ 5. Полярная система координат в пространстве 84

Глава V. **Прямая линия** 87

§ 1. Направляющий вектор и угловой коэффициент прямой (в произвольной аффинной системе координат). Уравнение прямой . 87
§ 2. Расположение двух прямых на плоскости 91
§ 3. Частные случаи общего уравнения прямой 93
§ 4. Векторная и параметрическая форма уравнения прямой. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки 94
§ 5. Задача: когда прямая $Ax+By+C=0$ на плоскости проходит через точку пересечения двух заданных прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$? 97
§ 6. Две полуплоскости, определяемые данной прямой на плоскости 101
§ 7. Прямая на плоскости в прямоугольной системе координат. Нормальное уравнение прямой на плоскости 105
§ 8. Расстояние от точки до прямой (на плоскости) 107
§ 9. Углы, образуемые двумя прямыми на плоскости 108

1. Угол между двумя прямыми (108). 2. Угол от первой прямой до второй (110).

§ 10. Прямая в пространстве, снабженном прямоугольной системой координат 112

Глава VI. **Парабола. Эллипс. Гипербола** 114

§ 1. Парабола 114
§ 2. Определение и каноническое уравнение эллипса 119
§ 3. Параметрическая запись уравнения эллипса; построение эллипса по точкам. Эллипс как результат сжатия окружности к одному из ее диаметров 124
§ 4. Эллипс как проекция окружности и как сечение круглого цилиндра 126
§ 5. Определение гиперболы. Каноническое уравнение гиперболы 129
§ 6. Основной прямоугольник и асимптоты гиперболы 134
§ 7. Директрисы эллипса и гиперболы 137
§ 8. Фокальный параметр эллипса и гиперболы. Уравнение при вершине 142

1. Фокальный параметр (142). 2. Уравнение при вершине. Объяснение названий «парабола», «эллипс», «гипербола» (143).

§ 9. Уравнение эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах 147

Глава VII. Детерминанты 150

§ 1. Площадь ориентированного параллелограмма и треугольника 150
§ 2. Детерминант второго порядка. Матрицы 152
§ 3. Детерминанты третьего порядка 154
§ 4. Разложение детерминанта третьего порядка по элементам какой-либо строки. Приложение к системе трех уравнений с тремя неизвестными (правило Крамера) 159
§ 5. Системы трех уравнений с тремя неизвестными с детерминантом системы, равным нулю 162
§ 6. Арифметическое n-мерное векторное многообразие (пространство). Общее определение матрицы. Детерминанты любого порядка 167

1. Арифметическое n-мерное векторное пространство (167). 2. Общее определение матрицы. Детерминанты n-го порядка. Невырождающиеся матрицы (168). 3. Основные свойства детерминантов (170).

§ 7. Разложение детерминанта n-го порядка по элементам данной строки (данного столбца) 174
§ 8. Правило Крамера для решения систем n уравнений с n неизвестными 177
§ 9. Общее определение миноров матрицы. Теорема Лапласа . . 178
§ 10. Умножение детерминантов 183
§ 11. Детерминант n-го порядка как линейная нечетная нормированная функция от n векторов 185

Глава VIII. Преобразование координат. Матрицы 188

§ 1. Переход от одной аффинной системы координат к другой . . 188

1. Переход от одной аффинной системы координат к другой с тем же началом. Переход от одного базиса к другому. Матрица, обратная к данной (188). 2. Переход от одной аффинной системы координат к другой с изменением начала координат (191). 3. Уравнение гиперболы относительно ее асимптот (191).

§ 2. Перемножение матриц. Новое определение обратной матрицы 193

1. Произведение двух матриц (193). 2. Новое определение обратной матрицы (195).

§ 3. Переход от одной прямоугольной системы координат к другой 196
1. Случай прямоугольного репера на плоскости (196). 2. Ортогональные матрицы. Прямоугольные (ортогональные) реперы в пространстве (199).

§ 4. Действия над матрицами в общем случае 202

Глава IX. Преобразование координат (продолжение): ориентация плоскости и пространства; углы Эйлера; объем ориентированного параллелепипеда; векторное произведение двух векторов 207

§ 1. Ориентация пространства (плоскости) 207
§ 2. Углы Эйлера 218
§ 3. Объем ориентированного параллелепипеда 221

1. Некоторые частные случаи определения ориентации пространства (221). 2. Объем ориентированного параллелепипеда (222).

§ 4. Векторное произведение двух векторов 225
1. Бивектор (225). 2. Векторное произведение (226)

Глава X. Плоскость и прямая в пространстве 230

§ 1. Уравнения плоскости 230
1. Параметрическое и общее уравнения плоскости (230). 2. Уравнение двумерного векторного многообразия (232). 3. Первая основная теорема о плоскости (234). 4. Условие компланарности вектора плоскости (235). 5. Частные случаи уравнения плоскости (236).

§ 2. Множество решений системы двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными 238
§ 3. Взаимное расположение двух плоскостей 240
§ 4. Прямая как пересечение двух плоскостей 241
§ 5. Пучок плоскостей 244
§ 6. Взаимное расположение двух прямых в пространстве . . . 246
§ 7. О двух полупространствах, определяемых данной плоскостью 247
§ 8. Плоскость в прямоугольной системе координат; нормальное уравнение плоскости; расстояние от точки до плоскости . . 249
§ 9. Угол между прямой и плоскостью; угол между двумя плоскостями 252
§ 10. Две задачи 254

Глава XI. Движения и аффинные преобразования 259

§ 1. Определение движений и аффинных преобразований 259
§ 2. Преобразование векторов при аффинном преобразовании плоскости и пространства. Основные свойства аффинных преобразований 264
§ 3. Аналитическое выражение аффинных преобразований 271
§ 4. Сохранение отношений площадей и объемов при аффинных преобразованиях 274
§ 5. Получение собственных аффинных преобразований посредством деформации тождественного преобразования. Следствия 276
§ 6. Движения как изометрические преобразования 278
§ 7. Преобразования подобия 280
1. Определение преобразования подобия (280). 2. Равномерное растяжение (гомотетия) (280). 3. Представление преобразования подобия в виде произведения растяжения и движения (282).

§ 8. Классификация движений прямой и плоскости 283
1. Движения прямой (283). 2. Движения плоскости (284).

Глава XII. Векторные пространства (многообразия) любого конечного числа измерений. Системы линейных однородных уравнений . . . 288

§ 1. Определение векторного пространства 288
§ 2. Размерность. Базис. Координаты 292
1. Базис (292). 2. Переход от одного базиса к другому (294).

§ 3. Теорема об изоморфизме между любыми двумя векторными пространствами одной и той же конечной размерности n . . 295

§ 4. Подпространства векторного пространства. Дальнейшие теоремы о линейной зависимости векторов и о базисе векторного пространства 297

1. Определение подпространства векторного пространства (297) 2. Теорема Штейница «о замене» (298).

§ 5. Алгебраическая (в частности, прямая) сумма подпространств 302
§ 6. Линейные отображения векторных пространств 304

1. Определение и простейшие свойства линейных преобразований (304). 2. Матрица линейного преобразования. Умножение преобразований и умножение матриц (306).

§ 7. Теорема о ранге матрицы 310
§ 8. Системы линейных однородных уравнений 313

Глава XIII. Линейные, билинейные и квадратичные функции на векторных пространствах 321

§ 1. Линейные функции 321
§ 2. Билинейные функции и билинейные формы 323
§ 3. Матрица билинейной и квадратичной формы и ее преобразование при переходе к новому базису (при преобразовании переменных) 327
§ 4 Ранг билинейной и квадратичной формы (билинейной и квадратичной функции) 330
§ 5 Существование канонического базиса для всякой квадратичной и всякой билинейной функции («приведение квадратичных форм к каноническому виду») 332

Глава XIV. Точечно-векторное аффинное n-мерное пространство R^n . 343

§ 1. Определение n-мерного аффинного пространства 343
§ 2. Системы координат. Арифметическое пространство R^n. Изоморфизм всех n-мерных пространств между собою 345
§ 3. r-мерные плоскости n-мерного аффинного пространства; r-мерные параллелепипеды 348

1. Прямая в n-мерном пространстве (348). 2. Общее определение r-мерной плоскости n-мерного аффинного пространства R^n (349).

§ 4. Геометрически независимые системы точек. Барицентрические координаты. Симплексы 352
§ 5. Системы линейных уравнений 357
§ 6. Аффинные преобразования n-мерного аффинного пространства R^n 363

Глава XV. Алгебраические линии и поверхности. Комплексная плоскость и комплексное пространство 364

§ 1. Определение алгебраических линий и поверхностей 364
§ 2. Преобразование многочлена второй степени при преобразовании координат 368
§ 3. Аффинная эквивалентность линий и поверхностей 371
§ 4. Комплексная плоскость 373
§ 5. Прямая линия на комплексной плоскости 377
§ 6. Замечание о действительных и мнимых линиях 380
§ 7. Комплексное пространство 382

§ 8. Распадающиеся линии и поверхности. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения 384

1. Распадающиеся линии и поверхности (384). 2. Цилиндрические поверхности (385). 3. Конические поверхности (386). 4. Поверхности вращения (390).

§ 9. Несколько заключительных замечаний о линиях и поверхностях 393

Глава XVI. **Различные виды кривых второго порядка** 398

§ 1. О линиях, определяемых уравнениями второй степени с двумя неизвестными 399

1. Приведение квадратичной формы от двух переменных к каноническому виду при помощи преобразований прямоугольных координат (399). 2. Первый основной случай: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ (400). 3. Второй основной случай: $\lambda_1\lambda_2 = 0$ (402).

§ 2. Инварианты многочлена второй степени 403
§ 3. Центральный случай 408
§ 4. Параболический случай: $\delta = 0$ 413
§ 5. Аффинная классификация кривых второго порядка 416
§ 6. Несколько заключительных замечаний 420

Глава XVII. **Общая теория кривых второго порядка** 425

§ 1. Пересечение алгебраической кривой с прямой. Асимптотические направления и асимптоты алгебраической кривой . . . 425
§ 2. Теорема единственности для кривых второго порядка. Пучок кривых второго порядка 429

1. Теорема единственности (429). 2. Пучок кривых второго порядка (432).

§ 3. Асимптотические направления кривых второго порядка . . . 434
§ 4. Пересечение кривой второго порядка с прямой неасимптотического направления. Касательные 440
§ 5. Пересечение кривой второго порядка с прямой асимптотического направления. Геометрическая характеристика асимптотических и неасимптотических направлений 442
§ 6. Центр кривой второго порядка 445
§ 7. Диаметры кривой второго порядка 448
§ 8. Взаимно сопряженные векторы (направления). Диаметры и касательные 450

1. Взаимно сопряженные векторы. Особое направление (450). 2. Диаметры и касательные (457).

§ 9. Вид уравнения кривой, если оси координат имеют сопряженные направления 458
§ 10. Второе доказательство теоремы единственности. О полноте системы ортогональных инвариантов 462

1. Второе доказательство теоремы единственности (462). 2. О полноте системы ортогональных инвариантов (465).

§ 11. Оси симметрии и главные направления кривой второго порядка 466
§ 12. Основная теорема об аффинных преобразованиях 473

Глава XVIII. **Краткое описание различных видов поверхностей второго порядка** 476

§ 1. Распадающиеся поверхности 476
§ 2. Цилиндрические поверхности 478
§ 3. Конусы второго порядка 479
§ 4. Эллипсоиды и гиперболоиды 482
§ 5. Параболоиды 492
§ 6. Прямолинейные образующие 497

1. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида (497). 2. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида (501).

Глава XIX. **Общая теория поверхностей второго порядка. I (пересечение с плоскостью и с прямой; асимптотические направления; касательная плоскость; центр)** 504

§ 1. Ранг и детерминант малой и большой матрицы многочлена второй степени 504
§ 2. Пересечение поверхности второго порядка с плоскостью . . . 506
§ 3. Пересечение поверхности второго порядка с прямой. Асимптотические направления. Касательные прямые и касательная плоскость. Особые точки поверхности второго порядка . . . 509
§ 4. Асимптотические направления, конус асимптотических направлений, прямолинейные образующие поверхностей второго порядка 513
§ 5. Центр поверхности второго порядка 522

Глава XX. **Общая теория поверхностей второго порядка. II (диаметральные плоскости; особые и главные направления; аффинная классификация)** 528

§ 1. Диаметральные плоскости. Особые направления 528

1. Плоскость, сопряженная данному неасимптотическому направлению (528). 2. Плоскость, сопряженная асимптотическому направлению; общее определение диаметральной плоскости (529). 3. Простейшие свойства диаметральных плоскостей (530). 4. Особые направления (531).

§ 2. Диаметральные плоскости поверхностей различных видов . . 536

1. Центральные поверхности (поверхности с единственным центром) (536). 2. Поверхности с прямой центров и с плоскостью центров (536). 3. Поверхности без центров (537).

§ 3. Сопряженные направления 539
§ 4. Уравнение поверхности второго порядка относительно координатной системы с сопряженными направлениями осей . . . 542
§ 5. Теорема единственности 543
§ 6. Главные направления 546
§ 7. Приведение к каноническому виду уравнения поверхности второго порядка 553
§ 8. Аффинная классификация поверхностей второго порядка . . . 564

Глава XXI. **Проективная плоскость** 570

§ 1. Перспективное соответствие между плоскостью и связкой . . 570
§ 2. Однородные координаты точек на плоскости и лучей в связке 573

1. Определение однородных координат (573). 2. Уравнение прямой на плоскости в однородных координатах (577).

§ 3. Координаты прямой; арифметическая проективная плоскость; общее определение проективной плоскости 579

1. Координаты прямой (579). 2. Арифметическая проективная плоскость (580). 3. Общее определение проективной плоскости (581). 4. Комплексная проективная плоскость (582).
§ 4. Принцип двойственности для проективной плоскости 583
§ 5. Проективная система координат в связке и на проективной плоскости 590
§ 6. Проективные преобразования и отображения проективной плоскости 599

1. Определение и аналитическая запись проективных преобразований (599). 2. Основная теорема о проективных преобразованиях плоскости (602). 3. Задание проективных преобразований проективной плоскости аффинными преобразованиями трехмерного пространства (604). 4. Подгруппа проективно-аффинных преобразований (605). 5. Проективные отображения одной плоскости на другую. Перспективные отображения (610).

§ 7. Проективные координаты на прямой. Проективные отображения прямой 612
§ 8. Двойное отношение 620

1. Определение двойного отношения четырех точек на прямой (620). 2. Гармонические четверки точек (623). 3. Двойное отношение и проективные отображения (624). 4. Двойное отношение в пучке прямых (625). 5. Выражение двойного отношения четырех точек на прямой, заданных своими координатами относительно системы проективных координат на плоскости (626). 6. Двойное отношение четырех точек на прямой, заданной параметрическими уравнениями (628).

Глава XXII. **Кривые второго порядка на проективной плоскости** . . 630

§ 1. Определение. Теорема единственности 630
§ 2. Пересечение кривой второго порядка с прямой. Касательные; асимптоты 634
§ 3. Пучок кривых второго порядка. Второе доказательство теоремы единственности. Теорема Паскаля. Теорема Штейнера 640
§ 4. Поляры и полюсы 649
§ 5. Коррелятивное, в частности полярное, соответствие. Тангенциальное уравнение кривой 655
§ 6 Диаметры как поляры несобственных точек 659
§ 7. Автополярный треугольник 660
§ 8. Проективная классификация кривых второго порядка 662

Глава XXIII. Начальные сведения из аналитической геометрии проективного пространства 668

§ 1. Проективное пространство; его плоскости и прямые 668
§ 2. Проективные координаты. Проективные преобразования . . . 673

1. Проективные координаты (673). 2. Проективно-аффинное пространство (675). 3. Проективные преобразования (677).

§ 3. Понятие об n-мерном проективном пространстве 679
§ 4. Поверхности второго порядка в проективном пространстве. Теорема единственности 680
§ 5. Пересечение поверхности второго порядка с плоскостью и с прямой. Касательные прямые. Касательная плоскость. Прямолинейные образующие 684
§ 6. Полюсы и полярные плоскости 690
§ 7. Проективная классификация поверхностей второго порядка 693
§ 8. Распределение по проективным классам поверхностей различных аффинных классов. Проективно-аффинная классификация поверхностей второго порядка 700

Глава XXIV. Евклидово n-мерное пространство 710

§ 1. Введение. Ортогональные матрицы 710
§ 2. Положительно определенные симметричные билинейные функции в векторном пространстве 712
§ 3. Определение евклидовых пространств и простейших относящихся к ним понятий 716
§ 4. Неравенство Коши—Буняковского и его следствия. Углы . . . 719
§ 5. Подпространства евклидовых пространств. Ортогональное дополнение к данному подпространству 721

Глава XXV. Линейные операторы, билинейные и квадратичные функции в евклидовых пространствах. Поверхности второго порядка 724

§ 1. Инвариантные подпространства и собственные векторы линейного оператора в любом векторном пространстве 724
§ 2. Ортогональные преобразования n-мерного евклидова пространства 730
§ 3. Движения трехмерного евклидова пространства 736
§ 4. Преобразования подобия. Дальнейшие проблемы 741
§ 5. Самосопряженные операторы 743
§ 6. Теорема о структуре произвольного линейного преобразования евклидова пространства 749
§ 7. Билинейные и квадратичные формы в евклидовых пространствах 752
§ 8. $(n-1)$-мерные многообразия (поверхности) второго порядка в n-мерном аффинном и евклидовом пространствах 754

Прибавление. Перестановки, множества и их отображения; группы 767

§ 1. Перестановки 767
§ 2. Множества 777
§ 3. Отображения или функции 779
§ 4. Разбиение множества на подмножества. Отношение эквивалентности 783

1. Множества множеств (783). 2. Разбиение на классы (784). 3. Отношение эквивалентности (785).

§ 5. Определение группы 787
§ 6. Простейшие теоремы о группах 794

1. Аксиома ассоциативности (794). 2. Нейтральный элемент (794). 3. Обратный элемент (795). 4. Замечания об аксиомах понятия группы (796). 5. Понятие подгруппы (797). 6. Условие, чтобы подмножество группы было подгруппой (797).

§ 7. Эквивалентность подмножеств данного множества по отношению к данной группе его преобразований 797

Задачи 800

К главам I, II, III (800). К главе IV (803). К главе V (807). К главе VI (817). К главе VIII (823). К главе IX (826). К главе X (830). К главе XI (833). К главе XII (841). К главе XIII (844). К главе XIV (850). К главе XV (857). К главам XVI и XVII (863). К главе XVIII (870). К главам XIX и XX (878). К главе XXI (882). К главе XXII (886). К главе XXV (888).

Предметный указатель 901

Посвящается
Алексею Серапионовичу ПАРХОМЕНКО
в знак благодарности,
уважения, дружбы

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга представляет собой учебник аналитической геометрии в ее традиционном понимании, написанный на основании лекций, которые я в течение многих лет читал в Московском университете и которые пополнены, как это и сказано в заглавии, необходимыми сведениями из алгебры. Книгу эту, предназначенную для университетских студентов-первокурсников, я старался писать так, чтобы она была доступна *каждому* студенту — при единственном условии, что он вообще склонен к математике и желает серьезно заниматься ею.

Из вещей, не входящих в программу средних классов общеобразовательной школы, эти «Лекции» предполагают лишь знание комплексных чисел, так что книга может служить и целям самообразования; я думаю, что она доступна всем тем учащимся старших классов средней школы, которые любят математику, интересуются ею и готовы шаг за шагом ее изучать, не стремясь во что бы то ни стало начинать это изучение с постижения так называемых «последних слов науки».

На русском языке написано немало хороших учебников аналитической геометрии. Мы с благодарностью помним классические курсы К. А. Андреева и Б. К. Млодзеевского, относящиеся к началу текущего столетия. Превосходный для своего времени курс С. С. Бюшгенса примыкает к курсу Б. К. Млодзеевского, оставаясь в том же кругу идей и в некотором роде развивая их.

Новым словом в учебной литературе по аналитической геометрии явились курсы Н. И. Мусхелишвили и Б. Н. Делоне (последний в соавторстве с Д. А. Райковым). Все первые годы своего преподавания аналитической геометрии в Московском университете я в основном опирался именно на курс Н. И. Мусхелишвили, и влияние его на мой учебник, несомненно, значительно. Можно только радоваться предстоящему выходу в свет нового, четвертого издания этой, уже ставшей классической книги. Что касается Б. Н. Делоне, то

богатство его геометрических идей делает его книгу (совместную с Д. А. Райковым) образцом геометрического мышления и изложения, который сохраняет и на многие годы сохранит свое значение.

Упомянутые мною книги непохожи друг на друга. Я думаю, что и книга, предлагаемая сейчас вниманию читателя, не очень похожа на своих предшественниц (названных выше), хотя и несет на себе печать влияния каждой из них. В то же время я не стремился к оригинальности, а оставался — более или менее — в традиционных пределах. Никакого «нового слова» в моих «Лекциях» читатель не найдет. Однако если два разных человека пишут об одном и том же, то обычно получаются разные вещи, и это давно известно. Можно не перечислять, чем именно отличается мой учебник от предшествующих ему: когда дело касается такого элементарного предмета, как аналитическая геометрия, то всякий, кому до этого есть дело, сам заметит, если есть что-нибудь новое в изложении. Впрочем, сделаю все же одно замечание. Элементарные сведения по проективной геометрии даются лишь в главах XXI—XXIII, так что весь обычный материал аналитической геометрии излагается с аффинной и метрической точек зрения. Однако мне представляется наиболее интересным рассматривать, например, аффинные свойства невырождающихся кривых второго порядка как относящиеся к геометрии проективной плоскости с выделенной на ней несобственной прямой — для того хотя бы, чтобы у всех этих кривых был центр и чтобы диаметры были просто прямыми, проходящими через этот центр. С другой стороны, изучая кривые на вещественной плоскости, я предпочитаю ее рассматривать как вещественную плоскость, погруженную в комплексную плоскость (со всеми ее четырьмя «вещественными» измерениями). Другими словами, я считаю законным и интересным среди всех преобразований координат (на комплексной плоскости) выделить особо преобразования с вещественными коэффициентами, так что вся комплексная плоскость мыслится мною (как во времена Понселе!) в виде вещественной плоскости, «пополненной мнимыми (т. е. не вещественными) точками». Это для того, чтобы у каждой вещественной невырождающейся кривой второго порядка были две асимптоты — вещественные (быть может, совпадающие) или мнимые (и сопряженные) — и чтобы эти асимптоты были касательными к данной кривой в ее бесконечно удаленных точках (вещественных или мнимых); в особенности же для того, чтобы — после того как введена метрика — все окружности пересекались в одних и тех же двух мнимых «круговых» точках несобственной прямой. Теорема о том, что через всякие три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, можно провести одну-единственную окружность, становится, таким образом, следствием того, что через пять точек можно, вообще говоря, провести лишь одну кривую второго порядка, а две точки — именно

две «круговые» — принадлежат всем без исключения окружностям: $5-2=3$.

Этот факт, когда я впервые узнал его, поразил меня своей непосредственной математической красотой — впечатление, сохранившееся у меня на всю жизнь. Хорошо, чтобы начинающие математики как можно раньше получали такие впечатления от своей науки!

Эта книга никогда не была бы написана, если бы А. С. Пархоменко не побуждал меня самым настойчивым образом к ее написанию и если бы он не оказал мне в осуществлении этой своей инициативы совершенно исключительной помощи. Иногда — особенно в главах XVIII и XIX — эта помощь переходила в настоящее соавторство. Первоначальный вариант главы XVIII основывался на определении эллипсоидов (и других поверхностей второго порядка) их уравнениями канонического вида, но по отношению к той или иной (произвольной) *аффинной* системе координат. Недостатки такого способа изложения значительно превосходили его возможные достоинства, в чем меня и убедил А. С. Пархоменко. В результате его содействия главы XVIII и XIX подверглись коренной переработке с большим участием А. С. Пархоменко. Но это только один пример сотрудничества и помощи, оказанных мне А. С. Пархоменко. Помимо помощи при написании отдельных параграфов (например, § 8 главы XXI и во многих других местах), А. С. Пархоменко внимательнейшим образом прочитал и отредактировал всю книгу с первой ее строчки до последней, сделав огромное количество отдельных, часто существенных замечаний, содействовавших значительному улучшению книги. Наконец, уже из заглавия книги можно узнать, что А. С. Пархоменко составил все задачи, а задачи эти являются необходимой и существенной частью книги. А. С. Пархоменко снабдил составленные им задачи решениями — во всех случаях, когда для этого имеется хоть малейший повод. Это обстоятельство — при той цели, которую преследуют эти «Лекции», — представляется мне очень важным: всякому понятно, что нельзя овладеть таким предметом, как аналитическая геометрия, не решая относящиеся к нему основные задачи. Но *решению задач надо научить*, и в собрании задач, которым А. С. Пархоменко так удачно дополнил эти «Лекции», он не только предлагает задачи, но и учит их решать.

Подводя итог только что сказанному, могу лишь добавить, что мне очень трудно найти слова, адекватно выражающие то искреннее чувство глубокой благодарности, которое я испытываю по отношению к А. С. Пархоменко за все его многообразное участие и за всю его незаменимую помощь при написании этой книги.

Приношу искреннюю благодарность рецензентам этой книги — профессору Л. Д. Кудрявцеву и академику АН ГрузССР Г. С. Чогошвили, а также членам возглавляемой академиком Г. С. Чогошвили

кафедры Тбилисского государственного университета за ценные замечания, которыми я постарался воспользоваться и которые, несомненно, послужили улучшению изложения.

Я сердечно благодарен В. А. Логвиновой, которая сотрудничала с А. С. Пархоменко во всей его работе над этой книгой. В частности, В. А. Логвинова выполнила все чертежи, за исключением чертежей 140 и 235, за которые я благодарен А. Б. Сосинскому.

Я благодарен также моим ученикам — доктору физико-математических наук В. И. Пономареву и студенту 5-го курса В. Зайцеву за содействие и помощь, в различных формах оказанные мне ими при моей работе.

Высокая квалификация и тщательность, проявляемые Анатолием Филипповичем Лапко в качестве редактора математических сочинений, хорошо известны очень многим математикам нашей страны (в частности, всем читателям «Успехов математических наук»). А. Ф. Лапко не отказался быть редактором и этой книги, выполнив взятые на себя обязанности на обычном для него высоком уровне. Я ему очень признателен за это.

Я искренне благодарен сотруднице кафедры высшей геометрии и топологии Московского университета Галине Всеволодовне Наркевич-Иодко за огромную работу, проведенную ею по окончательному оформлению обширной и сложной рукописи этих «Лекций».

Наконец, я приношу глубокую благодарность математической редакции издательства «Наука» в лице Н. А. Угаровой за внимание, доброжелательность, снисходительность и терпение, проявленные ею ко мне, как к автору этого сочинения, по разным поводам и в разной форме.

П. Александров

Болшево, Комаровка,
28 января 1967 г.

ГЛАВА I

КООРДИНАТЫ НА ПРЯМОЙ

§ 1. Отношение отрезков

Если даны два прямолинейных отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{EF}$, то определено вещественное число λ (рациональное или иррациональное), показывающее, сколько раз отрезок $\overline{EF}$ укладывается в отрезке $\overline{AB}$: именно, если существует такое натуральное число n, что $\frac{1}{n}$-я часть отрезка $\overline{EF}$ укладывается без остатка, положим, m раз, в отрезке $\overline{AB}$, то λ есть рациональное число $\frac{m}{n}$; если же такого натурального числа n нет, то λ есть иррациональное число, к которому с любой точностью можно приблизиться рациональными числами: взяв как угодно большое натуральное число n, мы найдем такое натуральное число m, что $\frac{1}{n}$-я часть отрезка $\overline{EF}$ уложится m раз на отрезке $\overline{AB}$ с некоторым остатком, а $m+1$ раз уже не уложится. Взяв n достаточно большим, можно достигнуть того, что рациональное число $\frac{m}{n}$ со сколь угодно малой ошибкой приближает искомое иррациональное λ. Число λ называется *отношением* отрезка $\overline{AB}$ к отрезку $\overline{EF}$. Если оно равно 1 (и только в этом случае), то отрезки *равны* (*конгруэнтны*) между собою. Если отрезок $\overline{EF}$ принят за единицу измерения длин, то число λ есть *длина* отрезка $\overline{AB}$, измеренная посредством этой единицы измерения.

Все это содержится в курсе средней школы; однако любознательный и критически настроенный читатель может испытать беспокойство при пользовании такими словами, как «укладывание» одного отрезка в другом, «с остатком» или «без остатка» и т. п. Понятиям, выражаемым этими словами, не дается точного определения. Это беспокойство устраняется аксиоматическим построением геометрии. Правда, при этом тоже приходится пользоваться понятиями, которые никак не определяются (например, понятием совмещения двух отрезков или их конгруэнтности), а также утверждениями (аксиомами),

которые никак не доказываются. Но при аксиоматическом построении геометрии по крайней мере дается точный и полный перечень всех «первоначальных» (т. е. не подлежащих определению) понятий и всех не подлежащих доказательству утверждений (аксиом). После того как этот перечень сделан, все остальное доказывается уже посредством строгих логических рассуждений; кроме того, доказывается, что принятая исходная система предложений (а следовательно, и все, что из нее выводится посредством дальнейших рассуждений) не содержит противоречия, не может привести ни к какому нелепому выводу.

Эту цель строго аксиоматического построения геометрии наши лекции себе не ставят. Такое построение геометрии составляет содержание отдельной геометрической дисциплины, называемой «основаниями геометрии». Мы же будем употреблять элементарные геометрические понятия в том наивном смысле, в каком они употребляются в школьном курсе геометрии, зная, что под них можно подвести безупречное аксиоматическое основание.

Мы не будем также определять вещественные (действительные) числа, хотя будем ими постоянно пользоваться: подробная теория вещественных чисел излагается в первых главах любого современного курса анализа, и читатель должен ее хорошо знать.

§ 2. Направленные отрезки (векторы); их отношение

Любые две точки A и B пространства, данные в определенном порядке так, что, например, A является первой, а B — второй точкой, определяют отрезок вместе с данным на нем направлением (а именно направлением от A к B), или *направленный отрезок* с началом A и концом B. Направленный отрезок называют короче *вектором*.

Вектор с *началом* A и *концом* B обозначается через $\overrightarrow{AB}$, точка A часто называется *точкой приложения вектора* $\overrightarrow{AB}$.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым вектором* и обозначается через $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA}$ (точка A при этом любая). Направление нулевого вектора неопределенно.

В этой главе мы будем рассматривать лишь векторы, лежащие на одной и той же, раз навсегда данной прямой.

На прямой возможно движение («скольжение») точек и векторов: точка X на прямой может скользить по этой прямой от какого-нибудь начального положения X_0 в одном из двух взаимно противоположных направлений. Точно так же и вектор $\overrightarrow{XX'}$ может скользить по прямой (также в одном из двух возможных на прямой направлений). При этом отрезок, определяющий данный вектор, остается все время

равным (в смысле элементарной геометрии) исходному отрезку, так что само это движение надо себе представить как скольжение по прямой твердого стержня, всеми своими точками все время лежащего на этой прямой. Два вектора на прямой называются *равными,* если посредством такого скольжения один из них может быть совмещен с другим. Считая понятие направления на прямой первоначальным и не подлежащим определению, можно сказать и так: два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ на прямой равны, если они имеют одно и то же направление и если отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны (конгруэнтны) между собою.

Для любых двух векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ на прямой определено их *отношение,* а именно число λ, модуль которого равен отношению отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ (в смысле элементарной геометрии) [1]), а знак положителен, если векторы имеют одно направление, и отрицателен, если их направления противоположны. Два равных вектора имеют отношение 1. Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *взаимно противоположными,* если их отношение равно -1, т. е. если их направления противоположны и отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны между собою. Если один из двух взаимно противоположных векторов обозначен, например, через $\mathbf{u}$, то другой обозначается через $-\mathbf{u}$; очевидно, $-(-\mathbf{u})=\mathbf{u}$. Отношение нулевого вектора к любому ненулевому равно нулю; отношение какого бы то ни было вектора к нулевому не определено. Если отношение вектора $\overrightarrow{CD}$ к вектору $\overrightarrow{AB}$ равно числу λ, то пишут

$$\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB}}=\lambda \quad \text{или} \quad \overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}.$$

Поэтому нахождение вектора $\overrightarrow{CD}$, отношение которого к данному вектору $\overrightarrow{AB}$ равно данному числу λ, называется *умножением вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на* это *число* λ. При $\lambda>0$ вектор $\lambda\overrightarrow{AB}$ имеет то же направление, что и вектор $\overrightarrow{AB}$, при $\lambda<0$ — противоположное. Если $\lambda=0$, то $\lambda\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$, каков бы ни был вектор $\overrightarrow{AB}$.

Очевидно, что, заменяя векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB}$ равными им векторами $\overrightarrow{C'D'}$ и $\overrightarrow{A'B'}$, мы не меняем их отношения:

$$\frac{\overrightarrow{C'D'}}{\overrightarrow{A'B'}}=\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB}}, \quad \text{если} \quad \overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{CD} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}. \tag{1}$$

Если $\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}$, то и $\overrightarrow{C'D'}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

---

[1]) И, значит, отношению длин этих отрезков.

Легко проверяется также равенство, верное для любых трех векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{PQ}$:

$$\frac{\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{PQ}}}{\dfrac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{PQ}}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}. \tag{2}$$

§ 3. Ось. Алгебраическое значение (координата) вектора на оси

Пусть на прямой дан *единичный вектор*, т. е. вектор, который принят за единицу измерения длин (см. § 1), а его направление объявлено положительным на всей этой прямой. Тогда мы говорим, что наша *прямая превращена в ось*. Можно, очевидно, сказать и так: *ось есть прямая, на которой выбрана единица измерения длин и одно из двух направлений названо положительным*. Если это сделано, то всякий вектор длины единица и положительного направления и будет единичным вектором данной оси.

Отношение любого вектора $\mathbf{u}$ *на данной оси к единичному вектору этой оси называется алгебраическим значением или координатой вектора* $\mathbf{u}$ *на данной оси*. Таким образом, алгебраическое значение вектора $\mathbf{u}$ на оси есть число, модуль которого равен длине вектора $\mathbf{u}$, измеренной данной на оси единицей длины, а знак положителен, если направление вектора положительно, и отрицателен в противном случае. Алгебраическое значение вектора $\overrightarrow{AB}$ будем обозначать через (AB). Из этого определения непосредственно вытекают следующие предложения.

1. *Два вектора на данной оси равны тогда и только тогда, когда равны их координаты* (*их алгебраические значения*).

2. *Если два вектора имеют одну и ту же длину, но противоположны по направлению, то их алгебраические значения имеют один и тот же модуль, но противоположны по знаку:*

$$(AB) + (BA) = 0. \tag{1}$$

3. *Координата единичного вектора равна* 1.

Если вектор $\overrightarrow{PQ}$ есть единичный вектор, то, обозначая координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ соответственно через x и x', видим, что левая часть равенства (2) из § 2 есть $\frac{x}{x'}$, так что само это равенство превращается в $\frac{x}{x'} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$, т. е.

4. *Отношение двух векторов на прямой равно отношению их координат.*

Имеет место следующее предложение, являющееся лишь геометрическим истолкованием правила сложения чисел (с произвольными знаками).

5 (Лемма Шаля). *При любом расположении точек A, B, C на оси имеет место числовое равенство*

$$(AB)+(BC)=(AC). \tag{2}$$

В самом деле, если две из трех точек A, B, C совпадают (например, $A=B$ или $A=C$), то равенство (2) сводится к тождеству $(AC)=(AC)$ или же к тождеству (1).

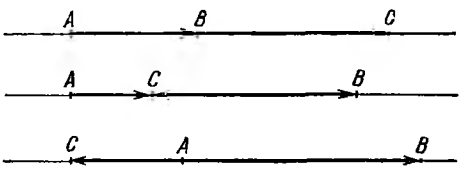


Рис. 1.

Пусть все три точки A, B, C попарно различны между собою. Тогда одна из них лежит между двумя другими[1]) (рис. 1). Если B лежит между A и C, то $|(AB)|+|(BC)|=|(AC)|$ и векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ имеют одно и то же направление, их алгебраические значения имеют один и тот же знак, значит, число (AC) равно сумме $(AB)+(BC)$, т. е. равенство (2) справедливо.

Пусть теперь C лежит между A и B. Тогда по только что замеченному

$$(AC)+(CB)=(AB),$$

т. е.[2])

$$(AC)=(AB)-(CB).$$

Но в силу (1)

$$-(CB)=(BC)$$

— равенство (2) снова справедливо: $(AC)=(AB)+(BC)$.

Аналогично доказывается и третий случай, когда A лежит между B и C.

§ 4. Сложение векторов на прямой

Пусть на прямой даны два вектора; предположим сначала, что начало второго вектора совпадает с концом первого, так что первый вектор есть вектор $\overrightarrow{AB}$, а второй $\overrightarrow{BC}$.

---

[1]) Вот это утверждение и может служить примером одной из аксиом, принимаемых без доказательства при аксиоматическом построении геометрии.

[2]) Не забывайте, что (AB), (CB), (AC) — числа!

Тогда — при любом взаимном расположении точек A, B, C — вектор $\overrightarrow{AC}$ называется *суммой векторов* $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

При этом мы считаем себя вправе заменить вектор $\overrightarrow{AC}$ любым равным ему вектором, так что всякий вектор $\overrightarrow{PQ}$, равный вектору $\overrightarrow{AC}$, равен сумме $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

Пусть теперь $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$ — два произвольных вектора на прямой. Возьмем вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\overrightarrow{MN}$, но имеющий своим началом точку B (вектор $\overrightarrow{MN}$ можно преобразовать в вектор $\overrightarrow{BC}$ посредством скольжения вдоль прямой). Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ и всякий равный ему вектор мы считаем суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$.

Из определения сложения векторов на прямой и из леммы Шаля читатель без труда выведет следующее предложение.

6. *Координата (на данной оси) суммы двух векторов равна сумме координат этих векторов.*

Отсюда (имея в виду предложение 1) или из самого определения суммы векторов легко выводится:

7. *Если* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ *и* $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$, *то* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{M'N'}$.

Из предложений 4 и 6 вытекает, далее,

8. $$\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{PQ}}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{PQ}}+\frac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{PQ}}.$$

§ 5. Система координат на прямой

Пусть теперь на нашей прямой не только дан единичный вектор, но и выбрана определенная точка O — «начальная» или «нулевая» точка. Тогда мы говорим, что на прямой выбрана *система координат*.

Определение. *Координатой точки* M называется алгебраическое значение (координата) вектора $\overrightarrow{OM}$.

Теперь не только каждый вектор, но и каждая точка имеет вполне определенную координату.

Ставя в соответствие каждой точке прямой ее координату, мы получаем взаимно однозначное соответствие между всеми точками прямой и всеми вещественными числами. Поэтому прямая, на которой установлена некоторая система координат, называется *числовой прямой*. Начальная точка O и только она имеет координату нуль; на одной из двух полупрямых, на которые начальная точка разбивает

прямую, координаты всех точек положительны, на другой — отрицательны: мы говорим о положительной и отрицательной полупрямой числовой прямой.

Следующее простое замечание важно:

9. *Координата вектора* $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ *равна координате его конца* B *минус координата его начала* A.

В самом деле, пусть координата вектора $\mathbf{u}$ есть x, координата точки A есть x_1, а координата точки B есть x_2. Мы это записываем так:

$$\overrightarrow{AB} = \{x\}, \qquad A = (x_1), \qquad B = (x_2).$$

Тогда

$$x_1 = (OA), \qquad x_2 = (OB), \qquad x = (AB).$$

По лемме Шаля имеем

$$(OB) = (OA) + (AB),$$

т. е. $x_2 = x_1 + x$, откуда $x = x_2 - x_1$, что и требовалось доказать.

§ 6. Деление отрезка в данном отношении

Пусть дан направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ прямой; говорят, что точка M этой прямой делит отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении, равном λ, где λ — произвольное вещественное число, если

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \lambda. \tag{1}$$

Когда точка M лежит между точками A и B (т. е. внутри отрезка $\overline{AB}$), то векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ направлены в одну сторону (рис. 2) и

Рис. 2.

отношение (1) положительно. Когда точка M лежит вне отрезка $\overline{AB}$, то векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ направлены в противоположные стороны (рис. 3) и отношение (1) отрицательно.

Посмотрим, как изменяется отношение (1), когда точка M пробегает всю прямую. Когда точка M совпадает с точкой A, то отношение (1) равно нулю; если затем точка M пробегает отрезок $\overline{AB}$ в направлении от A к B, то отношение (1) непрерывно возрастает, делаясь при приближении точки M к B сколь угодно большим. Когда $M=B$, то дробь (1) теряет смысл, так как ее знаменатель обращается в нулевой вектор. При дальнейшем движении точки M по прямой в том же направлении (на рис. 3, *а* направо от B) отношение (1) становится отрицательным, причем если M находится достаточно близко от B, то это отношение имеет сколь угодно большую абсолютную величину.

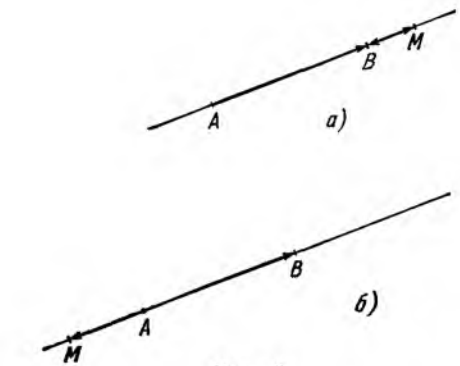


Рис. 3.

Так как $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$, то (в силу предложения 8 § 4) имеем

$$\lambda=\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{MB}}+\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MB}}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{MB}}+(-1). \qquad (1')$$

Когда точка M, двигаясь все время в том же направлении (на нашем рис. 3, *а* слева направо), уходит по прямой в бесконечность, то дробь $\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{MB}}\right|=\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{MB}}$ стремится к нулю (так как ее числитель остается постоянным, а знаменатель неограниченно возрастает), следовательно, отношение $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}$ стремится к -1.

Пусть теперь M переходит на «левую» из двух полупрямых, на которые точка A разбивает прямую (т. е. на ту полупрямую, которая не содержит отрезка $\overline{AB}$). Если при этом точка M находится достаточно далеко от точки A, то $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{MB}}$ снова сколь угодно мало и, значит, по формуле (1′) отношение $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}$ сколь угодно мало отличается от -1. При приближении точки M слева к точке A (рис. 3, *б*) отношение (1), оставаясь отрицательным, непрерывно уменьшается по модулю и наконец делается равным нулю, когда точка M возвращается в точку A.

Заметим, что ни при каком положении точки M на прямой отношение $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}$ не равно -1. В самом деле, отношение отрицательно, лишь когда точка M лежит вне отрезка $\overline{AB}$. Но в этом случае отрезки $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$ никогда не бывают равны, т. е. $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \neq 1$, $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} \neq -1$.

Пусть теперь на прямой установлена система координат и O — начало этой системы. Обозначим координату точки A через x_1, точки B — через x_2, а переменной точки M — через x. Тогда $(AM) = x - x_1$, $(MB) = x_2 - x$ и

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{(AM)}{(MB)},$$

т. е.

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \tag{2}$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \tag{3}$$

Эти формулы позволяют для каждой точки $M = (x)$ найти отношение, в котором она делит отрезок $\overrightarrow{AB}$, и обратно, по заданному отношению λ найти ту единственную точку $M = (x)$, которая делит отрезок $\overrightarrow{AB}$ в этом отношении. Установленное таким образом соответствие между точками M нашей прямой и числами λ, выражающими отношение, в котором точка M делит отрезок $\overrightarrow{AB}$, было бы взаимно однозначным, если бы оно не нарушалось в двух случаях: во-первых, точке $M = B$ не соответствует никакое λ, во-вторых, число $\lambda = -1$ не соответствует никакой точке M.

Но математика (в отличие от грамматики) не любит исключений! Поэтому постараемся и в нашем случае их устранить.

§ 7. Пропорциональность пар чисел

Рассмотрим всевозможные пары α, α' вещественных чисел, причем пару, состоящую из двух нулей: $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$, будем считать «запрещенной»; ее рассматривать не будем.

Две пары α, α' и β, β' назовем *пропорциональными*, если существует такое число $k \neq 0$, что $\beta = k\alpha$, $\beta' = k\alpha'$; число k называется *коэффициентом пропорциональности*.

Пропорциональность пар α, α' и β, β' **записывается в виде** формулы

$$\alpha:\alpha'=\beta:\beta', \tag{1}$$

называемой *пропорцией*[1]).

Отметим следующие свойства пропорциональности:

1 (Рефлексивность). *Каждая пара* α, α' *пропорциональна самой себе (т. е.* $\alpha:\alpha'=\alpha:\alpha'$, *коэффициент пропорциональности* k *есть* 1).

2 (Симметрия). *Если* $\alpha:\alpha'=\beta:\beta'$, *то* $\beta:\beta'=\alpha:\alpha'$.

В самом деле, пропорция $\alpha:\alpha'=\beta:\beta'$ означает существование такого $k\neq 0$, что $\beta=k\alpha$, $\beta'=k\alpha'$; но тогда $\alpha=\frac{1}{k}\beta$ и $\alpha'=\frac{1}{k}\beta'$, т. е. $\beta:\beta'=\alpha:\alpha'$.

3 (Транзитивность). *Если* $\alpha:\alpha'=\beta:\beta'$ *и* $\beta:\beta'=\gamma:\gamma'$, *то* $\alpha:\alpha'=\gamma:\gamma'$.

В самом деле, имеем $\beta=k\alpha$, $\beta'=k\alpha'$; $\gamma=h\beta$, $\gamma'=h\beta'$; но тогда $\gamma=hk\alpha$, $\gamma'=hk\alpha'$, что и требовалось доказать.

Дальнейшими свойствами пропорциональности являются:

4. *Если* $\alpha:\alpha'=\beta:\beta'$, *то и* $\alpha':\alpha=\beta':\beta$.

И та и другая пропорции означают существование такого $k\neq 0$, что $\beta=k\alpha$, $\beta'=k\alpha'$.

5. *Если в одной из двух пропорциональных пар чисел* α, α' *и* β, β' *один из двух элементов равен нулю, то и в другой паре соответствующий элемент равен нулю.*

Например, если $\alpha'=0$, то и $\beta'=k\alpha'=0$.

6. *Всякие две пары вида* α, 0 *и* β, 0 (*равно как и две пары вида* 0, α *и* 0, β) *пропорциональны.*

В самом деле, так как пары незапрещенные, то $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$. Полагая $\frac{\beta}{\alpha}=k$, имеем $\beta=k\alpha$, $0=k\cdot 0$ — утверждение доказано.

7. *Две пары* α, α' *и* β, β' *пропорциональны тогда и только тогда, когда*

$$\alpha\beta'=\alpha'\beta. \tag{2}$$

В самом деле, из пропорции (1) следует, что $\beta=k\alpha$, $\beta'=k\alpha'$ и, значит, $\alpha\beta'=\alpha k\alpha'=\alpha'\beta$, т. е. имеет место равенство (2).

Пусть, наоборот, (2) выполнено, и пусть, например, $\alpha'\neq 0$. Из (2) следует

$$\beta=\frac{\alpha\beta'}{\alpha'}.$$

---

[1]) В старых английских книгах пропорция (1) записывается в виде $\alpha\beta'::\beta:\beta'$, т. е. без употребления знака равенства. Этим как бы подчеркивается, что формула (1) выражает именно факт пропорциональности пар α, α' и β, β' и вовсе не обязана быть числовым равенством, в котором двоеточие есть знак деления; если α', β' суть нули, то пропорция (1) и не является числовым равенством (так как деление на нуль невозможно).

Если при этом $\alpha = 0$, то $\beta = 0$ и наши пары 0, α' и 0, β' пропорциональны. Если же $\alpha \neq 0$, то положим $\frac{\beta'}{\alpha'} = k$. Тогда $\beta = k\alpha$ и $\beta' = k\alpha'$ — пары α, α' и β, β' снова пропорциональны.

8. *Пропорция*

$$\alpha : \alpha' = \beta : \beta' \tag{1}$$

эквивалентна (*при* $\alpha' \neq 0$, $\beta' \neq 0$) *пропорции*

$$\alpha : \beta = \alpha' : \beta'. \tag{1'}$$

В самом деле, каждая из пропорций (1), (1') эквивалентна равенству (2).

Замечание. Иногда, по чисто формальным соображениям, допускают замену формулы (1) формулой (1') и в случае $\alpha' = \beta' = 0$, т. е. пишут

$$\alpha : \beta = 0 : 0 \tag{$1'_0$}$$

вместо

$$\alpha : 0 = \beta : 0. \tag{1_0}$$

Но при этом надо помнить, что формула ($1'_0$) является лишь другой записью формулы (1_0) и не имеет никакого отличного от нее содержания.

Если пары α, α' и β, β' пропорциональны, то мы говорим также, что они имеют одно и то же *отношение*. Если при этом $\alpha' \neq 0$ и, значит, $\beta' \neq 0$, то числа $\frac{\alpha}{\alpha'}$ и $\frac{\beta}{\beta'}$ равны между собою, и мы говорим, что *отношение* $\alpha : \alpha' = \beta : \beta'$ равно *числу* $\lambda = \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$. Если же $\alpha' = 0$, то и $\beta' = 0$, и мы говорим, что отношение $\alpha : \alpha' = \beta : \beta'$ *бесконечно*, $\alpha : \alpha' = \beta : \beta' = \infty$. Теперь мы можем сказать, что формула (1) действительно есть равенство, а именно что она выражает равенство отношений двух пропорциональных пар. При этом обе части этого равенства или равны одному и тому же числу λ, или они обе равны ∞.

Мы уже отметили, что все незапрещенные пары вида α, 0 пропорциональны между собою и, следовательно, имеют одно и то же (бесконечное) отношение: при любом $\alpha \neq 0$ можно, например, написать

$$\alpha : 0 = 1 : 0 = \infty,$$

в частности,

$$1 : 0 = -1 : 0,$$

т. е. *существует только одно бесконечное отношение* (никаких $+\infty$ и $-\infty$ для отношений не существует!).

Вернемся теперь к отношению $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}$, в котором точка M делит данный отрезок $\overline{AB}$ прямой. Нам будет удобно задавать его не одним числом λ, а произвольной парой чисел α_1, α_2, выбранных при условии $\lambda = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$, т. е. писать

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Если на прямой дана система координат, в которой $A = (x_1)$, $B = (x_2)$, $M = (x)$, то из формулы (2) § 6 получаем для определения координаты x точки M уравнение

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

т. е.

$$x = \frac{\alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2}{\alpha_1 + \alpha_2}. \tag{3}$$

Эта формула определяет однозначно координату x точки M, делящей отрезок $\overline{AB}$ в заданном отношении $\alpha_1 : \alpha_2$, для любых α_1, α_2, за исключением случая, когда $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, т. е. $\alpha_1 : \alpha_2 = -1$. В частности, при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$ получаем $x = x_1$, т. е. $M = A$; при $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = 0$ получаем $x = x_2$, т. е. $M = B$. Итак, точка B делит отрезок $\overline{AB}$ в отношении, равном ∞.

§ 8. Бесконечно удаленная точка прямой

Остается устранить второе исключение: отсутствие на прямой точки M, для которой отношение $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB}$ равнялось бы -1. Для достижения этой цели мы пополняем прямую одной, как говорят, *несобственной* или *бесконечно удаленной точкой* M_∞. При этом мы считаем, что, пробегая точки прямой в определенном направлении (например, в направлении вектора $\overrightarrow{AB}$, т. е. «слева направо»), мы, придя в бесконечно удаленную точку, можем и дальше продолжать наш путь в том же направлении, т. е. пробегать (все время слева направо) всю левую полупрямую, отсеченную точкой A, и вернуться таким образом в точку A слева.

Другими словами, после пополнения прямой бесконечно удаленной точкой порядок расположения точек на прямой стал таким же, как на окружности,— прямая стала замкнутой линией! Теперь две точки A и B прямой разбивают ее на два куска, на два «отрезка» с одними и теми же концами A и B. Один из них есть отрезок $\overline{AB}$ в обычном смысле слова; он, в частности, содержит свою середину, т. е. точку M, для которой $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ и, следовательно, $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = 1$; второй отрезок содержит бесконечно удаленную

точку M_∞. Мы определяем для нее отношение $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}$, полагая это отношение равным -1.

Теперь соответствие между всеми точками M нашей прямой и всеми отношениями $\overrightarrow{AM}:\overrightarrow{MB}$ стало взаимно однозначным: точке B соответствует при этом отношение ∞, а отношение -1 соответствует бесконечно удаленной точке прямой.

В главах I—XX этой книги понятие бесконечно удаленной точки на прямой не найдет применений и, следовательно, как бы повиснет в воздухе. Лишь в главах XXI—XXIII при переходе к так называемой *проективной плоскости* (и *проективному пространству*) понятие несобственной или бесконечно удаленной точки прямой найдет свое надлежащее место. См., впрочем, § 5 главы пятой.

§ 9. Пропорциональность двух последовательностей, состоящих из n чисел

Так же, как мы определяли пропорциональность двух пар чисел α, α' и β, β', мы можем определить пропорциональность двух троек, двух четверок чисел и т. д.

Вообще, мы скажем, что последовательность, состоящая из n чисел (среди которых имеются отличные от нуля[1]))

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n, \tag{1}$$

пропорциональна последовательности

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n, \tag{2}$$

если существует такое число $k \neq 0$ (*коэффициент пропорциональности*), что

$$\beta_1 = k\alpha_1,\ \beta_2 = k\alpha_2,\ \ldots,\ \beta_n = k\alpha_n.$$

В этом случае мы пишем

$$\alpha_1:\alpha_2:\ \ldots\ :\alpha_n = \beta_1:\beta_2:\ \ldots\ :\beta_n \tag{3}$$

и эту формулу также называем *пропорцией*.

Очевидно, что если при этом какое-нибудь $\alpha_i = 0$, то и соответствующее $\beta_i = 0$.

Замечание. Пропорция (3) часто записывается в виде

$$\alpha_1:\beta_1 = \alpha_2:\beta_2 = \ldots = \alpha_n:\beta_n \tag{4}$$

---

[1]) Последовательность, состоящая из одних нулей, считается «запрещенной».

или даже в виде

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\ldots=\frac{\alpha_n}{\beta_n}. \tag{4'}$$

Например, вместо

$$2:0:3:0\ :\ 0:1=4:0:6:0:0:2$$

пишут

$$\frac{2}{4}=\frac{0}{0}=\frac{3}{6}=\frac{0}{0}=\frac{0}{0}=\frac{1}{2}, \tag{5}$$

причем надо твердо помнить, что *формулы* (4) *и* (4') *являются лишь другой записью формулы* (3) и не имеют никакого отличного от нее смысла[1]). Запись эта основана на том, что те из отношений $\alpha_i:\beta_i$ в формуле (3), которые имеют смысл (т. е. в которых хотя бы один из членов α_i, β_i отличен от нуля), действительно все равны между собою; что же касается равенств вида

$$\alpha_i:\beta_i=\alpha_k:\beta_k,$$

в которых $\alpha_k=\beta_k=0$, то при $\alpha_i\neq 0$, $\beta_i\neq 0$ они (согласно ранее сделанному замечанию) являются лишь другой записью верного утверждения

$$\alpha_i:0=\beta_i:0,$$

тогда как равенства вида $\alpha_i:0=0:0$ или $0:0=0:0$ *вообще не содержат никакого утверждения* (кроме того, что на таких-то местах в последовательностях (1) и (2) стоят нули).

Каждая данная незапрещенная последовательность

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n \tag{1}$$

определяет класс, состоящий из всех последовательностей, пропорциональных данной. Таким образом, совокупность всех незапрещенных последовательностей вида (1), состоящих из одного и того же числа n элементов, распадается на *классы* пропорциональных между собою последовательностей[2]): любые две последовательности, при-

---

[1]) В частности, формула (5) означает лишь, что последовательность

$$2,\ 0,\ 3,\ 0,\ 0,\ 1 \tag{5'}$$

пропорциональна последовательности

$$4,\ 0,\ 6,\ 0,\ 0,\ 2, \tag{5''}$$

т. е. последняя получается из первой почленным умножением на один и тот же множитель $k\neq 0$ (в нашем случае на $k=2$).

[2]) См. Прибавление в конце книги, § 4. Читатель поступит правильно, если уже сейчас усвоит содержание этого Прибавления. В дальнейшем это будет предполагаться без всяких оговорок.

надлежащие одному и тому же классу, пропорциональны между собою; если последовательность принадлежит данному классу, то и всякая пропорциональная ей последовательность принадлежит тому же классу, так что две последовательности, принадлежащие разным классам, не пропорциональны между собою. Иногда класс, к которому принадлежит данная последовательность (1), называется *отношением* (членов этой последовательности) или *отношением, определяемым данной последовательностью*. При этом словоупотреблении пропорция (3), как и при $n=2$, превращается в равенство двух отношений.

ГЛАВА II

ВЕКТОРЫ

§ 1. Равенство векторов. Свободный вектор

Два вектора $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{BB'}$, расположенные где угодно в пространстве, называются *равными* между собою, если один из них, например $\overrightarrow{AA'}$, можно совместить с другим, $\overrightarrow{BB'}$, посредством *параллельного переноса* («сдвига»), т. е. движения, состоящего в том, что вектор $\overrightarrow{AA'}$ скользит параллельно самому себе так, что точка A скользит по отрезку $\overline{AB}$, а точка A' — по отрезку $\overline{A'B'}$ (рис. 4).

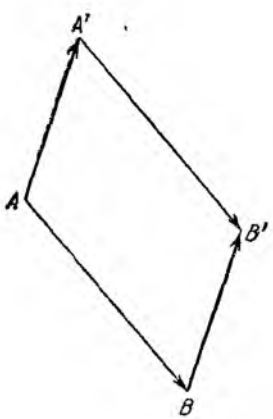


Рис. 4.

Если векторы $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{BB'}$ лежат на одной прямой, то по этой же прямой происходит и скольжение, совмещающее $\overrightarrow{AA'}$ с $\overrightarrow{BB'}$, и мы получаем уже данное в первой главе определение равных векторов (на прямой).

Если же равные векторы $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{BB'}$ не лежат на одной прямой, то при совмещении вектора $\overrightarrow{AA'}$ с вектором $\overrightarrow{BB'}$ посредством параллельного переноса вектор $\overrightarrow{AA'}$ зачертит параллелограмм $AA'B'B$, в котором векторы $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{BB'}$ будут противоположными сторонами.

Поэтому *определение равенства* векторов может быть сформулировано и так:

Два вектора $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{BB'}$, *лежащие на одной и той же прямой, равны, если их отношение равно* 1.

Два вектора $\overrightarrow{AA'}$ *и* $\overrightarrow{BB'}$, *не лежащие на одной прямой, равны, если, соединяя прямолинейными отрезками их начальные точки* A *и* B

и их концевые точки A' и B', мы получим параллелограмм $AA'B'B$, в котором эти векторы будут двумя противоположными сторонами.

Два равных вектора могут отличаться друг от друга только своими точками приложения, и в большинстве тех случаев, с которыми нам придется иметь дело, это отличие несущественно; мы будем поэтому считать, что вектор $\overrightarrow{BB'}$, равный вектору $\overrightarrow{AA'}$, — это тот же вектор $\overrightarrow{AA'}$, но только перенесенный в другое место, а именно приложенный к точке B. Отвлекаясь, таким образом, от точки приложения вектора, мы приходим к тому, чтобы весь класс равных между собою векторов $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$, приложенных ко всевозможным точкам M пространства, рассматривать как новый математический объект, и этот объект мы называем *свободным вектором,* определенным каждым из равных между собою векторов, составляющих данный класс (рис. 5).

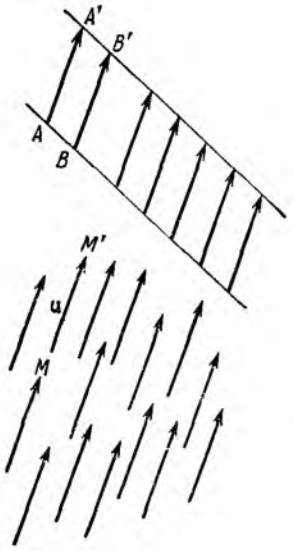


Рис. 5.

Мы будем часто писать $\mathbf{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \ldots$ и понимать под $\mathbf{u}$ как любой из равных между собою векторов $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ и т. д., так и весь образованный ими класс, т. е. свободный вектор [1]).

Предположим теперь, что каждая точка M пространства сдвинулась вдоль приложенного к ней вектора $MM' = \mathbf{u}$ (одного и того же для всех точек M) и переместилась в точку M'. Мы получаем сдвиг, или параллельный перенос, всего пространства (в себе) на вектор $\mathbf{u}$.

Таким образом, возникает *взаимно однозначное соответствие между сдвигами пространства и свободными векторами, позволяющее отождествить между собою эти два понятия.*

Множество всех векторов, лежащих на данной прямой (или на данной плоскости), естественно, тоже распадается на классы равных между собою векторов, называемых *свободными векторами данной прямой* или *плоскости;* они могут быть отождествлены со сдвигами этой прямой (или плоскости) по себе самой.

Нулевой вектор определяет *нулевой* (или «тождественный») *сдвиг,* состоящий в том, что все точки пространства остаются неподвижными на своих местах.

[1]) Если $\mathfrak{M}$ — какое-нибудь множество, а x — элемент множества $\mathfrak{M}$, то пишут $x \in \mathfrak{M}$; поэтому следовало бы писать $\overrightarrow{AA'} \in \mathbf{u}$, $\overrightarrow{BB'} \in \mathbf{u}$ и т. д.

§ 2. Линейные операции над векторами (сложение и умножение на число)

1. Сложение векторов. Пусть даны свободные векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$. Прилагаем вектор $\mathbf{u}_1$ к какой-нибудь точке O, получаем $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{OA}$; прилагаем $\mathbf{u}_2$ к точке A; получаем $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{AB}$. По определению вектор $\overrightarrow{OB} = \mathbf{u}_3$ называется *суммой* векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ (рис. 6), т. е.

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}. \tag{1}$$

Для векторов, лежащих на прямой, эти определения нам уже известны (гл. I, § 4).

Замечание 1. Единственный элемент произвола, содержащийся в этом определении, есть выбор точки O — точки приложения вектора $\mathbf{u}_1$. Прилагая вектор $\mathbf{u}_1$ к какой-нибудь другой точке O' (рис. 7), получим вектор $\overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{OA} = \mathbf{u}_1$; построим вектор $\overrightarrow{A'B'} = \mathbf{u}_2$; вектор $\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{A'B'}$, очевидно, равен вектору $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$: он получается из $\overrightarrow{OB}$ сдвигом на вектор $\overrightarrow{OO'}$.

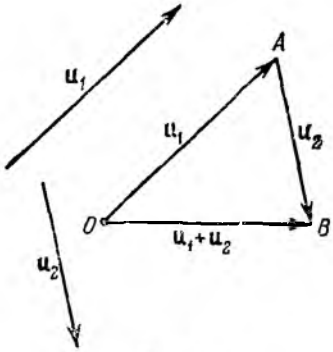


Рис. 6.

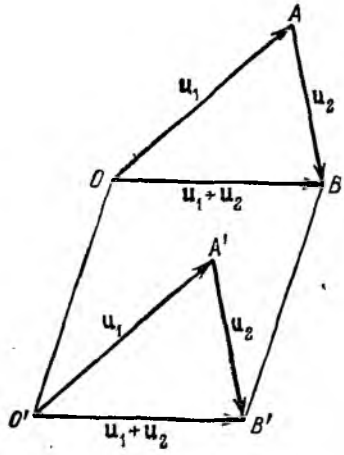


Рис. 7.

Если дан вектор $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$, то на прямой $d = OA$, проходящей через точки O и A, можно построить вектор $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$ (рис. 8).

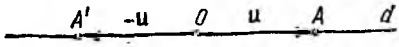


Рис. 8.

Всякий вектор, равный вектору $\overrightarrow{OA'}$, также обозначаем через $-\mathbf{u}$. Очевидно, $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ для любого вектора $\mathbf{u}$. Если рассматривать свободные векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ как сдвиги пространства, то нулевой

вектор $\mathbf{0}$ есть тождественное преобразование (нулевой сдвиг) пространства, а свободный вектор $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ есть сдвиг, получаемый в результате последовательного осуществления сначала сдвига $\mathbf{u}_1$ и потом сдвига $\mathbf{u}_2$.

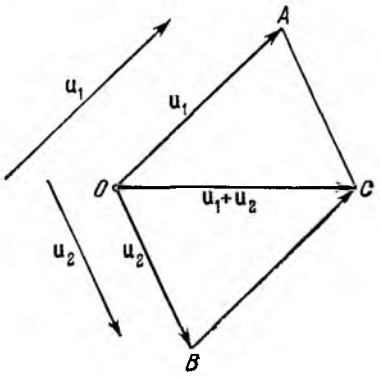


Рис. 9.

Свободный вектор $-\mathbf{u}$ при любом $\mathbf{u}$ есть сдвиг, противоположный сдвигу $\mathbf{u}$ (так что $\mathbf{u} + (-\mathbf{u})$ есть нулевой сдвиг $\mathbf{0}$).

Замечание 2. Следующие формулы, очевидно, верны для любого вектора $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u},$$
$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Замечание 3. Как ясно из рис. 9, при $\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{u}_2 \neq -\mathbf{u}_1$ предыдущее определение суммы двух векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ можно сформулировать и так: приложим оба вектора $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ к одной и той же точке O, так что

$$\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{OA},$$
$$\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{OB}.$$

Тогда $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ *есть вектор* $\overrightarrow{OC}$ *— диагональ параллелограмма, построенного на сторонах* $\mathbf{u}_1$ *и* $\mathbf{u}_2$.

Так как этот параллелограмм и его диагональ $\overrightarrow{OC}$ не зависят от того, в каком порядке даны векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$, то *сложение векторов коммутативно*:

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1.$$

Докажем, что *сложение векторов ассоциативно*, т. е. что для любых трех векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ имеем

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3).$$

В самом деле, если $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{OA}_1$, $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\mathbf{u}_3 = \overrightarrow{A_2A_3}$ (рис. 10), то

$$\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_1A_3}, \qquad \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{OA}_3,$$
$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA}_2, \qquad (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \mathbf{u}_3 = \overrightarrow{OA}_2 + \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{OA}_3,$$

т. е. и $\mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3)$, и $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \mathbf{u}_3$ есть вектор $\overrightarrow{OA}_3$, так

называемый *замыкающий вектор* последовательности трех векторов $\overrightarrow{OA_1} = \mathbf{u}_1, \overrightarrow{A_1A_2} = \mathbf{u}_2, \overrightarrow{A_2A_3} = \mathbf{u}_3$.

Ассоциативность сложения векторов позволяет говорить о сумме трех векторов $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, понимая под этим вектор

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \mathbf{u}_3.$$

По индукции может быть определена и сумма любого числа векторов

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_n,$$

причем из ассоциативности следует, что, например, в случае четырех векторов имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 &= \\ &= \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4) = \\ &= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4) = \\ &= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) + \mathbf{u}_4.\end{aligned}$$

При этом в силу коммутативности можно произвольно менять порядок слагаемых.

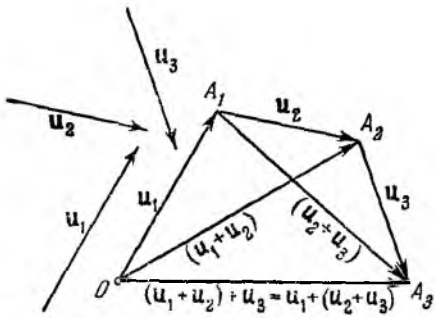


Рис. 10.

Из сказанного вытекает следующее удобное на практике правило сложения любого числа векторов («*правило замыкающего вектора*»).

Для того чтобы сложить данные n векторов, надо записать их в любом порядке:

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n,$$

приложить первый вектор к какой-нибудь точке O, а каждый следующий вектор — к концу предыдущего, так что

$$\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{OA_1}, \quad \mathbf{u}_2 = \overrightarrow{A_1A_2}, \quad \ldots, \quad \mathbf{u}_n = \overrightarrow{A_{n-1}A_n} \qquad \text{(рис. 11)}.$$

Тогда сумма $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_n$ есть замыкающий вектор $\overrightarrow{OA_n}$.

Разность $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ двух векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ определяется формулой

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + (-\mathbf{u}_2) \qquad \text{(рис. 12)}. \qquad (2)$$

При этом $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1$ — уменьшаемое $\mathbf{u}_1$ равно сумме вычитаемого $\mathbf{u}_2$ и разности $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$.

Замечание 4. Мы видели, что диагональ $\overrightarrow{OC}$ (см. рис. 9) параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{OB}$, равна сумме этих векторов.

Аналогично (рис. 13) диагональ OC' параллелепипеда $OACBO'A'C'B'$, построенного на трех векторах $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{u}_3 = \overrightarrow{OO'}$, приложенных к одной точке и не лежащих в одной плоскости,

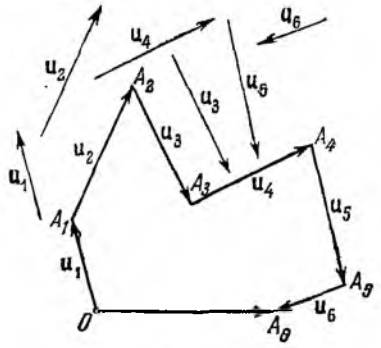


Рис. 11.

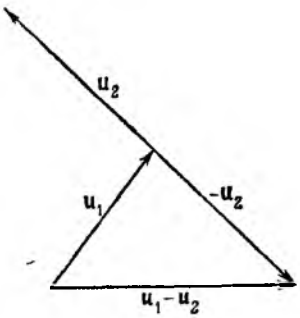


Рис. 12.

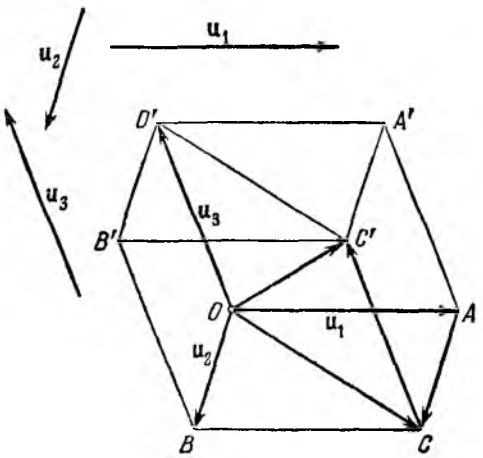


Рис. 13.

есть сумма этих векторов. В самом деле, очевидно, $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, откуда и следует утверждение (оно следует и из того, что вектор $\overrightarrow{OC'}$ есть замыкающий вектор к трем векторам $\overrightarrow{OA} = \mathbf{u}_1$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} = \mathbf{u}_2$, $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{OO'} = \mathbf{u}_3$).

2. Умножение вектора на число. Умножение вектора $\mathbf{u}$ на число λ состоит в следующем.

В § 2 главы I уже было определено, что если $\mathbf{u}=\overrightarrow{AB}$, то $\lambda\mathbf{u}$ есть всякий вектор, равный вектору $\overrightarrow{AC}$, лежащему на прямой AB, и определенный условием, что его отношение к вектору $\overrightarrow{AB}$ равно λ (рис. 14); если $\lambda=0$, то $\lambda\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

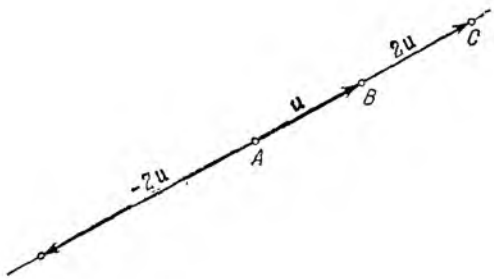


Рис. 14.

Из этого определения следует, в частности, что для любого вектора $\mathbf{u}$ имеем

$$0\cdot\mathbf{u}=\mathbf{0}, \quad 1\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}, \quad (-1)\cdot\mathbf{u}=-\mathbf{u}. \tag{3}$$

Для любых двух чисел λ_1 и λ_2 и любого вектора $\mathbf{u}$ имеют место формулы:

$$(\lambda_1+\lambda_2)\,\mathbf{u}=\lambda_1\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{u}, \tag{4}$$

$$(\lambda_1\lambda_2)\,\mathbf{u}=\lambda_1(\lambda_2\mathbf{u}). \tag{5}$$

Наконец, для любых двух векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ и любого числа λ имеем

$$\lambda(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=\lambda\mathbf{u}_1+\lambda\mathbf{u}_2. \tag{6}$$

Геометрическое доказательство всех этих формул может быть представлено читателю в виде упражнения (более канительного — разбор всех возможных случаев, — чем трудного).

Выражение

$$\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{u}_n, \tag{7}$$

где $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ — векторы, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — какие-нибудь вещественные числа, называется *линейной комбинацией векторов* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. При $n=1$ получаем просто вектор вида $\lambda_1\mathbf{u}_1$.

§ 3. Проекции

Пусть на плоскости дана прямая d и прямая d', не параллельная прямой d.

Через произвольную точку A плоскости проводим прямую d'_A, параллельную прямой d' (рис. 15); она пересекает прямую d в точке A_d, называемой *проекцией точки A на прямую d вдоль* (или параллельно) *прямой d'*.

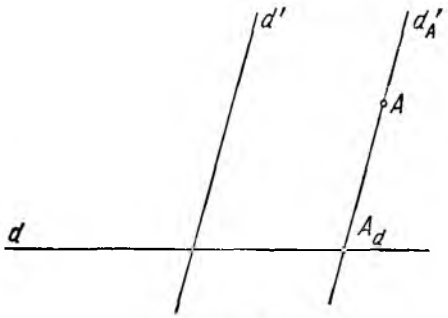


Рис. 15.

Если в пространстве даны прямая d и плоскость δ', не параллельные между собою, то для каждой точки A определены:

1) *проекция A_d на прямую d вдоль плоскости* δ' — это точка пересечения прямой d с плоскостью δ'_A, проведенной через точку A параллельно плоскости δ' (рис. 16);

2) *проекция $A_{\delta'}$ на плоскость* δ' *вдоль прямой* d — это точка пересечения плоскости δ' с прямой d_A, проведенной через точку A параллельно прямой d (рис. 17).

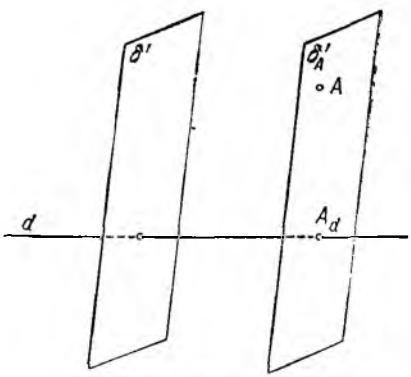


Рис. 16.

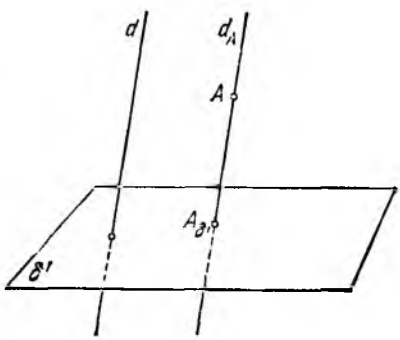


Рис. 17.

Замечание. Если $d' \perp d$ или $\delta' \perp d$, то получаем *ортогональные* (*прямоугольные*) *проекции*, известные читателю из курса средней школы.

Если дан вектор $\overrightarrow{AB}$, то, беря проекции A_d и B_d его начала и конца, получим вектор $\overrightarrow{A_dB_d}$, называемый *проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на*

прямую d (вдоль прямой *d'* (рис. 18), соответственно вдоль плоскости δ' (рис. 19)).

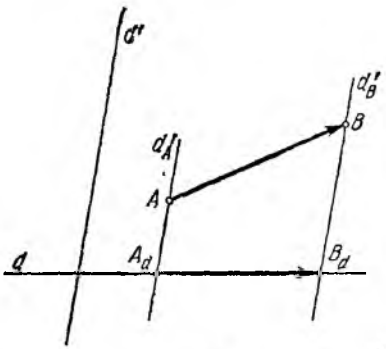


Рис. 18.

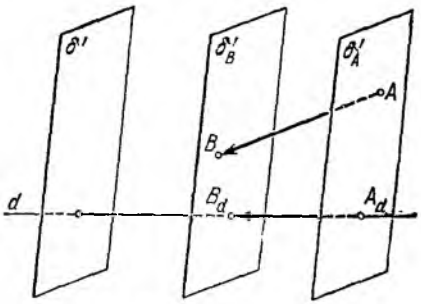


Рис. 19.

Аналогично вектор $\overrightarrow{A_{\delta'}B_{\delta'}}$ есть *проекция вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на плоскость* δ' (вдоль прямой *d*) (рис. 20).

Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую *d* (на плоскость δ') обозначается через $\text{пр}_d\overrightarrow{AB}$ ($\text{пр}_{\delta'}\overrightarrow{AB}$), а иногда (когда невозможны недоразумения) и просто через $\text{пр}\overrightarrow{AB}$.

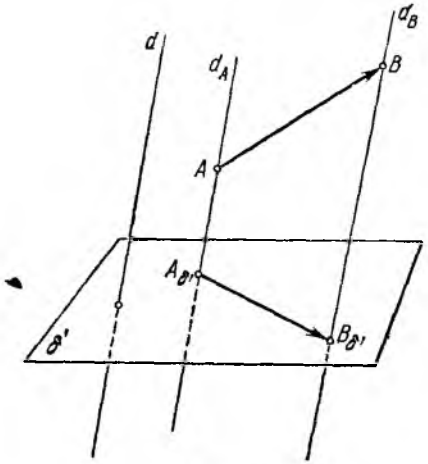


Рис. 20.

Перечислим простейшие свойства проекций.

1. *Проекция вектора AB равна нулю* (т. е. является нулевым вектором) *тогда и только тогда, когда данный вектор параллелен той прямой или плоскости, вдоль которой происходит проектирование* (рис. 21).

В самом деле, в этом и только в этом случае начало и конец вектора проектируются в одну точку.

2. *Проекции любого вектора на две параллельные прямые* (*плоскости*) *равны между собою* (рис. 22).

Основным фактом является:

3. *Проекции двух равных векторов равны.*

Доказательство. Ограничиваемся случаем проекции на прямую *d* вдоль прямой *d'* (на плоскости (рис. 23, *а*)) или вдоль плоскости δ' (в пространстве (рис. 23, *б*)).

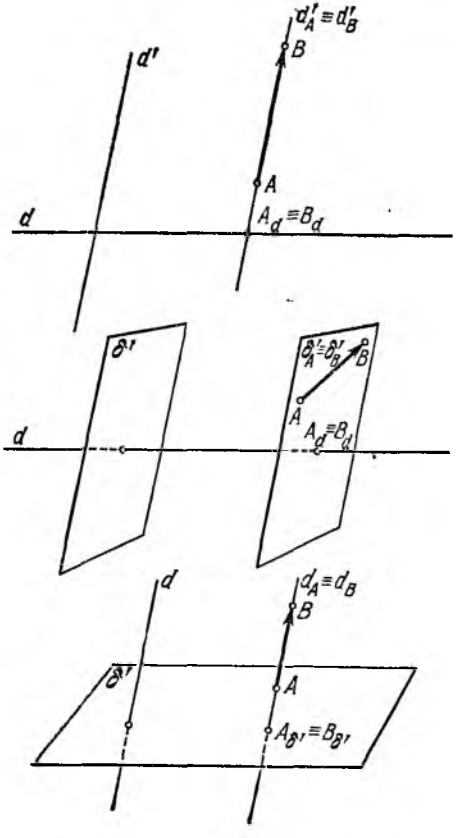

$d'_A \equiv d'_B$
d'
B
A
d
$A_d \equiv B_d$
δ'
$d'_A \equiv d'_B$
B
A
d
$A_d \equiv B_d$
d
$d_A \equiv d_B$
B
δ'
A
$A_{\delta'} \equiv B_{\delta'}$

Рис. 21.

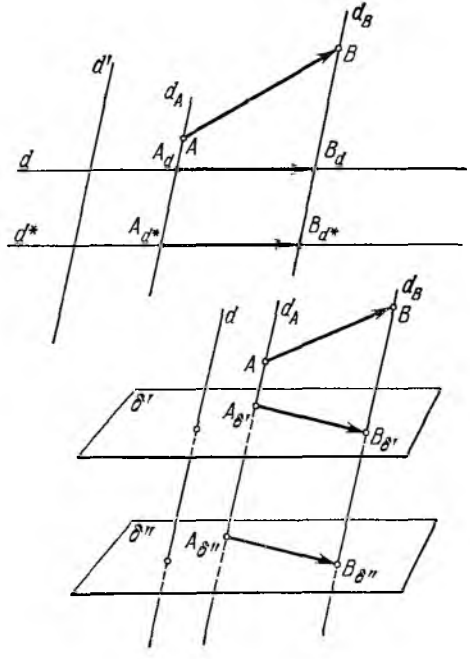

d_B
B
d'
d_A
A_d
A
B_d
d
d^*
A_{d^*}
B_{d^*}
d_B
d
d_A
B
A
δ'
$A_{\delta'}$
$B_{\delta'}$
δ''
$A_{\delta''}$
$B_{\delta''}$

Рис. 22.

Пусть $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$; надо доказать, что $\overrightarrow{A_dA'_d}=\overrightarrow{B_dB'_d}$. Сдвиг всей плоскости (пространства) на вектор $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ переводит прямую d в некоторую прямую d^*, прямые d'_A, $d'_{A'}$ (плоскости δ'_A, $\delta'_{A'}$) — соответственно в d'_B, $d'_{B'}$ (δ'_B, $\delta'_{B'}$), точки пересечения A_d, A'_d прямой

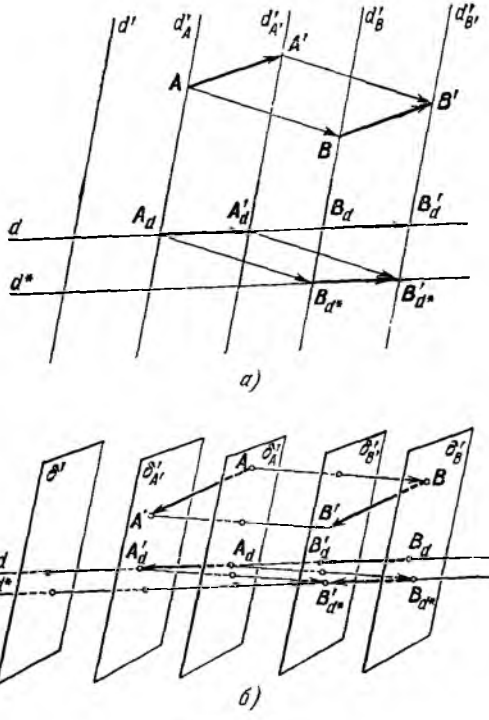


Рис. 23.

d с $d'_A(\delta'_A)$, соответственно с $d'_{A'}$ ($\delta'_{A'}$) — в точки пересечения B_{d^*}, B'_{d^*} прямой d^* соответственно с $d'_B(\delta'_B)$, $d'_{B'}$ ($\delta'_{B'}$), так что

$$\overrightarrow{A_dA'_d}=\overrightarrow{B_{d^*}B'_{d^*}}, \tag{1}$$

т. е.

$$\text{пр}_d\overrightarrow{AA'}=\text{пр}_{d^*}\overrightarrow{BB'}. \tag{2}$$

Но d параллельна d^*, поэтому $\text{пр}_{d^*}\overrightarrow{BB'}=\text{пр}_d\overrightarrow{BB'}$, так что

$$\text{пр}_d\overrightarrow{AA'}=\text{пр}_d\overrightarrow{BB'}, \tag{3}$$

что и требовалось доказать.

Пусть даны векторы $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{AA'}$ и их замыкающий вектор $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA'} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$. Тогда при проектировании на прямую d (вдоль какой-нибудь прямой d' или плоскости δ') или на плоскость δ' (вдоль прямой d) (рис. 24)

$$\text{пр}_d \mathbf{u}_1 = \overrightarrow{O_d A_d}, \quad \text{пр}_d \mathbf{u}_2 = \overrightarrow{A_d A'_d}, \quad \text{пр}_d \mathbf{u} = \overrightarrow{O_d A'_d},$$

т. е.

$$\text{пр}_d(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \text{пр}_d \mathbf{u}_1 + \text{пр}_d \mathbf{u}_2. \tag{4}$$

Вообще *проекция замыкающего вектора данных n векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ есть замыкающий вектор проекций данных векторов*, или:

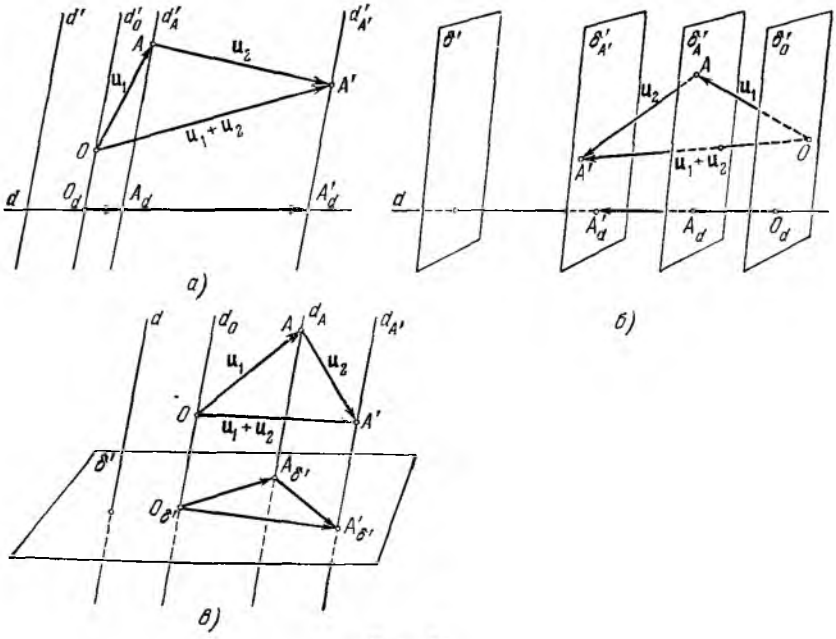


Рис. 24.

4. *Проекция суммы двух (или более) **векторов есть сумма проекций этих** векторов.*

Без труда доказывается формула

$$\text{пр}\,(\lambda \mathbf{u}) = \lambda\, \text{пр}\, \mathbf{u} \tag{5}$$

(надо рассмотреть отдельно случаи $\lambda > 0$, $\lambda < 0$, $\lambda = 0$).

Из (4) и (5) вытекает:

$$\text{пр}\,(\lambda_1\mathbf{u}_1+\ldots+\lambda_n\mathbf{u}_n)=\lambda_1\,\text{пр}\,\mathbf{u}_1+\ldots+\lambda_n\,\text{пр}\,\mathbf{u}_n. \qquad (6)$$

Полученные результаты кратко объединяются в следующем предложении:

Линейные операции над векторами (т. е. сложение векторов и их умножение на число) *переместительны с операцией проектирования.*

§ 4. Коллинеарные и компланарные векторы; координаты вектора относительного данного базиса

Несколько векторов называются *коллинеарными* (соответственно *компланарными*) между собою, если все они, будучи приложенными к одной и той же точке, оказываются лежащими на одной прямой d (рис. 25) (соответственно в одной плоскости π (рис. 26)). В этом случае говорят также, что рассматриваемые векторы коллинеарны прямой d (компланарны плоскости π).

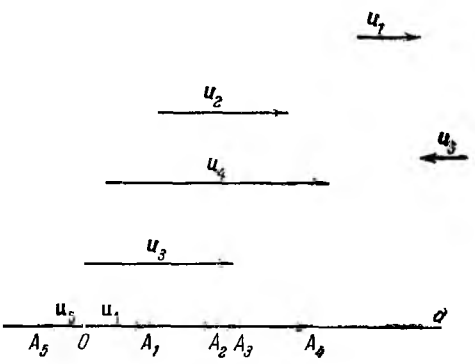


Рис. 25.

Следующие утверждения являются непосредственными следствиями этого определения:

1. *Нулевой вектор коллинеарен всякому вектору.*

2. *Если несколько векторов коллинеарны между собою, то они и подавно между собою компланарны.*

3. *Каждый вектор коллинеарен самому себе.*

4. *Всякие два вектора между собою компланарны* [1]).

Векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, ..., $\overrightarrow{A_rB_r}$ коллинеарны (компланарны) тогда и только тогда, когда несущие их прямые параллельны (в широком смысле [2])) одной и той же прямой (одной и той же плоскости).

---

[1]) Чтобы убедиться в этом, достаточно приложить их к одной и той же точке O.

[2]) Две прямые (две плоскости) называются *параллельными между собою в широком смысле*, если они или параллельны в обычном смысле, или совпадают. *Прямая и плоскость параллельны в широком смысле*, если они или параллельны в обычном смысле или если данная прямая целиком лежит в данной плоскости.

Пусть $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ — два коллинеарных вектора. Прилагая их к одной какой-нибудь точке O, получаем векторы $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{OA_1}$ и $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, лежащие на одной прямой. Пусть по крайней мере один из данных векторов, например $\mathbf{u}_1$, отличен от нуля. Тогда, как мы знаем из первой главы, определено вещественное число $\lambda = \mathbf{u}_2 : \mathbf{u}_1$, называемое *отношением вектора* $\mathbf{u}_2$ *к вектору* $\mathbf{u}_1$; модуль этого числа равен отношению отрезка $\overline{OA_2}$ к отрезку $\overline{OA_1}$:

$$|\lambda| = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}},$$

а знак берется положительный, если векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ направлены в одну и ту же сторону, и отрицательный, если они направлены в противоположные стороны; если $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, то $\lambda = 0$.

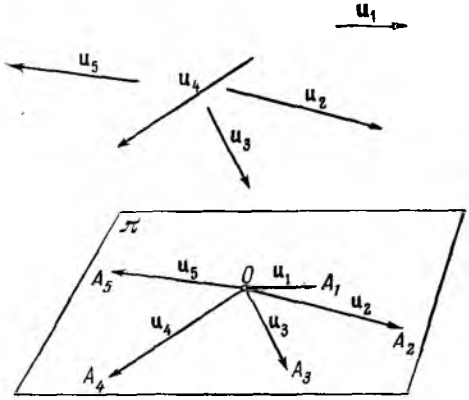


Рис. 26.

Если $\mathbf{u}_2 : \mathbf{u}_1 = \lambda$, то по самому определению умножения вектора на число имеем $\mathbf{u}_2 = \lambda \mathbf{u}_1$.

Обратно, из того же определения следует, что всякий вектор вида $\mathbf{u}_2 = \lambda \mathbf{u}_1$, где λ — какое-нибудь вещественное число, коллинеарен вектору $\mathbf{u}_1$. Мы доказали следующую теорему:

5. *Пусть* $\mathbf{u}_1$ *— какой-нибудь ненулевой вектор. Тогда все векторы вида* $\lambda \mathbf{u}_1$, *где* λ *— любое вещественное число, и только векторы этого вида коллинеарны вектору* $\mathbf{u}_1$.

Подчеркнем особо: *отношение* $\mathbf{u}_2 : \mathbf{u}_1$ *между двумя векторами определено тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны и когда по крайней мере один из них отличен от нуля. Если отношение* $\mathbf{u}_2 : \mathbf{u}_1$ *равно числу* λ, *то это значит, что* $\mathbf{u}_2 = \lambda \mathbf{u}_1$.

Прежде чем идти дальше, докажем следующие две теоремы:

6. *Пусть на плоскости даны две прямые* d_1 *и* d_2, *пересекающиеся в некоторой точке* O. *Тогда любой вектор* $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ *есть сумма своих проекций* $\mathbf{u}_1$ *и* $\mathbf{u}_2$ *на эти прямые (проекции берутся на каждую из двух прямых вдоль другой прямой).*

Доказательство. Утверждение очевидно, если вектор $\mathbf{u}$ лежит на одной из наших прямых, например на d_1; тогда $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$.

Пусть вектор $\mathbf{u}$ не лежит ни на одной из двух данных прямых. Пусть $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ суть проекции вектора $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ на каждую из наших

прямых вдоль другой прямой (рис. 27); тогда $\overrightarrow{OA}$ есть диагональ параллелограмма, построенного на $\overrightarrow{OA_1} = \mathbf{u}_1$ и $\overrightarrow{OA_2} = \mathbf{u}_2$, и $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

Замечание 1. Если вектор $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ является суммой двух векторов $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{OA_1}$ и $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, лежащих на прямых d_1 и d_2, то слагаемые $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ непременно являются проекциями вектора $\mathbf{u}$ на прямые d_1 и d_2 и, следовательно, определены однозначно.

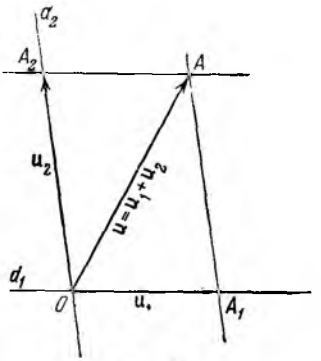


Рис. 27.

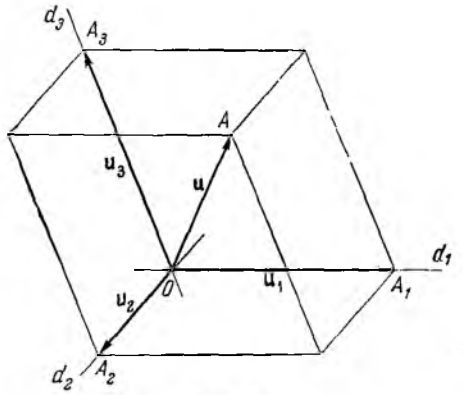


Рис. 28.

В самом деле, если $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'_1} + \overrightarrow{OA'_2}$, то, по определению сложения векторов, $\overrightarrow{OA}$ есть диагональ параллелограмма, построенного на $\overrightarrow{OA'_1}$ и $\overrightarrow{OA'_2}$; но тогда $\overrightarrow{OA'_1}$ и $\overrightarrow{OA'_2}$ суть проекции вектора $\overrightarrow{OA'}$ на каждую из прямых d_1, d_2 (вдоль второй прямой), что и требовалось.

Совершенно аналогично доказывается предложение

7. Пусть через точку O пространства проходят три прямые, не лежащие в одной плоскости. Тогда любой вектор $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ есть сумма своих проекций $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ на эти прямые, причем проекции берутся на каждую прямую вдоль плоскости, несущей две другие прямые.

Можно ограничиться случаем, когда вектор $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ не лежит ни в одной из плоскостей, несущих две какие-нибудь из наших трех прямых. Тогда проекции вектора $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ на каждую прямую (вдоль плоскости, несущей две другие прямые) образуют три ребра $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ параллелепипеда с диагональю $\overrightarrow{OA}$ (рис. 28) и

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}.$$

Замечание 2. Пусть вектор $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ каким-нибудь образом представлен как сумма трех векторов $\mathbf{u}'_1 = \overrightarrow{OA'_1}$, $\mathbf{u}'_2 = \overrightarrow{OA'_2}$, $\mathbf{u}'_3 = \overrightarrow{OA'_3}$,

лежащих соответственно на прямых d_1, d_2, d_3. Тогда векторы $\mathbf{u}_1'$, $\mathbf{u}_2'$, $\mathbf{u}_3'$ непременно суть проекции вектора $\mathbf{u}$ на прямые d_1, d_2, d_3.

В самом деле, из равенства $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}_1' + \overrightarrow{OA}_2' + \overrightarrow{OA}_3'$ следует, что $\overrightarrow{OA}$ есть диагональ параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}_1'$, $\overrightarrow{OA}_2'$, $\overrightarrow{OA}_3'$; но тогда эти векторы суть проекции вектора $\overrightarrow{OA}$ на прямые d_1, d_2, d_3.

Из доказанного будет сейчас выведена следующая

8. Основная теорема. *Пусть в плоскости даны два неколлинеарных вектора* $\mathbf{e}_1$ *и* $\mathbf{e}_2$. *Тогда каждый вектор* $\mathbf{u}$ *есть линейная комбинация*

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \qquad (1_2)$$

векторов $\mathbf{e}_1$ *и* $\mathbf{e}_2$ *и коэффициенты* x_1 *и* x_2 *определены однозначно, как алгебраические значения проекций вектора* $\mathbf{u}$ *на оси, несущие соответственно единичные векторы* $\mathbf{e}_1$ *и* $\mathbf{e}_2$ (*проекция на каждую ось берется вдоль другой оси*).

Пусть в пространстве даны три некомпланарных вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. *Тогда каждый вектор* $\mathbf{u}$ *есть линейная комбинация*

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \qquad (1_3)$$

векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, *в которой коэффициенты* x_1, x_2, x_3 *определены однозначно, как алгебраические значения проекций вектора* $\mathbf{u}$ *на оси, определенные единичными векторами* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (*проекция на каждую ось берется вдоль плоскости, определенной двумя другими осями*).

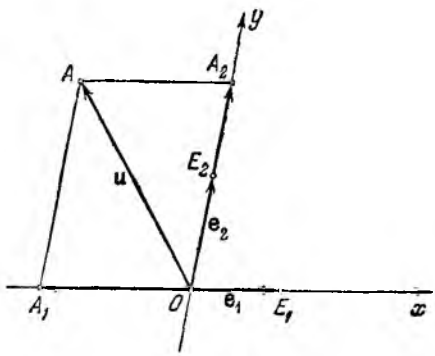


Рис. 29.

Доказательство совершенно одинаково в обоих случаях — плоскости и пространства. Ограничиваемся случаем плоскости. Приложим векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ к какой-нибудь точке O (рис. 29); получим $\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2$. Тогда вектор $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ есть сумма своих проекций $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{OA_1}$ и $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{OA_2}$ на прямые, несущие векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, причем векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ однозначно определены условием $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ и требованием коллинеарности векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ векторам $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$.

Из этого последнего требования вытекает, что $\mathbf{u}_1 = x_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{u}_2 = x_2\mathbf{e}_2$, где x_1 и x_2 определены однозначно, как алгебраические значения векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ на соответствующих осях (несущих соответственно векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$).

Итогом только что сказанного является следующее

Основное определение. *Любая пара неколлинеарных векторов* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ *на плоскости и любая тройка некомпланарных векторов* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *в пространстве, данных в определенном порядке*[1]*, называется базисом множества* (*или многообразия*) *всех векторов, лежащих соответственно в плоскости или в пространстве; сами векторы* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *называются базисными или единичными векторами. Однозначно определенные коэффициенты* x_1, x_2 (*соответственно* x_1, x_2, x_3) *в представлениях*

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2, \tag{1$_2$}$$

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \tag{1$_3$}$$

называются координатами вектора $\mathbf{u}$ *относительно данного базиса* (x_1 — *первая*, x_2 — *вторая*, x_3 — *третья координата*).

Каждая координата вектора $\mathbf{u}$ есть алгебраическое значение проекции вектора $\mathbf{u}$ на ось, несущую соответствующий базисный вектор.

Равенства (1$_2$) и (1$_3$) записываются часто в виде

$$\mathbf{u} = \{x_1,\ x_2\} \tag{1$'_2$}$$

и

$$\mathbf{u} = \{x_1,\ x_2,\ x_3\}. \tag{1$'_3$}$$

Сделаем два важных замечания.

Замечание 3. Мы знаем, что проекции равных векторов равны, поэтому равные векторы имеют (относительно данного базиса) соответственно равные координаты. Обратно, если даны координаты x_1, x_2 (соответственно x_1, x_2, x_3) вектора, то дан и вектор $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ (соответственно $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$) как свободный вектор. Другими словами, представления (1$_2$), (1$_3$) касаются свободных векторов, они не зависят от точек приложения векторов.

Замечание 4. Мы знаем, что при умножении вектора на какое-либо число λ на это же λ умножается и проекция вектора (на любую ось); мы знаем также, что проекция суммы двух векторов равна сумме проекций этих векторов. Отсюда и из определения координат вектора следует:

При умножении вектора на данное число λ *на это же число* λ *умножаются и координаты вектора. Каждая координата суммы двух векторов есть сумма соответствующих координат слагаемых векторов.*

Если $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2$, то

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1)\,\mathbf{e}_1 + (x_2 + y_2)\,\mathbf{e}_2,$$
$$\lambda\mathbf{u} = (\lambda x_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda x_2)\mathbf{e}_2.$$

---

[1]) Например, в том, в каком они написаны, так что $\mathbf{e}_1$ есть первый, $\mathbf{e}_2$ — второй, $\mathbf{e}_3$ — третий вектор.

§ 5. Линейная зависимость и независимость векторов

Эти алгебраические понятия принадлежат к важнейшим в математике; мы их изложим со всей тщательностью.

Линейная комбинация

$$\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{u}_n$$

векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ называется *нетривиальной*[1]), если в ней хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ отличен от нуля.

Линейная комбинация вида

$$0\cdot\mathbf{u}_1+0\cdot\mathbf{u}_2+\ldots+0\cdot\mathbf{u}_n$$

называется *тривиальной*; она, очевидно, равна нулевому вектору[2]).

Определение. *Система векторов* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ *называется линейно зависимой*[3]), *если существует хотя бы одна нетривиальная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору. В противном случае, т. е. если только тривиальная линейная комбинация данных векторов равна нулю, векторы называются линейно независимыми.*

Докажем несколько простых, но важных предложений о линейной зависимости; они имеют чисто алгебраический характер и постоянно применяются.

1. *Если среди векторов* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *есть хотя бы один нулевой вектор, то вся система векторов линейно зависима.*

В самом деле, если, например, $\mathbf{u}_1=\mathbf{0}$, то, положив $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$, получим нетривиальную линейную комбинацию

$$1\cdot\mathbf{u}_1+0\cdot\mathbf{u}_2+\ldots+0\cdot\mathbf{u}_n=\mathbf{0},$$

равную нулю.

2. *Если среди векторов* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *некоторые образуют линейно зависимую систему, то и вся система* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *линейно зависима*[4]).

В самом деле, пусть векторы $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p$, $p\leqslant n$, линейно зависимы. Значит, существует нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1\mathbf{u}_1+\ldots+\lambda_p\mathbf{u}_p$, равная нулевому вектору $\mathbf{0}$. Но тогда, полагая $\lambda_{p+1}=0, \ldots, \lambda_n=0$, получим также нетривиальную линейную

---

[1]) Это непривлекательное слово, к сожалению, укоренилось в математике, и заменить его другим представляется безнадежным.

[2]) Мы будем кратко говорить: равна нулю, понимая при этом под «нулем» нулевой вектор.

[3]) Или «векторы $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ называются линейно зависимыми».

[4]) Система $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ может состоять из любого числа $n=1, 2, 3, \ldots$ векторов; в частности, система, состоящая из одного вектора $\mathbf{u}$, зависима тогда и только тогда, когда этот вектор $\mathbf{u}=\mathbf{0}$, поэтому предложение 1 есть частный случай предложения 2.

комбинацию

$$\lambda_1\mathbf{u}_1+\ldots+\lambda_p\mathbf{u}_p+0\cdot\mathbf{u}_{p+1}+\ldots+0\cdot\mathbf{u}_n,$$

равную нулевому вектору.

Непосредственным логическим следствием предложения 2 является

2′. *Если система векторов* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *линейно независима, то и всякая ее подсистема линейно независима.*

3. *Если система* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *линейно зависима, то по крайней мере один из векторов* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *равен линейной комбинации остальных.*

В самом деле, пусть

$$\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\ldots+\lambda_n\mathbf{u}_n=\mathbf{0}, \tag{1}$$

где по крайней мере один коэффициент отличен от нуля. Пусть, например, $\lambda_1\neq 0$. Тогда равенство (1) можно переписать в виде

$$\mathbf{u}_1=\left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\mathbf{u}_2+\ldots+\left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\mathbf{u}_n,$$

т. е. $\mathbf{u}_1$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Обратно:

4. *Если среди векторов* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *один какой-нибудь есть линейная комбинация остальных, то система* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *линейно зависима.*

В самом деле, если, например, $\mathbf{u}_n=\lambda_1\mathbf{u}_1+\ldots+\lambda_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}$, то нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1\mathbf{u}_1+\ldots+\lambda_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+(-1)\mathbf{u}_n$ равна нулевому вектору.

Следующее часто применяемое предложение усиливает предложение 3:

5. *Если система векторов* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ *линейно зависима, а система* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$ *линейно независима, то вектор* $\mathbf{u}_n$ *равен линейной комбинации векторов* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$.

В самом деле, так как система $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ линейно зависима, то существует нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1\mathbf{u}_1+\ldots+\lambda_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}+\lambda_n\mathbf{u}_n$, равная нулевому вектору; в ней $\lambda_n\neq 0$, так как в противном случае векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$ были бы линейно зависимы. Следовательно, $\mathbf{u}_n=\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)\mathbf{u}_1+\ldots+\left(-\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)\mathbf{u}_{n-1}$, что и требовалось доказать.

§ 6. Геометрический смысл линейной зависимости векторов

Согласно теореме 5 § 4 из двух коллинеарных векторов один получается умножением другого на некоторое число; отсюда следует утверждение

1. *Система, состоящая из двух (или более) коллинеарных векторов, линейно зависима.*

С другой стороны, если два вектора линейно зависимы, то в силу предложения 3 § 5 один из них получается умножением другого на число, а тогда векторы коллинеарны.

Итак,

2. *Система, состоящая из двух векторов, тогда и только тогда линейно зависима, когда векторы коллинеарны.*

Докажем теперь утверждение

3. *Система, состоящая из трех векторов, тогда и только тогда линейно зависима, когда данные три вектора компланарны.*

В самом деле, пусть векторы $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ линейно зависимы, тогда один из них есть линейная комбинация двух других. Пусть, например,

$$\mathbf{u}_3 = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2. \qquad (1)$$

Приложим векторы $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ к одной и той же точке O (рис. 30), так что

$$\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{OA}_1, \quad \mathbf{u}_2 = \overrightarrow{OA}_2, \quad \mathbf{u}_3 = \overrightarrow{OA}_3.$$

Предположим сначала, что векторы $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{OA}_1$, $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{OA}_2$ не коллинеарны; тогда несущие их прямые d_1, d_2 пересекаются в точке O и определяют некоторую плоскость π, проходящую через эту точку. В этой плоскости лежат и векторы $x_1\mathbf{u}_1$ и $x_2\mathbf{u}_2$, а значит, и весь параллелограмм, на этих векторах построенный, в частности и его диагональ, которая есть вектор $x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3$. Значит, все три вектора $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ лежат в плоскости π; их компланарность доказана.

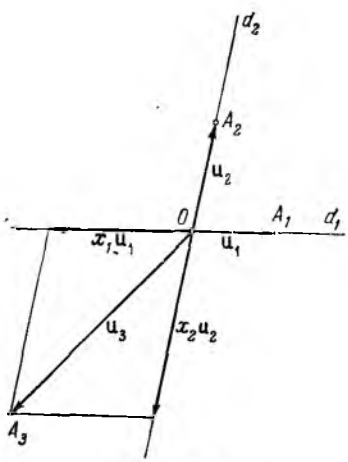


Рис. 30.

Предположим теперь, что векторы $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{OA}_1$ и $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{OA}_2$ коллинеарны, тогда они лежат на одной прямой, и на этой прямой лежат как векторы $x_1\mathbf{u}_1$, $x_2\mathbf{u}_2$, так и их сумма (1) — три вектора $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ оказываются не только компланарными, но даже коллинеарными.

Первая половина теоремы доказана: три линейно зависимых вектора всегда компланарны. Докажем теперь, что всякая система, состоящая из трех (или более) компланарных векторов, линейно зависима.

Пусть векторы $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{OA}_1$, $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{OA}_2$, $\mathbf{u}_3 = \overrightarrow{OA}_3$ компланарны. Если бы какие-нибудь два из этих векторов были коллинеарны, то они были бы линейно зависимы, а тогда и система всех трех векторов была бы линейно зависимой.

Итак, предполагаем, что $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ не коллинеарны (см. рис. 30). Так как все три вектора $\overrightarrow{OA}_1$, $\overrightarrow{OA}_2$, $\overrightarrow{OA}_3$ лежат в одной плоскости и $\overrightarrow{OA}_1$ и $\overrightarrow{OA}_2$ не коллинеарны, то по теореме 8 § 4

$$\mathbf{u}_3 = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2,$$

чем линейная зависимость векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ доказана.

4. *Всякие четыре (или более) вектора в пространстве линейно зависимы.*

Пусть $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$ — данные векторы. Если три каких-нибудь вектора из данных четырех, например $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, компланарны, то они линейно зависимы, и тогда линейно зависима и вся система $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$.

Но если векторы $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ не компланарны, то в силу теоремы 8 из § 4 имеем

$$\mathbf{u}_4 = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3,$$

чем предложение 4 доказано.

§ 7. Векторные многообразия

Определение. *Векторное многообразие* есть такое непустое множество[1]) V векторов, что любая линейная комбинация векторов, принадлежащих этому множеству, также принадлежит ему.

Замечание 1. В определении векторного многообразия V достаточно потребовать, чтобы из $\mathbf{u}_1 \in V$, $\mathbf{u}_2 \in V$ всегда следовало $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in V$ и из $\mathbf{u} \in V$ при любом вещественном λ следовало бы, что $\lambda\mathbf{u} \in V$.

Наибольшее число векторов, образующих линейно независимую систему, в данном многообразии называется *числом измерений* или *размерностью* этого *многообразия*. Так, в пространстве можно найти три некомпланарных (и, значит, линейно независимых) вектора, а всякие четыре вектора линейно зависимы; поэтому

1. *Множество всех векторов пространства есть трехмерное векторное многообразие* V^3.

Всякая линейная комбинация векторов, коллинеарных данной прямой (компланарных данной плоскости), есть вектор, коллинеарный этой прямой (компланарный этой плоскости).

Другими словами, совокупность V^1 соответственно всех векторов, коллинеарных данной прямой (компланарных данной плоскости), есть векторное многообразие.

Так как всякий отличный от нуля вектор образует линейно независимую систему, тогда как всякие два коллинеарных вектора линейно зависимы, то

---

[1]) Предположение, что множество V непусто, означает, что существует хотя бы один вектор, являющийся элементом этого множества.

2. *Множество всех векторов, коллинеарных какой-нибудь прямой, есть векторное многообразие размерности* 1.

Легко доказывается и теорема

3. *Множество V^2 всех векторов, компланарных какой-нибудь плоскости, есть векторное многообразие размерности* 2.

В самом деле, всякие два неколлинеарных вектора, компланарные плоскости π, образуют линейно независимую систему. С другой стороны, всякие три компланарных вектора линейно зависимы.

Заметим, что множество, состоящее из одного нулевого вектора, также является векторным многообразием; оно имеет размерность нуль.

Докажем, что перечисленными только что векторными многообразиями исчерпываются все возможные векторные многообразия (элементами которых являются векторы, лежащие в обычном трехмерном пространстве). Другими словами, докажем следующую теорему:

4. *Пусть V — какое-либо векторное многообразие. Возможны лишь следующие случаи:*

(А) *V состоит из одного лишь нулевого вектора; тогда размерность V равна нулю.*

(Б) *V состоит из всех векторов, коллинеарных какой-либо прямой; тогда размерность V равна* 1.

(В) *V состоит из всех векторов, компланарных некоторой плоскости; тогда размерность V равна* 2.

(Г) *V состоит из всех вообще векторов трехмерного пространства; тогда размерность V равна* 3.

Доказательство. Заметим прежде всего, что всякое векторное многообразие V содержит нулевой вектор.

В самом деле, по определению векторного многообразия множество V непусто, т. е. содержит хотя бы один вектор $\mathbf{u}$; но тогда по определению векторного многообразия вектор $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ также содержится в множестве V.

Может случиться, что все множество V состоит из одного нулевого вектора; тогда мы находимся в случае (А).

Пусть в V содержится хотя бы вектор $\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{0}$. Тогда в V содержатся и все векторы вида $x_1\mathbf{e}_1$, где x_1 — любое вещественное число. Если все множество V этими векторами исчерпывается, то это множество есть многообразие (размерности 1), состоящее из всех векторов, коллинеарных вектору $\mathbf{e}_1$ (т. е. коллинеарных прямой, несущей этот вектор). Тогда мы находимся в случае (Б).

Предположим, что в множестве V имеется вектор $\mathbf{e}_2$, не коллинеарный вектору $\mathbf{e}_1$. Тогда в V содержатся и все векторы вида $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, т. е. все векторы, компланарные плоскости, несущей два неколлинеарных вектора $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Если все множество V исчерпывается этими векторами, то мы находимся в случае (В). Если же в множестве V имеется хотя бы один вектор $\mathbf{e}_3$, не компланарный

паре векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, то в V содержится тройка некомпланарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, а следовательно, содержится и всякий вектор $\mathbf{u}$ вида

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3. \qquad (1)$$

Но по теореме 8 § 4 всякий вектор $\mathbf{u}$ пространства может быть представлен в виде (1), если $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — три компланарных вектора, и мы находимся в случае (Г). Теорема доказана.

Замечание 2. Сформулируем общее определение базиса векторного многообразия, лишь по форме отличающееся от основного определения, данного в § 4.

В векторном многообразии V размерности $n = 1, 2, 3$ возьмем систему, состоящую из n линейно независимых векторов. Она состоит в случае $n = 1$ из одного ненулевого вектора $\mathbf{e}_1$, в случае $n = 2$ — из двух неколлинеарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, в случае $n = 3$ — из трех некомпланарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Во всех случаях эта система является максимальной линейно независимой системой, содержащейся в V (максимальной в том смысле, что, пополнив ее каким-либо не содержащимся в ней вектором, мы получим уже линейно зависимую систему).

Всякая такая система, т. е. *система из n линейно независимых векторов, взятых в данном векторном многообразии V размерности n, называется базисом этого векторного многообразия.*

Мы видели, что всякий вектор $\mathbf{u}$, содержащийся в многообразии V, представим (и притом единственным образом[1])) в виде линейной комбинации $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ элементов базиса этого многообразия; мы знаем также, что коэффициенты x_1, x_2, x_3 в этой линейной комбинации называются координатами вектора $\mathbf{u}$ относительно данного базиса.

Сделаем, наконец, следующее заключительное замечание, относящееся ко всей главе.

Замечание 3. Нигде в этой главе мы не предполагали, что во всем пространстве выбран масштаб, т. е. отрезок, служащий для измерения длин, нигде мы не пользовались понятием длины вектора, мы не будем пользоваться этим понятием и в следующей главе.

---

[1]) Докажем это чисто алгебраически; пусть, например, $n = 3$ и векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ образуют базис; тогда, каков бы ни был вектор $\mathbf{u} \in V$, система $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{u}$ линейно зависима, а $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ независима. Значит, $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$. Если бы существовало второе такое представление $\mathbf{u} = x_1'\mathbf{e}_1 + x_2'\mathbf{e}_2 + x_3'\mathbf{e}_3$, то, вычитая почленно эти равенства, получили бы $(x_1 - x_1')\mathbf{e}_1 + (x_2 - x_2')\mathbf{e}_2 + (x_3 - x_3')\mathbf{e}_3 = 0$. Значит, в силу линейной независимости $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ было бы $x_1 - x_1' = 0$, $x_2 - x_2' = 0$, $x_3 - x_3' = 0$, что и требовалось доказать.

ГЛАВА III

АФФИННАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Определение аффинной системы координат

1. Аффинная система координат на плоскости. Общая, или аффинная, система координат на плоскости задается точкой O (*начало координат*) и парой приложенных к ней неколлинеарных векторов $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OE}_1$ и $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OE}_2$ (рис. 31), данных в определенном порядке: $\mathbf{e}_1$ есть первый, а $\mathbf{e}_2$ — второй вектор; векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ определяют

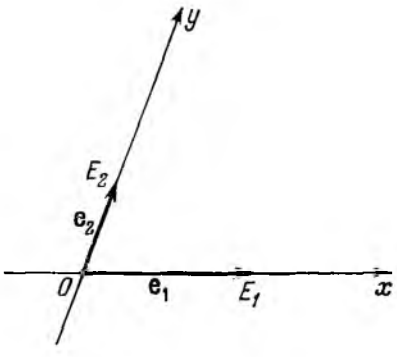


Рис. 31.

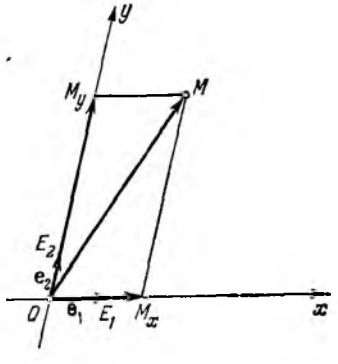


Рис. 32.

две оси, пересекающиеся в точке O, — *первую* и *вторую ось координат* — и являются по определению *единичными векторами* этих осей. Первая ось называется также *осью абсцисс* или *осью* Ox, а вторая — *осью ординат* или *осью* Oy данной координатной системы. Сама система координат обозначается через Oe_1e_2 или через Oxy.

Пусть M — какая-нибудь точка плоскости; обозначим через M_x и M_y проекции точки M соответственно на первую и вторую ось координат (проекции на каждую ось берутся вдоль другой оси) (рис. 32). Алгебраические значения векторов $\overrightarrow{OM}_x$ и $\overrightarrow{OM}_y$ являются

соответственно *первой* и *второй координатой* (*абсциссой* и *ординатой*) точки M.

Любая пара чисел x, y однозначно определяет точку M, для которой x является первой, а y — второй координатой. В самом деле, искомая точка M является концом вектора $\overrightarrow{OM}$, проектирующегося на векторы $\overrightarrow{OM}_x = x\mathbf{e}_1$ и $\overrightarrow{OM}_y = y\mathbf{e}_2$. Значит,

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2,$$

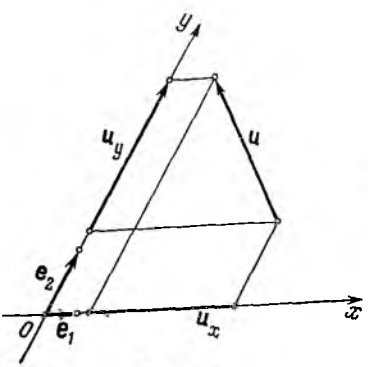


Рис. 33.

т. е. вектор $\overrightarrow{OM}$ есть диагональ параллелограмма, построенного на $\overrightarrow{OM}_x = x\mathbf{e}_1$ и $\overrightarrow{OM}_y = y\mathbf{e}_2$, чем точка M определена однозначно. Точка M с координатами x, y обозначается так: $M = (x, y)$.

Система координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ включает в себя базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ многообразия всех векторов на плоскости. Координаты произвольного вектора $\mathbf{u}$ относительно базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ называются *координатами вектора* $\mathbf{u}$ относительно системы координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$; они являются алгебраическими значениями проекций вектора $\mathbf{u}$ на оси координат и не зависят от выбора начала координат (рис. 33). Вектор $\mathbf{u}$ с координатами x, y обозначается так: $\mathbf{u} = \{x, y\}$; тогда

$$\mathbf{u} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2.$$

Условие $x = 0$ характеризует векторы, коллинеарные оси ординат, а условие $y = 0$ характеризует векторы, коллинеарные оси абсцисс.

Очевидно, координаты любой точки M в данной системе координат суть координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в этой системе координат.

Замечание 1. Если точка O' отлична от точки O, то

$$\overrightarrow{O'M} \neq \overrightarrow{OM};$$

поэтому координаты точек (в отличие от координат вектора) зависят от выбора начала координат.

Начало координат O разбивает каждую из координатных осей на две полуоси: положительную, идущую от начала координат в положительном направлении (т. е. в направлении единичного вектора этой оси), и отрицательную.

Ось абсцисс состоит из всех точек, ординаты которых равны нулю; она разбивает плоскость на две полуплоскости; та, в которой

лежит положительная полуось оси ординат, характеризуется тем, что ординаты лежащих в ней точек положительны; во второй полуплоскости лежат точки с отрицательными ординатами. Аналогично ось ординат состоит из всех точек, абсциссы которых равны нулю; она разбивает плоскость на две полуплоскости; точки той из них, в которой лежит положительная полуось оси абсцисс, имеют положительные абсциссы; точки другой полуплоскости имеют отрицательные абсциссы.

Совокупность обеих координатных осей разбивает плоскость на четыре области, называемые «квадрантами» (рис. 34); в первом квадранте лежат точки, обе координаты которых положительны, во втором — точки с отрицательной абсциссой и положительной ординатой, в третьем — точки, обе координаты которых отрицательны, и в четвертом — точки, у которых абсцисса положительна, а ордината отрицательна. Обе координаты начала координат, очевидно, равны нулю: $O=(0, 0)$.

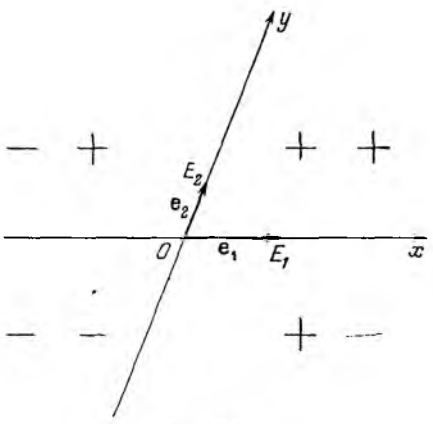


Рис. 34.

Замечание 2. Система координат на плоскости с началом O и единичными векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ определяет на каждой координатной оси свою систему координат, началом которой является точка O, а единичным вектором — лежащий на данной оси вектор $\mathbf{e}_1$ или $\mathbf{e}_2$. Очевидно, каждая из координат точки M есть координата проекции этой точки на соответствующую координатную ось.

Аналогично координаты вектора $\mathbf{u}=\overrightarrow{AB}$ суть координаты проекций $\overrightarrow{A_xB_x}$ и $\overrightarrow{A_yB_y}$ этого вектора на оси координат, т. е. алгебраические значения векторов $\overrightarrow{A_xB_x}$ и $\overrightarrow{A_yB_y}$ на соответствующей оси.

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

Если $A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$, *то для координат* x, y *вектора* $\overrightarrow{AB}$ *имеем:*

$$x=x_2-x_1,$$

$$y=y_2-y_1.$$

Достаточно доказать первое из этих равенств. Координата x есть алгебраическое значение вектора $\overrightarrow{A_xB_x}$ на оси абсцисс (рис. 35):

$$x = (A_xB_x);$$

кроме того, $x_1 = (OA_x)$, $x_2 = (OB_x)$. По лемме Шаля имеем

$$(OA_x) + (A_xB_x) = (OB_x),$$

т. е. $x_1 + x = x_2$, откуда утверждение следует.

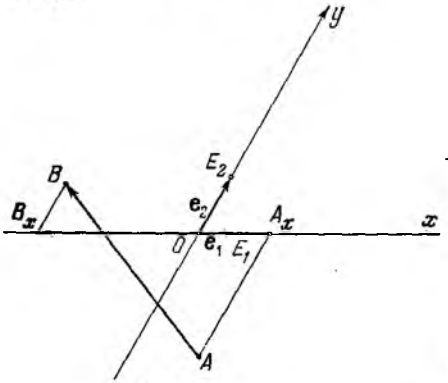


Рис. 35.

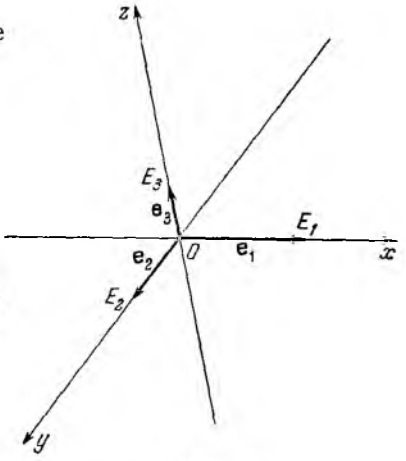


Рис. 36.

2. Аффинная система координат в пространстве. Все сказанное с очевидными изменениями применяется и к случаю пространства. Аффинная система координат в пространстве состоит из точки O («*начало координат*») и приложенных к этой точке трех некомпланарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (рис. 36), данных в определенном порядке ($\mathbf{e}_1$ — первый, $\mathbf{e}_2$ — второй, $\mathbf{e}_3$ — третий) — *единичных векторов данной системы координат*[1]). Каждый из этих векторов определяет проходящую через начало O ось, единичным вектором которой он является; эти оси называются *первой*, *второй* и *третьей осью* координат или соответственно «*осью Ox*» (*осью абсцисс*), «*осью Oy*» (*осью ординат*) и «*осью Oz*» (*осью аппликат*; последнее название, впрочем, употребляется нечасто). Каждые две координатные оси определяют проходящую через них координатную плоскость. Так, оси Ox и Oy определяют координатную плоскость Oxy или $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ и т. д.

Первой, *второй*, *третьей координатой данного вектора* $\mathbf{u}$ называются соответствующие его координаты относительно базиса

[1]) Очевидно, можно сказать и так: задать аффинную систему координат в пространстве — значит взять какой-нибудь базис векторного многообразия всех векторов трехмерного пространства и приложить его к произвольно фиксированной точке O (началу координат).

$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, т. е. соответствующие коэффициенты в представлении

$$\mathbf{u} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Они равны алгебраическим значениям проекций вектора $\mathbf{u}$ на оси, определенные соответственно векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (проекции на каждую ось берутся вдоль плоскости, несущей две другие оси).

Координаты вектора не зависят от выбора начала координат O. Координаты точки M суть по определению координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ (рис. 37). Если M_x, M_y, M_z суть проекции точки M, а $\mathbf{u}_x = \overrightarrow{OM}_x$, $\mathbf{u}_y = \overrightarrow{OM}_y$, $\mathbf{u}_z = \overrightarrow{OM}_z$ — проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ на оси координат, то координаты x, y, z точки M суть алгебраические значения векторов $\overrightarrow{OM}_x = \mathbf{u}_x$, $\overrightarrow{OM}_y = \mathbf{u}_y$, $\overrightarrow{OM}_z = \mathbf{u}_z$. Тогда

$$\mathbf{u}_x = x\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{u}_y = y\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{u}_z = z\mathbf{e}_3,$$

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{u} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \tag{1}$$

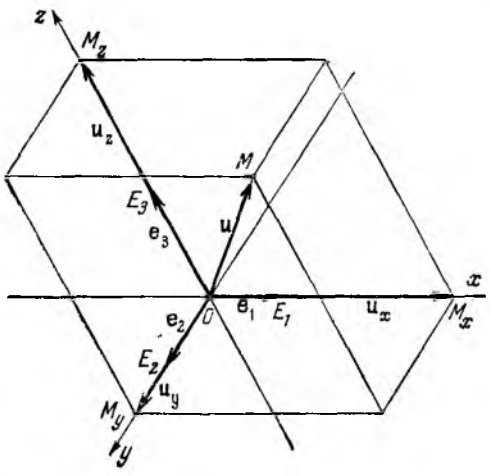


Рис. 37.

Векторы, коллинеарные данной координатной оси, характеризуются тем, что равны нулю их координаты, соответствующие двум другим осям.

Мы уже знаем из главы II, что при сложении векторов их одноименные координаты складываются, а при умножении вектора $\mathbf{u}$ на число λ на это λ умножается каждая координата вектора $\mathbf{u}$. Отсюда (и из главы II, § 4, предложение 5) сразу следует, что *два вектора тогда и только тогда коллинеарны, когда координаты одного из них пропорциональны координатам другого.*

Каждая тройка чисел x, y, z (данных в определенном порядке) однозначно определяет точку M пространства, тройкой координат которой она является. Для получения этой точки M надо приложить к точке O вектор $x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{OM}$, т. е. взять диагональ параллелепипеда, построенного на векторах $x\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OM}_x$, $y\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OM}_y$, $z\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{OM}_z$. Точка M с координатами x, y, z обозначается так: $M = (x, y, z)$. По определению координат точки M

вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет те же координаты, что и его конец M. Вообще, если $A=(x_1, y_1, z_1)$ и $B=(x_2, y_2, z_2)$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $x=x_2-x_1$, $y=y_2-y_1$, $z=z_2-z_1$; доказательство совершенно аналогично тому, которое мы провели в случае плоскости.

Координатная плоскость Oxy характеризуется тем, что ее точки имеют координату $z=0$. Эта плоскость разбивает пространство на

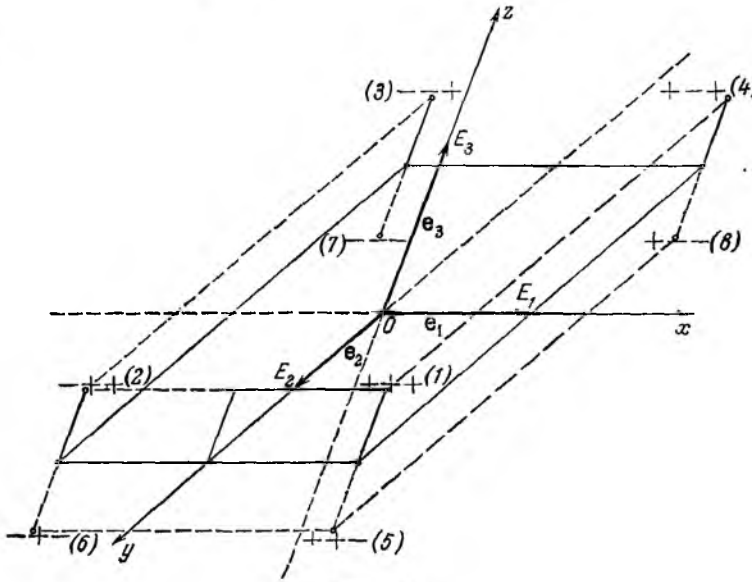


Рис. 38.

два полупространства; координата z у всех точек одного из этих полупространств положительна, у точек другого — отрицательна. Аналогичные утверждения справедливы и для других координатных плоскостей.

Каждое из двух полупространств, на которое пространство разбито плоскостью Oxy, двумя другими координатными плоскостями разбивается на четыре области, соответствующие четырем квадрантам, на которые плоскость Oxy разбивается осями Ox и Oy. Всего, таким образом, получаем восемь областей, называемых *октантами*, на которые пространство разбивается совокупностью трех координатных плоскостей (рис. 38). Точки каждого октанта характеризуются распределением знаков своих координат следующим образом:

(1) + + +, (2) − + +, (3) − − +, (4) + − +,
(5) + + −, (6) − + −, (7) − − −, (8) + − −.

Кроме того, имеем $z=0$ для точек плоскости Oxy, $y=0$ для плоскости Oxz, $x=0$ для плоскости Oyz; на оси Ox имеем $y=z=0$; на оси Oy имеем $x=z=0$; на оси Oz имеем $x=y=0$. Для начала координат O имеем $x=y=z=0$.

§ 2. Перенос начала координат

В аналитической геометрии основное значение имеет так называемая задача *преобразования координат*. Она заключается в следующем. Даны две системы координат (на плоскости или в пространстве) — «старая» и «новая». Требуется, зная координаты какой-нибудь точки или вектора в одной системе координат, найти координаты той же точки или вектора в другой системе. Этой задаче будут посвящены целые две главы этих лекций (главы VIII и IX), но простейший ее случай — так называемый перенос начала координат — мы рассмотрим уже сейчас.

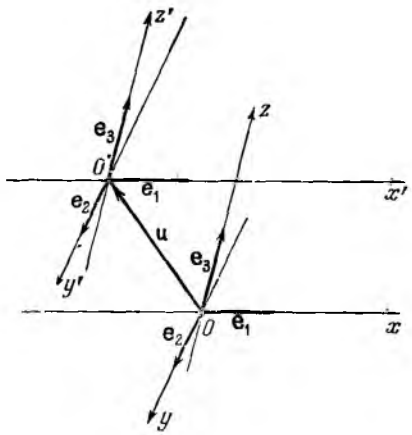


Рис. 39.

Именно, предположим, что даны две координатные системы, у которых одни и те же единичные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, но разные начала O и O', так что новая система координат $O'\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ получается из старой $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ сдвигом на вектор $\overrightarrow{OO'}$ (рис. 39). При этом даны координаты точки O' относительно системы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$: $O'=(a, b, c)$. Мы уже знаем, что в этом случае координаты каждого вектора $\mathbf{u}$ в обеих системах одинаковы, потому что этими координатами являются координаты вектора $\mathbf{u}$ относительно одного и того же базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, т. е. коэффициенты x, y, z в представлении

$$\mathbf{u}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3.$$

Посмотрим, как связаны между собою координаты x, y, z и x', y', z' произвольной точки M в обеих системах. Числа x, y, z суть координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ (рис. 40), а числа x', y', z' — координаты вектора $\overrightarrow{O'M}$ (относительно того же базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$). Но

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}, \qquad (1)$$

причем для векторов $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{O'M}$ (и базиса e_1, e_2, e_3) имеем

$$\overrightarrow{OM}=\{x, y, z\}, \quad \overrightarrow{OO'}=\{a, b, c\}, \quad \overrightarrow{O'M}=\{x', y', z'\},$$

так что векторное равенство (1) равносильно совокупности трех числовых равенств:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x', \\ y &= b + y', \\ z &= c + z'. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эти формулы и решают поставленную задачу.

В случае плоскости вместо трех равенств (2) получаем два: если координаты нового начала O' относительно старой системы координат суть a, b, так что $O'=(a, b)$ в старой системе, то координаты x, y произвольной точки M в старой системе выражаются через координаты той же точки в новой системе формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x', \\ y &= b + y'. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

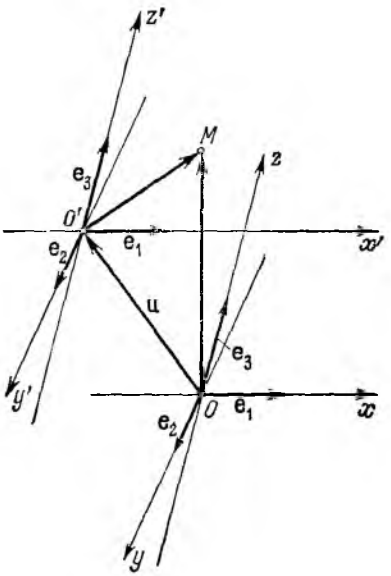


Рис. 40.

§ 3. Деление отрезка в данном отношении

Пусть в пространстве или на плоскости дана прямая d и на ней направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Даны два произвольных вещественных числа α и β, из которых по крайней мере одно отлично от нуля.

По определению, данному в главе I, § 6 точка M делит отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $\alpha:\beta$, если

$$\overrightarrow{AM}:\overrightarrow{MB}=\alpha:\beta.$$

Задача состоит в том, чтобы по данным α и β и по координатам точек A и B найти координаты точки M.

Лемма. *Пусть на плоскости (соответственно в пространстве) даны две прямые d и d' и прямая (соответственно плоскость) δ, не параллельная ни одной из прямых d, d'. Пусть A', B', M' —*

произвольные три точки на прямой d'; обозначим через A, B, M их проекции вдоль δ на прямую d. Тогда

$$\frac{\overrightarrow{A'M'}}{\overrightarrow{M'B'}} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}.$$

Доказательство леммы в случае плоскости и пространства, по существу, одно и то же.

Излагаем его в более сложном случае пространства.

Утверждение леммы очевидно, если $d' \parallel d$ (рис. 41). Пусть прямые d и d' не параллельны между собою. Проводим через точку A

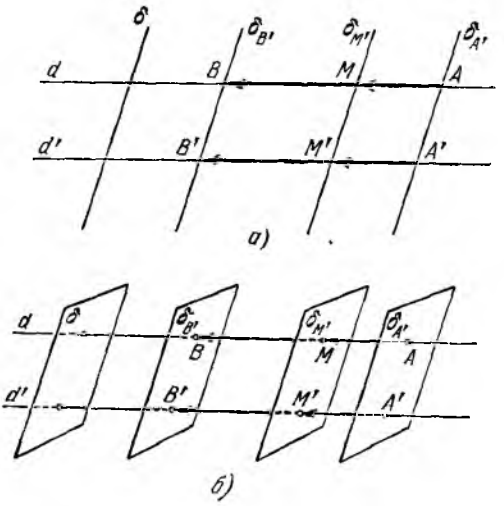


Рис. 41.

прямую d'' (рис. 42), параллельную прямой d', и обозначим через B'' и M'' проекции точек B и M на прямую d'' (вдоль плоскости δ). Плоскость π, определяемая прямыми d и d'', пересекает плоскость δ_M, проходящую через точку M параллельно плоскости δ, по прямой, проходящей через точки M и M''. Прямые MM'' и BB'', лежащие в плоскости π, параллельны между собою, так что по известной теореме элементарной геометрии

$$\frac{\overline{AM''}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{M''B''}}{\overline{MB}} \quad \text{или} \quad \frac{\overline{AM''}}{\overline{M''B''}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}. \tag{1}$$

При этом, если точка M лежит внутри или вне отрезка $\overrightarrow{AB}$, то и точка M'' будет лежать соответственно внутри или вне отрезка

$\overrightarrow{AB''}$, так что в равенстве (1) можно отрезки считать направленными, т. е. написать пропорцию

$$\frac{\overrightarrow{AM''}}{\overrightarrow{M''B''}} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}.$$

Но $\overrightarrow{AM''} = \overrightarrow{A'M'}$, $\overrightarrow{M''B''} = \overrightarrow{M'B'}$, так что $\frac{\overrightarrow{A'M'}}{\overrightarrow{M'B'}} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}$, и лемма доказана.

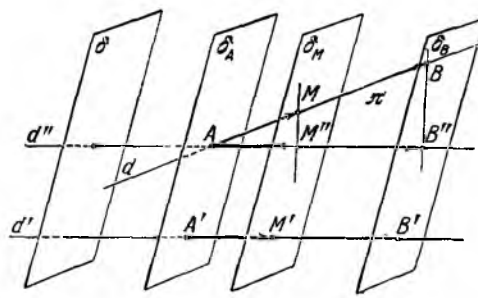


Рис. 42.

Если обозначить через A_x, B_x, M_x проекции точек A, B, M на ось абсцисс, то из этой леммы сразу следует, что

$$\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = \alpha : \beta = \overrightarrow{A_xM_x} : \overrightarrow{M_xB_x} = (A_xM_x) : (M_xB_x).$$

Но (на оси Ox) имеем $(A_xM_x) = x - x_1$, $(M_xB_x) = x_2 - x$, так что

$$(x - x_1) : (x_2 - x) = \alpha : \beta,$$

откуда

$$x = \frac{\alpha x_2 + \beta x_1}{\alpha + \beta}$$

и аналогично

$$y = \frac{\alpha y_2 + \beta y_1}{\alpha + \beta}, \quad z = \frac{\alpha z_2 + \beta z_1}{\alpha + \beta},$$

что дает во всех случаях определенную точку $M = (x, y, z)$ прямой, за исключением случая $\alpha + \beta = 0$, т. е. $\alpha : \beta = -1$ (когда получаем единственную несобственную, или «бесконечно удаленную», точку нашей прямой).

При $\alpha = \beta$ точка M будет серединой отрезка $\overline{AB}$, и для координат середины отрезка мы получаем следующие формулы:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Если $\alpha + \beta \neq 0$ и $\beta \neq 0$, то, полагая $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$, можем переписать полученные формулы в виде

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

ГЛАВА IV

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ. ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

§ 1. Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Расстояние между двумя точками. Уравнение окружности и сферы

1. Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Задание прямоугольной системы координат на плоскости или в пространстве прежде всего предполагает, что *выбрана одна определенная единица длины*, посредством которой измеряются длины всех отрезков (на плоскости или в пространстве). Такую единицу длины будем называть *масштабом*; считая его раз навсегда выбранным, мы называем *ортом* всякий вектор, длина которого равна 1.

После того, как масштаб выбран, прямоугольная система координат определяется (как частный случай общей аффинной системы) требованием, чтобы единичные координатные векторы ($\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на плоскости; $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в пространстве) были *взаимно перпендикулярными ортами*.

Замечание. Теперь мы во всей этой главе будем предполагать, что система координат прямоугольная. Все проекции также предполагаются прямоугольными.

2. Формула для длины вектора (для расстояния между двумя точками) в прямоугольной системе координат. Пусть дан вектор $\mathbf{u}=\{x, y\}$ (рис. 43). Приложим вектор $\mathbf{u}$ к началу координат:

$$\mathbf{u}=\overrightarrow{OM}.$$

Длину вектора $\mathbf{u}=\overrightarrow{OM}$ обозначаем через $|\mathbf{u}|=|\overrightarrow{OM}|$. Обозначая через M_x, M_y проекции точки M на оси координат, имеем $x=(OM_x)$, $y=(OM_y)$ и (по теореме Пифагора)

$$|\overrightarrow{OM}|^2=|\overrightarrow{OM}_x|^2+|\overrightarrow{OM}_y|^2,$$

т. е.

$$|\mathbf{u}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2 = x^2 + y^2.$$

Аналогично в пространстве для вектора

$$\mathbf{u} = \{x,\ y,\ z\}$$

имеем

$$|\mathbf{u}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

— квадрат длины вектора равен сумме квадратов его координат.

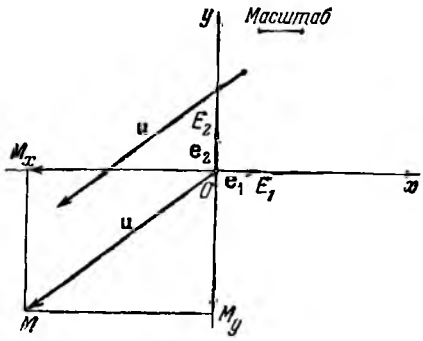


Рис. 43.

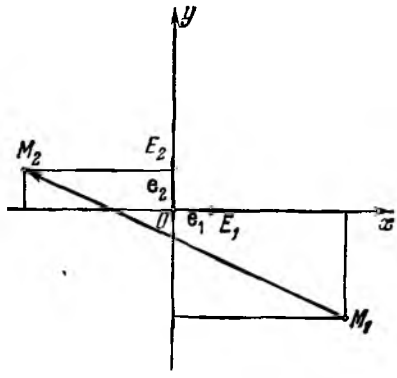


Рис. 44.

Отсюда непосредственно вытекает формула для расстояния $\rho(M_1, M_2)$ между двумя точками (рис. 44):

$$M_1 = (x_1,\ y_1), \quad M_2 = (x_2,\ y_2).$$

Так как $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1\}$, то

$$\rho(M_1, M_2) = |\overrightarrow{M_1M_2}| = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Аналогично в пространстве для точек

$$M_1 = (x_1,\ y_1,\ z_1), \quad M_2 = (x_2,\ y_2,\ z_2)$$

имеем

$$\rho(M_1, M_2) = |\overrightarrow{M_1M_2}| = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

3. Уравнение окружности; замечание об уравнении линии вообще. Пусть на плоскости дана система прямоугольных координат. Рассмотрим на этой плоскости окружность с центром $C = (a, b)$

и радиусом r (рис. 45). Эта окружность есть геометрическое место точек $M=(x, y)$ плоскости, расстояние которых от точки C равно r. Другими словами, необходимым и достаточным условием, чтобы точка $M=(x, y)$ лежала на нашей окружности, является условие

$$\rho(C, M)=r,$$

т. е.

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r. \tag{1}$$

Так как $r>0$, то уравнению (1) эквивалентно

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{2}$$

Уравнение (2) называется *уравнением окружности с центром* $C=(a, b)$ *и радиусом* r. Если центр окружности находится в начале координат, то ее уравнение имеет вид

$$x^2+y^2=r^2.$$

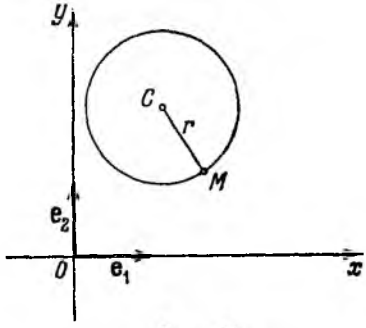


Рис. 45.

Вообще, уравнение, в котором (кроме заданных постоянных чисел) участвуют еще переменные x, y (координаты какой-нибудь точки плоскости в данной системе координат), называется *уравнением данной линии*, если оно выражает необходимое и достаточное условие для того, чтобы точка $M=(x, y)$ лежала на данной линии.

Это определение, разумеется, пригодно и в случае любой системы координат (а не только прямоугольной); так, уравнение

$$y=0$$

есть уравнение оси абсцисс, а

$$x=0$$

— уравнение оси ординат (данной произвольной аффинной системы координат).

4. Уравнение сферы. В пространстве с данной прямоугольной системой координат *сфера* (*шаровая поверхность*) с центром $C=(a, b, c)$ и радиусом r определяется как геометрическое место точек $M=(x, y, z)$, расстояние которых от точки C равно r. Поэтому уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \tag{3}$$

выражает необходимое и достаточное условие для того, чтобы точка $M=(x, y, z)$ лежала на нашей сфере: уравнение (3) есть уравнение сферы с центром $C=(a, b, c)$ и радиусом r. Если центр сферы находится в начале координат, то ее уравнение имеет вид

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

§ 2. Скалярное произведение векторов; угол между двумя векторами

1. Угол между двумя векторами. Пусть (в пространстве или на плоскости с выбранным раз навсегда единым масштабом) даны два вектора $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$, отличные от нулевого. Прилагая их к какой-нибудь точке O пространства так, что $\mathbf{u}_1=\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{u}_2=\overrightarrow{OB}$ (рис. 46), получаем угол (в самом элементарном смысле слова) между этими векторами (или несущими их полупрямыми, исходящими из точки O). Обозначим этот угол через φ; он лежит в плоскости, несущей прямые OA и OB, и по величине заключен между 0 и π. Считая, что каждый из векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ задает положительное направление на несущей его прямой, мы каждую из этих прямых превращаем в ось и, следовательно, можем говорить об алгебраическом значении (прямоугольной [1]) проекции каждого вектора на ось, несущую другой вектор:

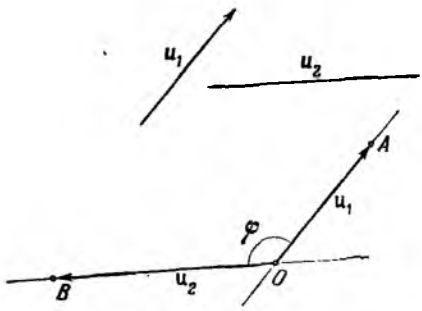


Рис. 46.

$$\text{ав пр}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_2, \quad \text{ав пр}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_1.$$

Эти алгебраические значения положительны, если угол φ острый (рис. 47, *а*); они отрицательны, если угол φ тупой (рис. 47, *б*), и равны нулю, если $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Из подобия прямоугольных треугольников OAA' и OBB' заключаем, что $\frac{|\overrightarrow{OB'}|}{|\overrightarrow{OB}|}=\frac{|\overrightarrow{OA'}|}{|\overrightarrow{OA}|}$, т. е.

$$\frac{|\text{ав пр}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_2|}{|\mathbf{u}_2|}=\frac{|\text{ав пр}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_1|}{|\mathbf{u}_1|}.$$

[1]) Никаких других проекций, кроме прямоугольных, мы в этой главе рассматривать не будем.

Так как, кроме того, $\text{ав пр}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_2$ и $\text{ав пр}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_1$ имеют один и тот же знак (положительный, если угол φ острый, отрицательный, если

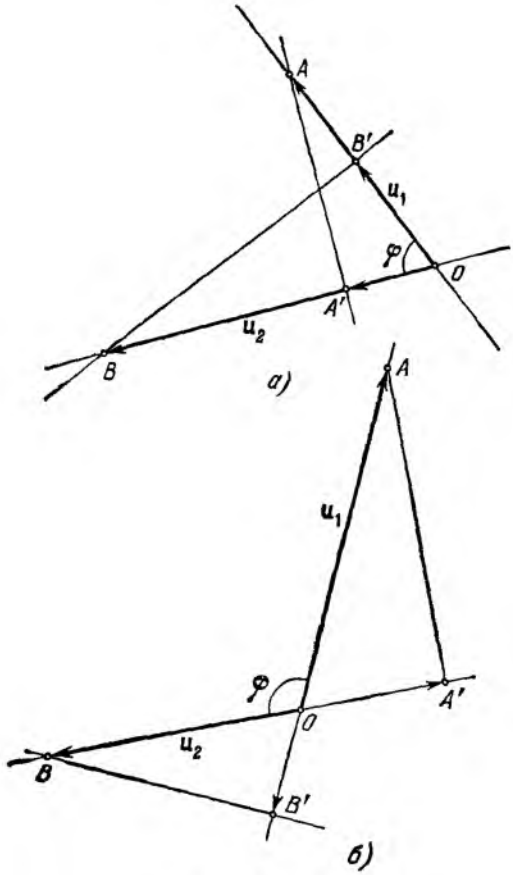


Рис. 47.

этот угол тупой), то

$$\frac{\text{ав пр}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_2|}=\frac{\text{ав пр}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|}.$$

Каждое из этих отношений может быть принято за определение косинуса угла φ между векторами $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$:

$$\cos\varphi=\frac{\text{ав пр}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_2|}=\frac{\text{ав пр}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|}. \qquad (1)$$

Как видно из рис. 47, это определение $\cos\varphi$ совпадает с определением, известным из тригонометрии.

Из формулы (1) вытекает:

$$\text{ав пр}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_2 = |\mathbf{u}_2|\cos\varphi \qquad (2)$$

— алгебраическое значение проекции одного вектора на ось, определенную другим, равно длине проектируемого вектора, умноженной на косинус угла между двумя векторами.

2. Направляющие косинусы. Пусть $\mathbf{u} = \{x, y, z\}$ — какой-нибудь ненулевой вектор, α, β, γ — углы между этим вектором и ортами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ координатных осей (рис. 48). Тогда $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\mathbf{u}$.

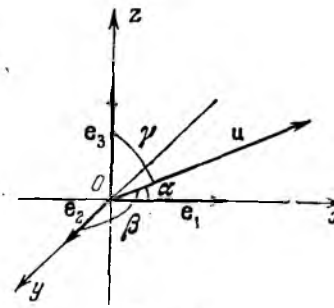


Рис. 48.

Так как $x = \text{ав пр}_{\mathbf{e}_1}\mathbf{u}$, $y = \text{ав пр}_{\mathbf{e}_2}\mathbf{u}$, $z = \text{ав пр}_{\mathbf{e}_3}\mathbf{u}$, то в силу формулы (2) имеем:

$$\left.\begin{aligned} x = |\mathbf{u}|\cos\alpha\, y = |\mathbf{u}|\cos\beta, \\ z = |\mathbf{u}|\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

В частности, если $\mathbf{u}$ есть орт, то $|\mathbf{u}| = 1$ и

$$x = \cos\alpha,\quad y = \cos\beta,\quad z = \cos\gamma$$

— координаты орта равны его направляющим косинусам. Далее из (3) получаем

$$|\mathbf{u}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = |\mathbf{u}|^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma),$$

откуда, сокращая на $|\mathbf{u}|^2 \neq 0$, имеем

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (4)$$

— сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ *равна* 1.

Пусть даны произвольные три числа ξ, η, ζ, удовлетворяющие равенству

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1. \qquad (4')$$

Отложим на осях координат векторы $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OC_2}$, $\overrightarrow{OC_3}$, алгебраические значения которых соответственно равны числам ξ, η, ζ, и построим на этих векторах (прямоугольный) параллелепипед (рис. 49). Исходящая из точки O диагональ $\overrightarrow{OC}$ этого параллелепипеда имеет

длину, равную $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$, и является ортом с координатами $\xi=\cos\alpha$, $\eta=\cos\beta$, $\zeta=\cos\gamma$. Итак, *любая тройка чисел* ξ, η, ζ, *удовлетворяющая уравнению* (4'), *является тройкой координат* («*направляющих косинусов*») *некоторого орта в пространстве.*

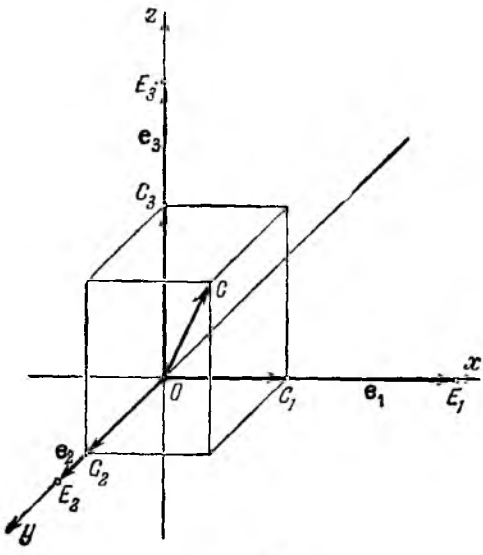


Рис. 49.

3. Скалярное произведение двух векторов. Введем теперь следующее фундаментальное определение: *скалярным произведением двух векторов* $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ *называется число* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, *равное произведению длин этих векторов на косинус угла* φ *между ними*:

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = |\mathbf{u}_1| \cdot |\mathbf{u}_2| \cos\varphi. \tag{5}$$

Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор полагается равным нулю.

Из этого определения сразу вытекают следующие свойства скалярного произведения:

I. $$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1)$$

— свойство переместительности.

II. $$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 0$$

тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{u}_1$ *и* $\mathbf{u}_2$ *перпендикулярны между собою* [1]).

Далее, если $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2=\mathbf{u}$, то $\varphi=0$, $\cos\varphi=1$, $|\mathbf{u}_1|=|\mathbf{u}_2|=|\mathbf{u}|$. Итак,

III. $$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2$$

— скалярное произведение вектора на самого себя («*скалярный квадрат вектора*») *равно квадрату его длины; скалярный квадрат равен нулю для нулевого вектора и положителен для всякого вектора, отличного от нулевого.*

---

[1]) Так как нулевой вектор имеет неопределенное направление, то его можно считать перпендикулярным к любому вектору.

Подставляя значение $\cos\varphi$ из (1) в (5), получаем

IV. $$(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2) = |\mathbf{u}_2|\ \text{ав пр}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_1 = |\mathbf{u}_1|\ \text{ав пр}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_2$$

— скалярное произведение двух векторов равно произведению длины одного из них на алгебраическое значение проекции другого вектора на ось, несущую первый.

В частности, для любого вектора $\mathbf{u} = \{x, y, z\}$ и координатных ортов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ имеем $(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1) = \text{ав пр}_{\mathbf{e}_1}\mathbf{u} = x$ и т. д., т. е.

V. $$x = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_1),\quad y = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_2),\quad z = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_3)$$

— координаты любого вектора в прямоугольной системе координат равны скалярным произведениям этого вектора на орты осей координат.

Из равенства IV вытекает: каково бы ни было вещественное число λ, имеем

$$(\lambda\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2) = |\mathbf{u}_2|\ \text{ав пр}_{\mathbf{u}_2}\lambda\mathbf{u}_1 = |\mathbf{u}_2|\,\lambda\ \text{ав пр}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_1 = \lambda\,|\mathbf{u}_2|\ \text{ав пр}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_1,$$

т. е.

VI. $$(\lambda\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2) = \lambda\,(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2)$$

— числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения.

Из того же равенства IV вытекает далее:

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2,\ \mathbf{v}) = |\mathbf{v}|\ \text{ав пр}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = |\mathbf{v}|\ \text{ав пр}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}_1 + |\mathbf{v}|\ \text{ав пр}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}_2,$$

т. е.

VII. $$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2,\ \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1,\ \mathbf{v}) + (\mathbf{u}_2,\ \mathbf{v}) \qquad (6)$$

— свойство дистрибутивности относительно сложения.

Из VI и VII следует, что скалярное произведение двух линейных комбинаций векторов можно вычислить по правилу умножения многочленов, например:

$$(\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3,\ \mu_1\mathbf{v}_1 + \mu_2\mathbf{v}_2) = \lambda_1\mu_1(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{v}_1) + \lambda_2\mu_1(\mathbf{u}_2,\ \mathbf{v}_1) + \\ + \lambda_3\mu_1(\mathbf{u}_3,\ \mathbf{v}_1) + \lambda_1\mu_2(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{v}_2) + \lambda_2\mu_2(\mathbf{u}_2,\ \mathbf{v}_2) + \lambda_3\mu_2(\mathbf{u}_3,\ \mathbf{v}_2).$$

4. Выражение скалярного произведения и угла между двумя векторами через координаты этих векторов. Пусть (на плоскости)

$$\mathbf{u}_1 = \{x_1,\ y_1\},\quad \mathbf{u}_2 = \{x_2,\ y_2\}.$$

Это значит, что

$$\mathbf{u}_1 = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2,\quad \mathbf{u}_2 = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2.$$

Тогда в силу V—VII имеем

$$(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2)=(x_1\mathbf{e}_1+y_1\mathbf{e}_2,\quad x_2\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2)=$$
$$=x_1x_2\,(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1)+y_1x_2\,(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1)+x_1y_2\,(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2)+y_1y_2\,(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2).$$

Но векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ суть взаимно перпендикулярные орты, так что $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2)=(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1)=0$ и $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1)=(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2)=1$; значит,

$$(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2)=x_1x_2+y_1y_2. \tag{7_2}$$

В пространстве для

$$\mathbf{u}_1=\{x_1,\ y_1,\ z_1\},\quad \mathbf{u}_2=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$$

получаем (совершенно так же)

$$(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{7_3}$$

Эти формулы очень важны и имеют многочисленные применения. В частности, они позволяют определить угол φ между двумя векторами $\mathbf{u}_1=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$ и $\mathbf{u}_2=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$ по координатам этих векторов: для этого достаточно переписать формулу (5) в виде

$$\cos\varphi=\frac{(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2)}{|\mathbf{u}_1|\cdot|\mathbf{u}_2|}$$

и подставить в нее значение длины векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ и их скалярного произведения (7). Получаем

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \tag{8}$$

(корни в знаменателе берутся положительные).

Легко получить также формулу, дающую алгебраическое значение проекции произвольного вектора $\mathbf{u}=\{x,\ y,\ z\}$ на ось с направляющими косинусами $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Для этого переписываем формулу (5) в виде

$$|\mathbf{u}_2|\cos\varphi=\frac{(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2)}{|\mathbf{u}_1|},$$

т. е. в виде

$$\text{ав пр}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_2=\frac{(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2)}{|\mathbf{u}_1|}.$$

Если $\mathbf{u}_2=\mathbf{u}=\{x,\ y,\ z\}$, $\mathbf{u}_1=\mathbf{e}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$, т. е. $|\mathbf{u}_1|=|\mathbf{e}|=1$, то мы получаем

$$\text{ав пр}_{\mathbf{e}}\mathbf{u}=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma. \tag{9}$$

Эта формула очень удобна в применениях.

§ 3. Угол от одиого вектора до другого на плоскости

В §§ 1, 2 мы рассматривали векторы в пространстве. В этом параграфе будем рассматривать лишь векторы, лежащие в плоскости.

Вращением плоскости вокруг данной ее точки O (*центр вращения*) называется движение этой плоскости по себе самой, заключающееся в том, что точка O остается неподвижной, а все остальные точки перемещаются по (лежащим в нашей плоскости) окружностям с центром O.

Вращение плоскости вокруг центра O можно производить в двух направлениях: по часовой стрелке и против нее.

Предположим, что в плоскости задана прямоугольная система координат Oe_1e_2. Посредством вращения вокруг точки O орт e_1 можно совместить с ортом e_2 двумя способами: повернув его на угол $\frac{\pi}{2}$ в одном или на угол $\frac{3\pi}{2}$ в противоположном направлении. Мы условимся считать положительным то из двух направлений вращения, которое переводит орт e_1 в орт e_2 посредством поворота на $\frac{\pi}{2}$. *Таким образом, если на плоскости дана прямоугольная система координат, то определено и положительное направление вращения.*

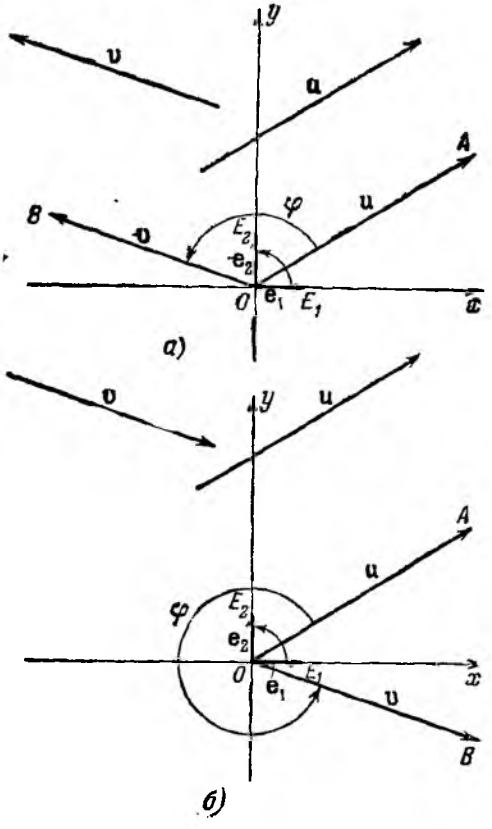


Рис. 50.

Пусть на данной плоскости одно из двух возможных направлений вращения выбрано в качестве положительного. Возьмем на нашей плоскости два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Приложим оба вектора к одной и той же точке O (рис. 50), так что

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{OB}.$$

Назовем *углом от вектора* **u** *до вектора* **v** или *наклоном вектора* **v** *к вектору* **u** тот угол φ, на который в положительном направлении надо повернуть вектор **u** так, чтобы его направление совпало с направлением вектора **v** [1]). Этот угол изменяется от 0 до 2π. Если **u** есть единичный вектор какой-либо оси, то угол от вектора **u** до вектора **v** называется *углом наклона* или просто *наклоном вектора* **v** *к данной оси*.

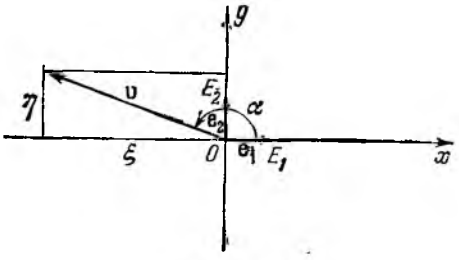


Рис. 51.

Пусть в плоскости дана прямоугольная система координат. Для угла наклона α вектора $\mathbf{v}=\{\xi, \eta\}$ к оси абсцисс (рис. 51) имеем, очевидно,

$$\cos\alpha=\frac{\xi}{|\mathbf{v}|},\ \sin\alpha=\frac{\eta}{|\mathbf{v}|}.$$

Эти равенства могут служить определением тригонометрических функций. В частности, если $\mathbf{v}=\{\xi, \eta\}$ есть орт **e** (рис. 52), то его координаты ξ и η суть $\xi=\cos\alpha$, $\eta=\sin\alpha$. Поэтому формула (9) из § 2, дающая выражение алгебраического значения проекции вектора $\mathbf{u}=\{x, y\}$ на ось, определенную ортом $\mathbf{e}=\{\cos\alpha, \sin\alpha\}$, принимает теперь вид

$$\text{ав пр}_{\mathbf{e}}\,\mathbf{u}=(\mathbf{u}, \mathbf{e})=$$
$$=x\cos\alpha+y\sin\alpha. \qquad (1)$$

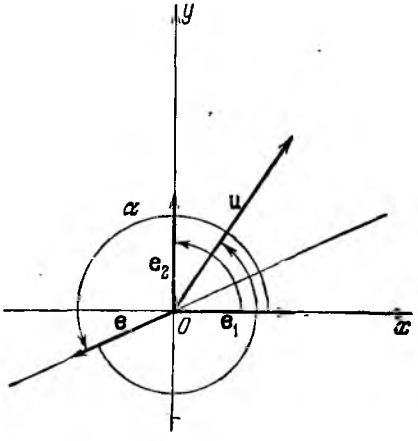


Рис. 52.

Если векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ наклонены к оси абсцисс соответственно под углами α_1 и α_2 (рис. 53), то угол φ от вектора $\mathbf{u}_1$ до вектора $\mathbf{u}_2$ есть, очевидно,

$$\varphi=\alpha_2-\alpha_1. \qquad (2)$$

(Надо сначала повернуть вектор $\mathbf{e}_1$ на угол α_1 — тогда он пойдет по

[1]) Если на плоскости с выбранным на ней положительным направлением вращения даны два вектора $\mathbf{u}=\overrightarrow{OA}$, и $\mathbf{v}=\overrightarrow{OB}$, то каждый из углов φ_1 от **u** до **v** и φ_2 от **v** до **u** является дополнением другого до 2π; оба угла имеют один и тот же косинус; тот из этих двух углов, который заключен между 0 и π, есть *угол между векторами* **u** *и* **v**.

направленню $\mathbf{u}_1$; сделав еще поворот на угол φ — все время в положительном направлении, — получим направление вектора $\mathbf{u}_2$, наклоненного к оси абсцисс под углом α_2, так что $\alpha_1+\varphi=\alpha_2$.) Из формулы (2) следует при $\mathbf{u}_1=\{x_1,\ y_1\}$, $\mathbf{u}_2=\{x_2,\ y_2\}$

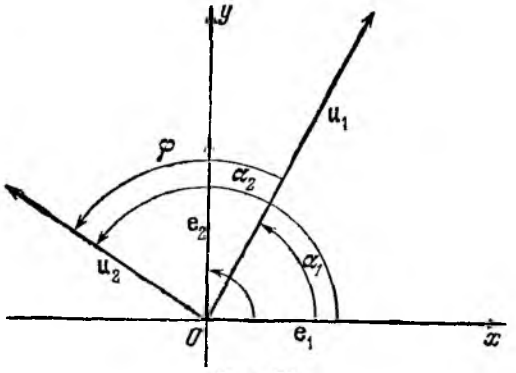


Рис. 53.

$$\left.\begin{aligned}\sin\varphi=\sin(\alpha_2-\alpha_1)=\sin\alpha_2\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\sin\alpha_1=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{|\mathbf{u}_1|\cdot|\mathbf{u}_2|},\\ \cos\varphi=\cos(\alpha_2-\alpha_1)=\cos\alpha_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_2\sin\alpha_1=\\ =\frac{x_1x_2+y_1y_2}{|\mathbf{u}_1|\cdot|\mathbf{u}_2|}=\frac{(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2)}{|\mathbf{u}_1|\cdot|\mathbf{u}_2|}.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Мы получили, в частности, уже известную нам формулу для $\cos\varphi$.

§ 4. Полярная система координат на плоскости

1. Определение полярных координат. Понятие угла наклона вектора к данной оси находит постоянные применения в геометрии плоскости. Одним из важнейших среди них является определение полярных координат.

Для определения системы полярных координат на плоскости надо задать:

1° *Масштаб* (*т. е. единицу измерения длины*).

2° *Направление вращения в плоскости, считаемое положительным.*

3° *Точку O* (*называемую «началом» или полюсом системы координат*).

4° *Полупрямую Ox, исходящую из точки O* (рис. 54) (*эта полупрямая называется полярной осью*[1])). *Положительное направление на*

[1]) Согласно принятой нами терминологии ее следовало бы называть *полярной полуосью.*

полупрямой задается вектором $\overrightarrow{OE}$ (*где* E — *любая ее точка, отличная от точки* O).

Если таким образом выбрана полярная система координат, то для каждой точки M (рис. 55) плоскости определены ее полярные координаты, а именно:

1) угол наклона φ вектора $\overrightarrow{OM}$ к полярной оси (т. е. угол от вектора $\overrightarrow{OE}$ до вектора $\overrightarrow{OM}$);

2) расстояние r точки M от начала O (т. е. длина вектора $\overrightarrow{OM}$).

Угол φ называется *полярным углом*[1]) точки M или *первой полярной координатой* этой точки. Полярный угол определен для всех

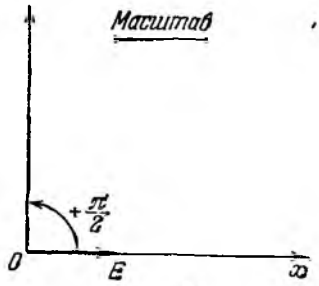


Рис. 54.

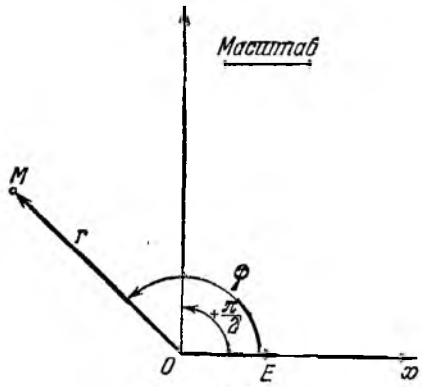


Рис. 55.

точек M плоскости (и заключен между 0 и 2π), за единственным исключением точки O, для которой он делается неопределенным. Число r называется *полярным радиусом* или *второй полярной координатой* точки M. Полярный радиус любой точки M, отличной от O, положителен; для точки O он равен нулю.

Иногда бывает целесообразно считать полярный угол точки определенным лишь с точностью до слагаемых вида $2k\pi$, где k — любое целое[2]) число, т. е. считать наряду с данным φ и всякое число $\varphi + 2k\pi$ за значение полярного угла: если дано произвольное положительное r и произвольное не ограниченное никаким дополнительным условием действительное число φ, то, взяв на полярной оси вектор $\overrightarrow{OA}$ длины r и повернув его в положительном направлении вокруг точки O на угол φ, получим вектор $\overrightarrow{OM}$, конец которого будет иметь

[1]) Или амплитудой.

[2]) Или любое неотрицательное целое число.

полярные координаты φ и r. Точку M, полярные координаты которой равны данным φ и r, будем обозначать так: $M=\langle\varphi, r\rangle$.

Пример. Пусть $a>0$. Будем давать углу всевозможные значения $\varphi \geqslant 0$. Множество всех точек с полярными координатами φ и $r=a\varphi$ (т. е. множество всех точек $M=\langle\varphi, a\varphi\rangle$, где φ пробегает

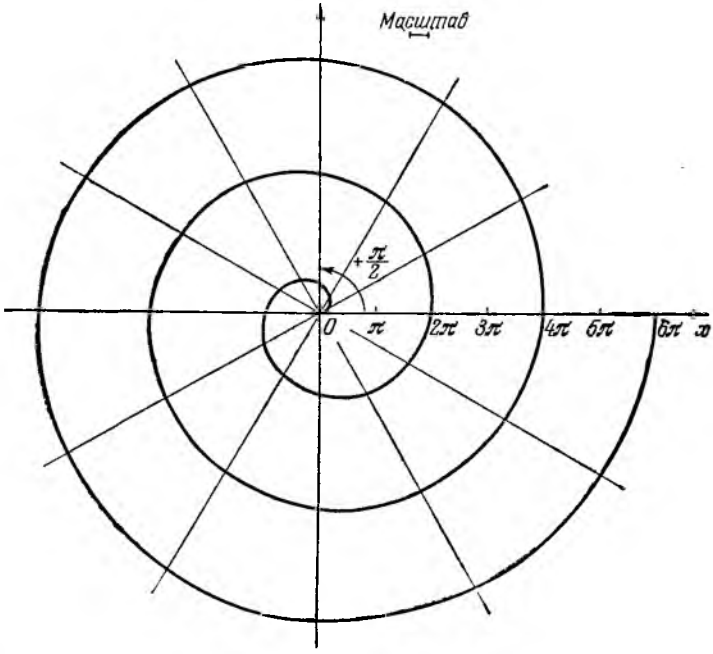


Рис. 56.

все значения $\varphi \geqslant 0$ (рис. 56)) образует кривую, называемую *спиралью Архимеда*. Уравнение

$$r=a\varphi,$$

которому удовлетворяют полярные координаты любой точки M спирали Архимеда, называется *уравнением этой кривой в полярных координатах*.

2. Связь прямоугольных координат с полярными. Если на плоскости дана полярная система координат, то этим определена и некоторая прямоугольная система координат: за масштаб и начало координат в этой прямоугольной системе берем масштаб и начало полярной системы; полярную полуось объявляем положительной полуосью абсцисс. Таким образом определена ось абсцисс (вместе с ее направлением). Так как в определение полярной системы

входит и направление положительного вращения плоскости, то мы можем определить ось ординат как ту ось, в которую перейдет ось абсцисс при повороте ее на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении.

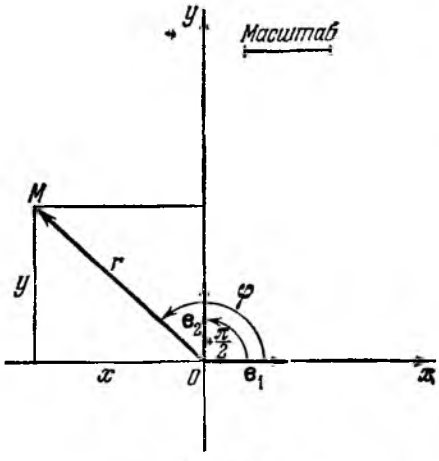


Рис. 57.

Полученную таким образом прямоугольную систему координат будем называть системой, определенной данной полярной системой (рис. 57).

Обратно, если дана какая-нибудь прямоугольная система координат, то однозначно определяем полярную систему, сохраняя в ней масштаб и начало данной прямоугольной системы и требуя, чтобы полярная полуось совпадала с положительной полуосью абсцисс, а положительное направление вращения было тем вращением, которое переводит ось абсцисс в ось ординат поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$. Очевидно, если мы для полученной таким образом полярной системы координат построим определенную ею прямоугольную, то вернемся к исходной прямоугольной системе.

Итак, *каждой полярной системе координат соответствует вполне определенная прямоугольная система, и обратно.*

Посмотрим, как связаны между собою координаты x, y и φ, r какой-нибудь точки M плоскости в обеих системах.

Имеем очевидные формулы:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Они позволяют перейти от полярных координат точки M к прямоугольным. Но они же позволяют произвести и обратный переход по формулам:

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, \\ \cos\varphi &= \frac{x}{r} = \frac{x}{+\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi &= \frac{y}{r} = \frac{y}{+\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Из двух последних равенств (2) вытекает

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{3}$$

Но формула (3) позволяет определить угол φ лишь с точностью до слагаемых вида $k\pi$ при целом k.

3. Примеры. Дадим еще несколько примеров кривых, заданных их уравнениями в полярных координатах.

1° *Гиперболическая спираль* определяется как множество всех точек M, полярные координаты которых связаны между собою уравнением

$$r = \frac{a}{\varphi}, \tag{4}$$

где a — положительная постоянная, а полярный угол φ пробегает все положительные значения. Начав исследование уравнения (4) с какого-нибудь положительного значения $\varphi = \varphi_0$ и заставляя φ возрастать, видим, что полярный радиус точки $M = \langle \varphi, r \rangle$, монотонно уменьшаясь, стремится к нулю при неограниченном возрастании φ, так что кривая, совершая бесконечное число оборотов, неограниченно

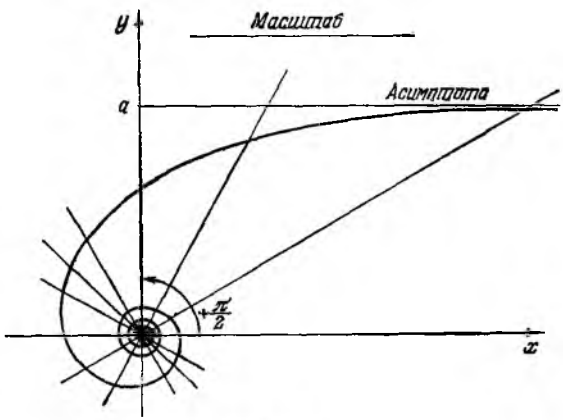


Рис. 58.

приближается к началу O, никогда его, однако, не достигая. Если мы теперь, начиная с данного $\varphi = \varphi_0$, будем давать углу φ монотонно убывающие значения, $\varphi \to 0$, то r будет неограниченно возрастать. Для того чтобы понять, как при этом убывании φ и возрастании r будет изменяться положение точки $M = \langle \varphi, r \rangle$, воспользуемся второй из формул (1), а именно:

$$y = r \sin \varphi.$$

Подставляя сюда значение $r = \frac{a}{\varphi}$, получаем

$$y = a\frac{\sin\varphi}{\varphi},$$

откуда видно, что при φ, стремящемся к нулю, ордината точки y стремится к a, так что кривая при возрастании r уходит в бесконечность, неограниченно приближаясь к прямой $y = a$. Это обстоятельство выражают, говоря, что прямая $y = a$ является *асимптотой* гиперболической спирали (4).

Произведенное исследование показывает, что гиперболическая спираль имеет вид, указанный на рис. 58.

2° *Логарифмическая спираль*. Она определяется как совокупность точек $M = \langle\varphi, r\rangle$, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению

$$r = a^{\varphi}, \quad a > 1. \tag{5}$$

Примем за положительное направление вращения направление против часовой стрелки. При $\varphi = 0$ получаем точку $M = \langle 0; 1\rangle$. При возрастании φ возрастает и r (в частности, когда φ возрастает на 2π, то полярный радиус умножается на $a^{2\pi}$, спираль быстро «раскручивается» против часовой стрелки). Если же φ, начиная со значения $\varphi = 0$, принимает неограниченно возрастающие по абсолютной величине отрицательные значения, то r стремится к нулю — спираль закручивается по часовой стрелке, неограниченно приближаясь к точке O.

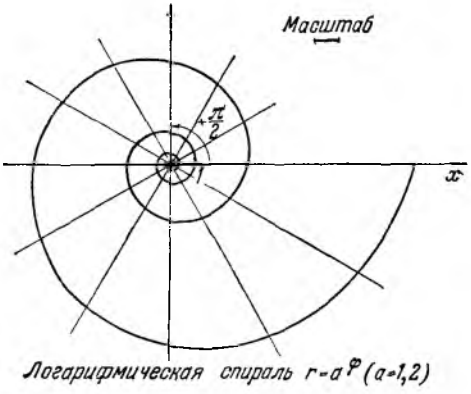


Рис. 59.

Общий вид логарифмической спирали дан на рис. 59.

Среди многочисленных замечательных свойств логарифмических спиралей отметим следующее: две подобные между собою логарифмические спирали конгруэнтны (т. е. могут быть совмещены посредством движения [1])). Мы докажем важнейший частный случай этой теоремы, а именно следующий.

---

[1]) Подобные преобразования и движения подробно изучаются в главе XI. Здесь мы предполагаем известными лишь те сведения о них, которые читатель получил в школе.

Пусть логарифмическая спираль дана своим уравнением

$$r = a^{\varphi}, \quad a > 1, \tag{5}$$

в определенной полярной системе координат. При растяжении (гомотетии) плоскости с центром в начале координат O и коэффициентом растяжения $k > 0$ [1]) эта спираль переходит в ту же спираль, но повернутую на угол $-c$, где

$$c = \log_a k.$$

В самом деле, при нашем растяжении каждая точка

$$M = \langle \varphi, r \rangle$$

переходит в точку

$$M' = \langle \varphi, kr \rangle.$$

В частности, точка $\langle \varphi, a^{\varphi} \rangle$ перейдет в точку $\langle \varphi, ka^{\varphi} \rangle = \langle \varphi, a^{\varphi+c} \rangle$. Значит, множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$r = a^{\varphi},$$

переходит в множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$r = a^{\varphi+c}.$$

Другими словами, растянутая с коэффициентом растяжения k логарифмическая спираль имеет своим уравнением в полярных координатах уравнение

$$r = a^{\varphi+c}. \tag{6}$$

При повороте на угол $-c$ точка $M = \langle \varphi, r \rangle$ переходит в точку $M^* = \langle \varphi - c, r \rangle$. Значит, если точка $M = \langle \varphi, r \rangle$ удовлетворяла уравнению (5), то после поворота она перейдет в точку $M^* = \langle \varphi - c, r \rangle$, удовлетворяющую уравнению

$$r = a^{\varphi+c}. \tag{6}$$

Это и будет уравнение нашей спирали, повернутой на угол $-c$; мы видим, что она совпадает с уравнением спирали, растянутой с коэффициентом растяжения k. Теорема доказана.

Замечание. Мы рассмотрели лишь случай $a > 1$; читателю предлагается разобрать логарифмическую спираль при положительном $a < 1$. При $a = 1$ логарифмическая спираль, очевидно, превращается в окружность.

---

[1]) Под этим растяжением мы понимаем преобразование плоскости, ставящее в соответствие каждой точке M, имеющей (в какой-либо полярной системе координат с началом O) координаты φ, r, точку M', имеющую в той же системе координаты φ, kr.

3° Кривая, уравнение которой в полярных координатах есть

$$r = a\cos 3\varphi$$

при $-\frac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant -\frac{\pi}{2}$, имеет вид,

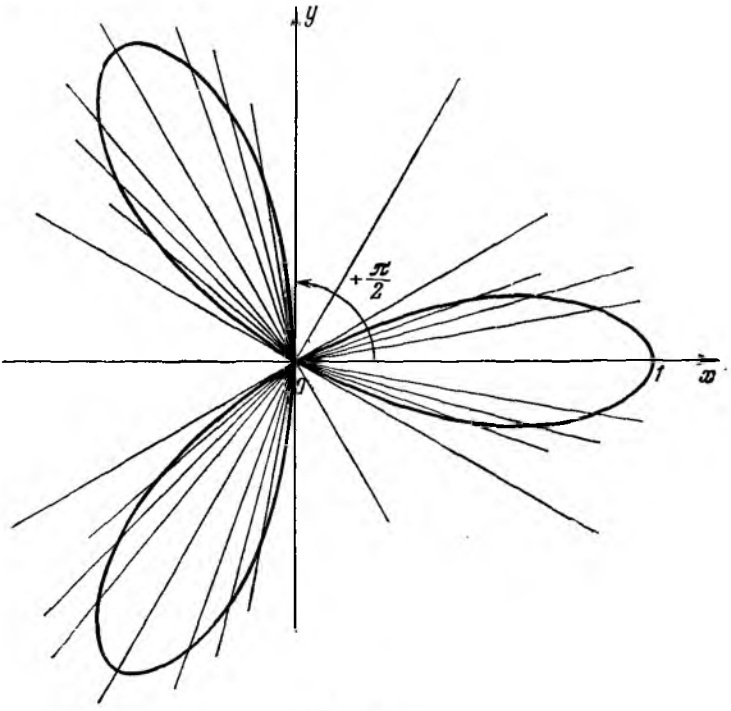


Рис. 60.

указанный на рис. 60. Эта кривая иногда называется «*трехлепестковой розой*».

§ 5. Полярная система координат в пространстве

Для ее определения необходимы следующие элементы (рис. 61):

1° Плоскость (называемая далее *основной*) с выбранной в ней полярной системой координат: начало O, полярная полуось Ox (с положительным направлением $\overrightarrow{OE}$), масштаб, принимаемый в качестве единого масштаба для всех измерений отрезков во всем пространстве.

2° Выбор на прямой Oz, перпендикулярной к основной плоскости, одного из двух ее ортов в качестве положительного (что дает нам на этой прямой систему координат с началом O).

Основная плоскость разбивает пространство на два полупространства; то из них, которое содержит положительный орт прямой Oz, считаем положительным.

Теперь для каждой точки M пространства (не лежащей на прямой Oz) определяются ее координаты в данной системе полярных координат, а именно:

а) *полярный радиус* ρ точки M, т. е. длина вектора $|\overrightarrow{OM}|$; имеем всегда $\rho \geqslant 0$; только для точки $M = O$ имеем $\rho = 0$;

б) долгота φ точки M — это полярный угол ортогональной проекции M_0 точки M на основную плоскость относительно данной в этой плоскости полярной системы координат; долгота изменяется в пределах $0 \leqslant \varphi < 2\pi$;

в) *широта* ψ точки M — это угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и его проекцией $\overrightarrow{OM_0}$ на основную плоскость, считаемый положительным,

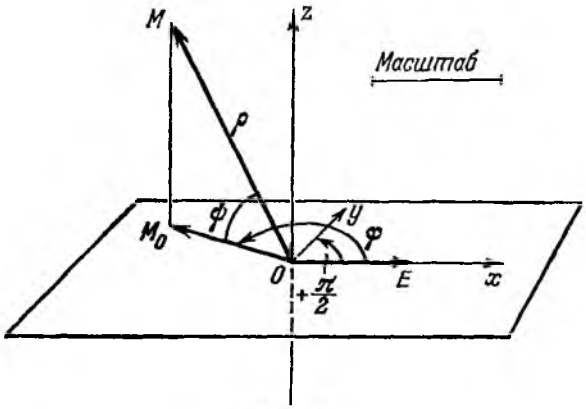


Рис 61.

$0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$, для точек M положительного полупространства и отрицательным, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant 0$, для точек отрицательного полупространства.

Та же полярная система координат в пространстве позволяет для каждой точки M пространства определить и так называемые *цилиндрические координаты* ее, а именно: полярные координаты φ, r (в основной плоскости) точки M_0 (проекции точки M на основную плоскость) и аппликату, или *высоту точки* M *над основной*

плоскостью, т. е. координату точки M_1 (ортогональной проекции точки M на ось Oz) относительно системы координат, данной на этой прямой (рис. 62).

Полярная система координат в пространстве определяет прямоугольную систему, состоящую из прямоугольной системы Oxy,

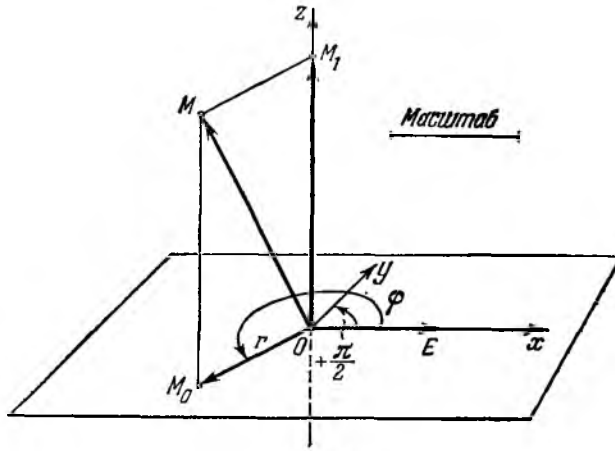


Рис. 62.

порожденной в основной плоскости заданной в ней полярной системой, и оси Oz.

Читатель без труда докажет следующие соотношения, связывающие полярные координаты ρ, φ, ψ и прямоугольные координаты x, y, z в пространстве:

$$x = \rho \cos\psi \cos\varphi,$$
$$y = \rho \cos\psi \sin\varphi,$$
$$z = \rho \sin\psi.$$

Эти формулы позволяют выразить x, y, z через ρ, φ, ψ и обратно.

Что касается соотношений между цилиндрическими и прямоугольными координатами точки M, то аппликата z в обеих этих системах одна и та же, а связь между φ и r цилиндрической системы и x, y прямоугольной дается уже известными нам формулами:

$$x = r \cos\varphi, \quad y = r \sin\varphi.$$

ГЛАВА V

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

§ 1. Направляющий вектор и угловой коэффициент прямой (в произвольной аффинной системе координат). Уравнение прямой

Определение. Всякий ненулевой вектор, коллинеарный данной прямой, называется ее *направляющим вектором*.

Так как всякие два направляющих вектора $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ одной и той же прямой коллинеарны между собою, то один из них получается из другого умножением на некоторое число $\neq 0$.

Бóльшая часть этой главы посвящена исследованию прямых линий на плоскости; лишь в §§ 4 и 10 рассматриваются прямые в пространстве; прямые в пространстве будут изучаться еще и в главе X.

Предположим, что в данной плоскости раз навсегда выбрана некоторая аффинная система координат.

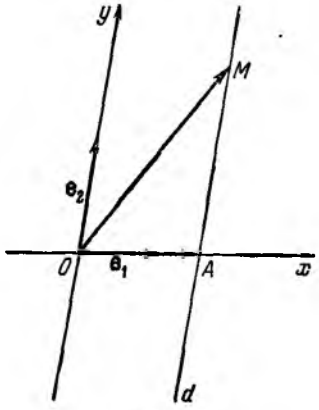


Рис. 63.

Рассматриваем сначала случай прямой d, параллельной одной из координатных осей. Если прямая d параллельна оси ординат, то (согласно замечанию на стр. 40) ее направляющими векторами являются все векторы вида $\{0, \eta\}$ и только они (здесь η — произвольное число $\neq 0$). Точно так же ненулевые векторы вида $\{\xi, 0\}$ и только эти векторы являются направляющими векторами любой прямой, параллельной оси абсцисс.

Пусть прямая d параллельна оси ординат и пересекает ось абсцисс в точке $A=(a, 0)$ (рис. 63). Тогда все векторы $\overrightarrow{OM}$, где M — произвольная точка прямой, при проектировании на ось абсцисс (вдоль оси ординат) переходят в один и тот же вектор $\overrightarrow{OA}$: для

всех точек M нашей прямой (и только для них) имеем

$$x = a.$$

Это и есть уравнение прямой, параллельной оси ординат. Аналогично прямая, параллельная оси абсцисс, имеет уравнение

$$y = b.$$

(При этом параллельность понимается в широком смысле [1]) — сама ось ординат имеет уравнение $x = 0$, а ось абсцисс $y = 0$.)

Имеет место следующее простое предложение:

Для всех направляющих векторов $\mathbf{u} = \{x, y\}$ *данной прямой, не параллельной оси ординат, отношение* $y:x$ *ординаты вектора к его абсциссе имеет одно и то же постоянное значение* k, *называемое угловым коэффициентом данной прямой.*

В самом деле, если $\mathbf{u}_1 = \{x_1, y_1\}$ и $\mathbf{u}_2 = \{x_2, y_2\}$ — два направляющих вектора данной прямой d, то $\mathbf{u}_2 = \lambda \mathbf{u}_1$, т. е. одновременно

$$x_2 = \lambda x_1, \quad y_2 = \lambda y_1,$$

и, значит (так как $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$),

$$y_2 : x_2 = y_1 : x_1.$$

Замечание 1. *Направляющий вектор прямой, параллельной оси ординат, имеет вид* $\mathbf{u} = \{0, \eta\}$, $\eta \neq 0$; *поэтому угловой коэффициент прямой, параллельной оси ординат, равен* ∞.

Угловой коэффициент прямой, параллельной оси абсцисс, есть 0.

Замечание 2. *Всякий вектор* $\mathbf{u} = \{x, y\}$, *для которого отношение* $y:x$ *равно угловому коэффициенту* k *данной прямой* d, *есть направляющий вектор этой прямой.*

Для прямых, параллельных какой-нибудь из осей координат, утверждение очевидно (так как тогда $k = 0$ или $k = \infty$ и вектор $\mathbf{u} = \{x, y\}$, для которого $y:x = k$, параллелен соответствующей оси координат). Пусть прямая d не параллельна ни одной из осей координат и $\mathbf{u}_1 = \{x_1, y_1\}$ есть какой-нибудь направляющий вектор этой прямой. Тогда $k = y_1 : x_1 = y : x$, $\frac{y_1}{y} = \frac{x_1}{x}$, т. е. вектор $\mathbf{u}$ коллинеарен направляющему вектору $\mathbf{u}_1$ прямой d и, следовательно, сам является ее направляющим вектором.

Замечание 3. *Если система координат прямоугольная, то для углового коэффициента* k *прямой* d *имеем* $k = \operatorname{tg} \alpha$, *где* α *есть угол наклона любого направляющего вектора прямой* d *к оси абсцисс* [2]).

Найдем теперь уравнение прямой d, не параллельной оси ординат (система координат снова произвольная аффинная). Обозначим угло-

[1]) См. гл. II, § 4, сноска на стр. 44.

[2]) Считая, что $\operatorname{tg} \alpha$ есть отношение $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha : \cos \alpha$, имеем $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty$.

вой коэффициент прямой d через k, а точку ее пересечения с осью Oy через $Q=(0,\ b)$ (рис. 64).

Если $M=(x,\ y)$ — произвольная точка прямой d, отличная от точки Q, то вектор $\overrightarrow{QM}=\{x,\ y-b\}$ есть направляющий вектор прямой d и, следовательно,

$$\frac{y-b}{x}=k.$$

Другими словами, все точки $M=(x,\ y)$ прямой d удовлетворяют уравнению [1])

$$y=kx+b. \tag{1}$$

Обратно, всякая точка $M_1=(x_1,\ y_1)$, удовлетворяющая уравнению (1), лежит на прямой d: в самом деле, существует единственная точка M' с абсциссой x_1, лежащая на прямой d, и эта точка,

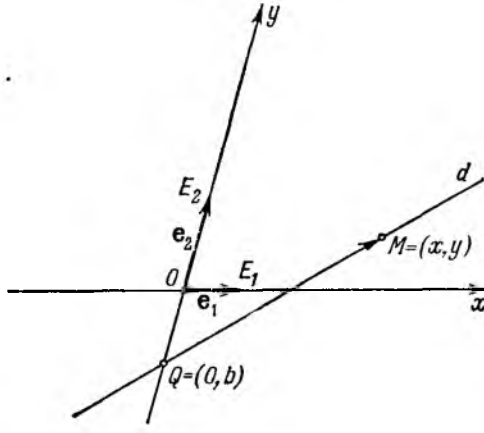


Рис. 64.

имея ту же абсциссу x_1, что и точка M_1, удовлетворяет уравнению (1) и, значит, имеет ординату $y_1=kx_1+b$ — ту же, что и точка M_1. Значит, $M'=M_1$, т. е. точка M_1 лежит на прямой d.

Итак, уравнению (1) удовлетворяют все точки прямой d и только они, а это и значит, что уравнение (1) есть уравнение прямой d.

Пусть мы каким бы то ни было способом нашли уравнение вида (1), которому удовлетворяют все точки данной прямой d и только они.

[1]) Точка $Q=(0,\ b)$ также ему удовлетворяет.

Докажем, что тогда непременно b есть ордината Q пересечения прямой d с осью ординат, а k есть угловой коэффициент этой прямой.

Первое утверждение очевидно: для нахождения точки Q пересечения прямой d с осью ординат надо в уравнение (1) подставить $x=0$; получаем $y=b$, т. е. $Q=(0,\ b)$. Далее, при любом выборе отличной от Q точки $M=(x,\ y)$ прямой d вектор $\overrightarrow{QM}=\{x,\ y-b\}$ есть направляющий вектор этой прямой, и, следовательно, $\frac{y-b}{x}=k$ есть угловой коэффициент прямой d.

Итак, *существует единственное уравнение вида* (1), *являющееся уравнением данной прямой* d (не параллельной оси ординат). Это уравнение — первой степени; так как и прямая, параллельная оси ординат, определяется уравнением первой степени $x=a$, то мы доказали, что *всякая прямая на плоскости определяется некоторым уравнением первой степени, связывающим координаты ее точек.*

Докажем обратное предложение. Пусть

$$Ax+By+C=0 \tag{2}$$

— произвольное уравнение первой степени относительно x и y. Докажем, что оно является уравнением некоторой прямой.

Возможны два случая: $B=0$ или $B\neq 0$.

Рассмотрим первый случай: $B=0$. Тогда уравнение (2) имеет вид

$$Ax+C=0 \tag{2'}$$

и $A\neq 0$ (иначе не было бы уравнения, а было бы верное или неверное тождество $C=0$); следовательно,

$$x=-\frac{C}{A},$$

т. е. уравнение (2′) является уравнением некоторой прямой, параллельной оси ординат.

Переходим ко второму случаю: $B\neq 0$. Тогда уравнение (2) переписывается в виде

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

и определяет прямую d, пересекающую ось ординат в точке $Q=\left(0,\ -\frac{C}{B}\right)$ и имеющую угловой коэффициент $k=-\frac{A}{B}$, что и требовалось доказать.

Замечание 4. Так как $k=-\frac{A}{B}$, то вектор

$$\mathbf{u}_0=\{-B,\ A\}$$

есть направляющий вектор прямой (2). Это утверждение верно и при $B=0$ (т. е. для прямых, параллельных оси ординат).

Отсюда следует, что направляющими векторами прямой d (определенной уравнением (2)) являются все векторы

$$\mathbf{u} = \{\xi, \eta\},$$

где $\xi = -\lambda B$, $\eta = \lambda A$ (при каком-нибудь $\lambda \neq 0$). Очевидно, эти векторы удовлетворяют уравнению

$$A\xi + B\eta = 0. \tag{3}$$

Обратно, если вектор $\mathbf{u} = \{\xi, \eta\}$ удовлетворяет уравнению (3), то $\xi : \eta = -B : A$, т. е. $\mathbf{u}$ есть направляющий вектор прямой d; случай прямой, параллельной оси ординат, исключением не является.

Другими словами: *все векторы* $\mathbf{u} = \{\xi, \eta\}$, *удовлетворяющие уравнению* (3) *и только они, коллинеарны прямой, определенной уравнением* (2).

§ 2. Расположение двух прямых на плоскости

Пусть теперь даны два уравнения:

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

$$A'x + B'y + C' = 0. \tag{1'}$$

Посмотрим, когда прямые d и d', определяемые этими уравнениями, параллельны в широком смысле, когда они совпадают, когда параллельны в собственном смысле (т. е. не имеют ни одной общей точки).

Ответ на первый вопрос получается сразу: прямые d и d' тогда и только тогда параллельны в широком смысле, когда их направляющие векторы $\mathbf{u}_0 = \{-B, A\}$ и $\mathbf{u}'_0 = \{-B', A'\}$ коллинеарны, т. е. когда имеет место пропорция $(-B) : A = (-B') : A'$, а следовательно, и пропорция

$$A' : B' = A : B. \tag{2}$$

Если эта пропорция может быть продолжена до пропорции

$$A' : B' : C' = A : B : C, \tag{3}$$

то прямые d и d' совпадают: в этом случае все коэффициенты одного из двух уравнений (1), (1') получаются из коэффициентов другого умножением на некоторое λ и, значит, уравнения (1) и (1') эквивалентны (всякая точка $M = (x, y)$, удовлетворяющая одному уравнению, удовлетворяет и другому).

Обратно, если две прямые d и d' совпадают, то имеет место пропорция (3).

Докажем это сначала в случае, когда наши прямые параллельны оси ординат. Тогда $B = B' = 0$, и нам нужно доказать только равенство $C' : A' = C : A$. Но последнее равенство (в котором $A' \neq 0$, $A \neq 0$)

вытекает из того, что обе (совпадающие) прямые пересекают ось абсцисс в одной и той же точке с абсциссой $-\frac{C'}{A'}=-\frac{C}{A}$.

Пусть теперь совпадающие прямые d, d' не параллельны оси ординат. Тогда они пересекают ее в одной и той же точке Q с ординатой $-\frac{C'}{B'}=-\frac{C}{B}$ и мы имеем пропорцию $B':C'=B:C$, которая вместе с пропорцией (2) (выражающей параллельность прямых d и d' в широком смысле) и дает нам искомую пропорцию (3).

Параллельность в собственном смысле означает, что имеет место параллельность в широком смысле (т. е. выполнено условие (2)), но нет совпадения (т. е. не выполнено (3)). Это означает, что пропорция

$$A':B'=A:B \tag{2}$$

имеет место, тогда как

$$A':B':C'\neq A:B:C. \tag{4}$$

Совокупность двух соотношений (2) и (4) обычно записывают в виде одной формулы [1]):

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}. \tag{5}$$

Подведем итог всему доказанному.

Теорема 1. *Всякая прямая d на плоскости, снабженной аффинной системой координат, определяется некоторым уравнением первой степени между координатами ее точек. Обратно, всякое уравнение первой степени*

$$Ax+By+C=0 \tag{1}$$

является уравнением некоторой (единственной) прямой d; при этом все векторы $\mathbf{u}=\{\xi, \eta\}$, коллинеарные этой прямой, и только они удовлетворяют однородному уравнению

$$A\xi+B\eta=0, \tag{6}$$

так что, в частности, вектор $\mathbf{u}_0=\{-B, A\}$ является направляющим вектором нашей прямой. Два уравнения

$$Ax+By+C=0, \tag{1}$$
$$A'x+B'y+C'=0 \tag{1'}$$

тогда и только тогда определяют одну и ту же прямую, когда

$$A':B':C'=A:B:C. \tag{3}$$

Пропорция

$$A':B'=A:B \tag{2}$$

---

[1]) См. § 9 главы I.

выражает условие, необходимое и достаточное, чтобы уравнения (1) *и* (1′) *определяли прямые, параллельные в широком смысле.*

Для параллельности в собственном смысле необходимым и достаточным является требование, чтобы выполнялось условие (2) *без выполнения условия* (3), *что записывается и в виде* (5).

Замечание. Общее уравнение (1) первой степени часто называют «*общим уравнением прямой на плоскости*»; уравнение вида

$$y = kx + b$$

называется «*уравнением с угловым коэффициентом*». Вместо того, чтобы говорить «прямая, определяемая уравнением (1)», говорят просто «прямая (1)».

§ 3. Частные случаи общего уравнения прямой

Мы видели, что обращение в нуль одного из коэффициентов A или B означает, что прямая

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

параллельна (в широком смысле) одной из координатных осей (оси Ox, если $A = 0$, и оси Oy, если $B = 0$).

Равенство $C = 0$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы точка $O = (0, 0)$ лежала на нашей прямой. Обращение в нуль двух коэффициентов: $A = C = 0$, соответственно $B = C = 0$, означает, что прямая есть ось абсцисс (при $A = C = 0$), соответственно ось ординат (при $B = C = 0$).

Если прямая не проходит через начало координат и не параллельна ни одной из координатных осей, то ни один из коэффициентов в ее уравнении (1) не равен нулю, и само это уравнение может быть записано в виде

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1,$$

т. е. в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{2}$$

где

$$a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Полагая в этом уравнении $y = 0$, соответственно $x = 0$, получаем точки пересечения (рис. 65)

$$P = (a, 0), \quad Q = (0, b)$$

нашей прямой с осями координат — коэффициенты a и b в уравнении (2) являются соответственно абсциссой первой и ординатой второй из этих точек; они, как принято было говорить в старину,

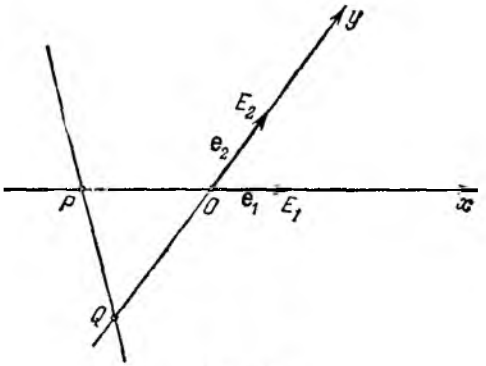


Рис. 65.

«выражают отрезки, отсекаемые прямой (2) на осях координат». Поэтому уравнение (2) называется *«уравнением прямой в отрезках»*.

§ 4. Векторная и параметрическая форма уравнения прямой. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть дана какая-нибудь точка M_0 и вектор $\mathbf{u}_0 \neq \mathbf{0}$, который считаем приложенным к точке M_0:

$$\mathbf{u}_0 = \overrightarrow{M_0M_1}.$$

Эти данные определяют прямую d как геометрическое место концов всевозможных векторов вида

$$\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \overrightarrow{M_0M_1}, \tag{1}$$

где t пробегает все вещественные числовые значения. Вектор $\mathbf{u}_0 = \overrightarrow{M_0M_1}$, очевидно, является направляющим вектором прямой d. Можно сказать, что наша прямая есть геометрическое место всех точек M, удовлетворяющих уравнению (1), а само это уравнение можно назвать *уравнением прямой в векторной форме* (или *векторным уравнением прямой*). Ясно, что каждая прямая может быть задана, таким образом, какой-нибудь своей точкой M_0 и (приложенным к этой точке) направляющим вектором $\mathbf{u}_0 = \overrightarrow{M_0M_1}$. Существенным преимуществом уравнения (1) является то, что оно позволяет задать прямую не только на плоскости, но и в пространстве: ведь все до

сих пор сказанное в этом параграфе в равной мере относится и к прямой на плоскости, и к прямой в пространстве. Разница (и то очень несущественная) начнется лишь тогда, когда мы будем «расписывать» уравнение (1) по координатам входящих в него векторов $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M}$. Этих координат будет в случае плоскости две, а в пространственном случае — три.

Если на плоскости раз навсегда дана точка O (начало координат), то уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{M_0M_1}, \qquad (1_0)$$

которым часто тоже пользуются (в механике и физике) под названием векторного уравнения прямой.

Пусть сначала дело происходит в плоскости (снабженной некоторой аффинной системой координат (рис. 66)). Тогда вектор $\mathbf{u}_0 = \overrightarrow{M_0M_1}$ задан двумя своими координатами:

$$\mathbf{u}_0 = \overrightarrow{M_0M_1} = \{a,\ b\}.$$

Если при этом $M_0 = (x_0, y_0)$, $M_1 = (x_1, y_1)$, а координаты переменной точки M суть x и y, то уравнение (1) записывается в виде системы двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= at, \\ y - y_0 &= bt. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

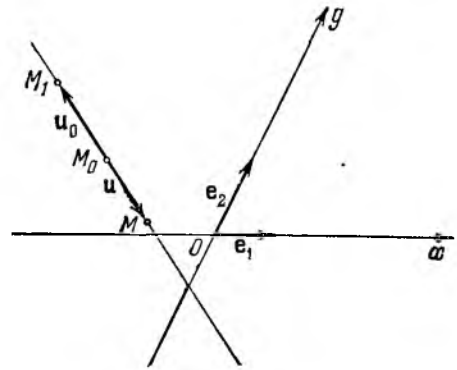


Рис. 66.

Итак, наша прямая состоит из всех тех и только тех точек $M = (x, y)$, координаты каждой из которых при некотором вещественном значении параметра t могут быть записаны в виде (2). Поэтому система уравнений (2) называется *системой параметрических уравнений данной прямой* или, короче, *ее параметрическим уравнением* (единственное число оправдано тем, что в действительности система двух уравнений (2) является лишь координатной записью одного уравнения (1)).

Система уравнений (2) равносильна одной пропорции [1])

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \qquad (3)$$

[1]) Мы в пропорциях теперь обычно заменяем двоеточие чертой, см. замечания в §§ 7 и 9 главы I.

которая часто называется *каноническим уравнением прямой на плоскости.*

Если прямая задана двумя своими точками M_0 и M_1, то ее направляющий вектор $\mathbf{u}_0 = \overrightarrow{M_0M_1}$ имеет координаты

$$a = x_1 - x_0, \qquad b = y_1 - y_0$$

и уравнение (3) превращается в

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \tag{4}$$

Это и есть уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_0 = (x_0, y_0)$ и $M_1 = (x_1, y_1)$.

Переходим к случаю, когда прямая d, определенная своей точкой M_0 и направляющим вектором $\mathbf{u}_0$, задается в пространстве, снабженном аффинной системой координат. Тогда

$$M_0 = (x_0, y_0, z_0), \qquad \mathbf{u}_0 = \{a, b, c\}$$

и уравнение (1) в координатной записи превращается в систему трех уравнений

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= at, \\ y - y_0 &= bt, \\ z - z_0 &= ct. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Эта система равносильна пропорции

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{6}$$

(теперь уже трехчленной), называемой *каноническим уравнением прямой в пространстве*. Не следует забывать, что пропорция (6) при подробной записи превращается не в одно, а в два уравнения, например в

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$\left(\text{третье уравнение } \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c} \text{ является следствием первых двух}\right)$, которым и удовлетворяют все точки прямой в пространстве.

Замечание. Если среди координат a, b, c направляющего вектора $\mathbf{u}_0$ одна какая-нибудь равна нулю, например $c = 0$, то вектор $\mathbf{u}_0$ и прямая d параллельны координатной плоскости Oxy; это видно и из уравнения (5), где теперь $z - z_0 = 0$, т. е. $z = z_0$ для всех точек прямой d. Если одновременно две координаты направляющего вектора $\mathbf{u}_0$ равны нулю, например $b = 0$, $c = 0$, то имеем $y = y_0$, $z = z_0$; в этом случае направляющий вектор $\mathbf{u}_0 = \{a, 0, 0\}$, а значит, и наша прямая параллельна оси Ox.

Если прямая в пространстве задается двумя своими точками $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1=(x_1, y_1, z_1)$, то для ее направляющего вектора $\mathbf{u}_0=\overrightarrow{M_0M_1}=\{a, b, c\}$ имеем $a=x_1-x_0$, $b=y_1-y_0$, $c=z_1-z_0$ и пропорция (6) превращается в пропорцию

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}, \tag{7}$$

которая и определяет прямую (в пространстве), проходящую через две заданные точки.

Условие параллельности (в широком смысле) двух прямых, заданных их каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}, \tag{6}$$

$$\frac{x-x'_0}{a'}=\frac{y-y'_0}{b'}=\frac{z-z'_0}{c'}, \tag{6'}$$

заключается в коллинеарности их направляющих векторов, т. е. в пропорции

$$a:b:c=a':b':c'. \tag{8}$$

Для совпадения прямых (6) и (6′) необходимо и достаточно, чтобы кроме условия (8) выполнялось еще и условие

$$\frac{x'_0-x_0}{a}=\frac{y'_0-y_0}{b}=\frac{z'_0-z_0}{c}, \tag{9}$$

означающее требование, чтобы точка $M'_0=(x'_0, y'_0, z'_0)$ прямой (6′) лежала на прямой (6) (или — что в данном случае равносильно — чтобы точка $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ прямой (6) лежала на прямой (6′)).

§ 5. Задача: когда прямая $Ax+By+C=0$ на плоскости проходит через точку пересечения двух заданных прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, введем сначала следующее

Определение. *Прямая* d

$$Ax+By+C=0 \tag{1}$$

называется линейной комбинацией (с коэффициентами λ_1, λ_2*) прямых* d_1

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \tag{2}$$

и d_2

$$A_2x+B_2y+C_2=0, \tag{3}$$

если имеет место тождество

$$Ax+By+C=\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2), \qquad (4)$$

означающее, что

$$\left.\begin{aligned} A&=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2,\\ B&=\lambda_1B_1+\lambda_2B_2,\\ C&=\lambda_1C_1+\lambda_2C_2. \end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

Из тождества (4) следует, что пара чисел x_0, y_0, удовлетворяющая обоим уравнениям (2) и (3), удовлетворяет и уравнению (1), являющемуся их линейной комбинацией. Поэтому всякая прямая (1), являющаяся линейной комбинацией прямых (2) и (3), проходит через точку пересечения $M_0=(x_0, y_0)$ прямых (2) и (3).

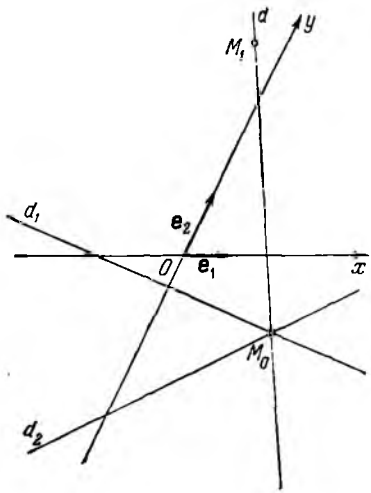


Рис. 67.

Докажем теперь, что и, обратно, всякая прямая, проходящая через точку пересечения $M_0=(x_0, y_0)$ прямых d_1 и d_2, является их линейной комбинацией. Пусть дана прямая d, проходящая через точку M_0 (рис. 67). Очевидно, мы можем предположить, что эта прямая отлична от обеих прямых d_1 и d_2. Будем искать такие числа λ_1 и λ_2, чтобы выполнялось тождество (4). Для этого возьмем какую-нибудь точку $M_1=(x_1, y_1)$, лежащую на прямой d и отличную от точки M_0, и напишем уравнение с неизвестными λ_1 и λ_2:

$$\lambda_1(A_1x_1+B_1y_1+C_1)+\lambda_2(A_2x_1+B_2y_1+C_2)=0. \qquad (5)$$

Точка M_1 не лежит ни на одной из прямых d_1 и d_2 [1]), так что обе скобки в левой части уравнения (5) отличны от нуля, и мы получаем из этого уравнения

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=-\frac{A_2x_1+B_2y_1+C_2}{A_1x_1+B_1y_1+C_1}. \qquad (6)$$

---

[1]) Действительно, если бы точка M_1 лежала, например, на прямой d_1, то эта последняя, имея с прямой d две общие точки M_0 и M_1, совпадала бы с прямой d, тогда как мы предположили, что прямая d не совпадает ни с одной из прямых d_1 и d_2.

Пусть теперь λ_1 и λ_2 — какие-нибудь числа, удовлетворяющие равенству (6). Тогда выполнено и равенство (5), означающее, что точка M_1 лежит на прямой

$$\lambda_1 (A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2 (A_2x + B_2y + C_2) = 0. \qquad (7)$$

Но прямая (7), будучи линейной комбинацией прямых (2) и (3), проходит не только через точку M_1, но и через точку M_0, а прямые (1) и (7), имея две общие точки M_0 и M_1, совпадают между собою, прямая (1) есть не что иное, как линейная комбинация (7) прямых (2) и (3). Утверждение доказано.

Мы получили следующий результат: *для того чтобы прямая* (1) *проходила через точку пересечения прямых* (2) *и* (3), *необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (1) *было линейной комбинацией уравнений* (2) *и* (3).

Интерес этого результата не только в изяществе его формулировки, но и в том новом применении понятия линейной комбинации (и связанного с ним понятия линейной зависимости), которое в нем содержится и которое является образцом многих аналогичных предложений.

Назовем множество всех прямых плоскости, проходящих через данную ее точку M_0, (*собственным*) *пучком с центром* M_0. Для того чтобы задать пучок прямых, достаточно задать его центр, а для этого в свою очередь достаточно задать какие-нибудь две прямые, входящие в этот пучок.

Доказанное только что предложение выясняет алгебраическую суть этого очевидного геометрического факта: *все прямые пучка являются линейными комбинациями любых двух из них.*

Всякое множество прямых на плоскости, состоящее из всех прямых, являющихся линейными комбинациями каких-нибудь двух данных прямых d_1 и d_2, называется *одномерным линейным многообразием прямых* [1]).

Назовем теперь *несобственным пучком* совокупность всех прямых плоскости, параллельных какой-нибудь одной прямой [2]). Нетрудно

---

[1]) Пусть данные прямые d_1 и d_2 суть соответственно прямые (2) и (3). Заменив в линейной комбинации (7) коэффициенты λ_1, λ_2 пропорциональными им числами $k\lambda_1$, $k\lambda_2$, мы получим уравнение

$$k\lambda_1 (A_1x + B_1y + C_1) + k\lambda_2 (A_2x + B_2y + C_2) = 0, \qquad (7')$$

определяющее ту же прямую, что и уравнение

$$\lambda_1 (A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2 (A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Отсюда следует, что все прямые d, являющиеся линейными комбинациями $\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$ двух данных прямых d_1 и d_2, в действительности определяются одним параметром — отношением $\lambda_1 : \lambda_2$, что и дает основание называть совокупность этих прямых *одномерным многообразием*.

[2]) Параллельность, естественно, понимается в широком смысле слова.

доказать, что всякая прямая, являющаяся линейной комбинацией двух каких-нибудь прямых данного несобственного пучка, является прямой, принадлежащей тому же несобственному пучку, и что, обратно, всякая прямая несобственного пучка является линейной комбинацией двух прямых d_1, d_2, произвольно выбранных в этом пучке [1]). Другими словами, *всякий несобственный пучок* (так же как и собственный) *является одномерным линейным многообразием прямых.*

Пусть дано какое-нибудь одномерное линейное многообразие прямых. Оно состоит из всех линейных комбинаций двух данных прямых d_1 и d_2. Если прямые d_1 и d_2 пересекаются, то наше многообразие есть собственный пучок; если они не пересекаются, то порожденное ими многообразие является несобственным пучком. Другими словами, *единственными одномерными линейными многообразиями прямых на плоскости являются собственные и несобственные пучки.* Ставя в соответствие каждому собственному пучку его центр, мы получаем взаимно однозначное соответствие между *всеми точками плоскости и всеми собственными пучками.* Можно теперь произвести пополнение плоскости «несобственными» или «бесконечно удаленными» точками, поставив в соответствие каждому несобственному пучку «несобственную» точку и объявив ее единственной несобственной точкой каждой из прямых, образующих данный несобственный пучок. Каждый несобственный пучок получает, таким образом, свой «центр» — *несобственную* (или «*бесконечно удаленную*») *точку* пересечения всех прямых, образующих этот пучок. Эта несобственная точка — точка пересечения всех параллельных прямых данного направления — называется также *несобственной точкой плоскости*, удаленной в бесконечность *в данном направлении* (в направлении, общем для всех параллельных прямых, составляющих данный пучок [2])). Мы уже пришли в конце первой главы к необходимости пополнить каждую прямую одной-единственной для каждой данной прямой бесконечно удаленной точкой; теперь, когда мы рассматриваем совокупность всех прямых на плоскости, мы видим, что это пополнение происходит так, что две различные прямые имеют одну и ту же бесконечно удаленную точку тогда и только тогда, когда они параллельны между собою. Заметим, наконец, что совокупность всех несобственных точек плоскости *объявляется* прямой линией — *несобственной* (или *бесконечно удаленной*) *прямой плоскости.* Плоскость, множество точек которой пополнено, как только что указано, всеми несобственными точками, а множество всех прямых — одной (составленной из всех несобственных точек)

---

[1]) Доказательство аналогично проведенному для собственного пучка и может быть предоставлено читателю.

[2]) При этом необходимо иметь в виду, что мы теперь объединяем два взаимно противоположных направления на прямой в одно направление (в соответствии с тем, что, умножая обе части уравнения прямой на —1, мы получаем уравнение той же прямой).

несобственной прямой, называется *проективной плоскостью. На проективной плоскости всякие две прямые d_1 и d_2 пересекаются в одной точке: собственной, если прямые d_1 и d_2 на обычной плоскости не параллельны, и в их единственной общей несобственной точке, если эти прямые были параллельны.* Наконец, если одна из двух прямых несобственная, то она пересекается со второй прямой в единственной несобственной точке этой последней.

Легко видеть также, что на проективной плоскости (так же как и на обыкновенной) через всякие две точки A и B проходит единственная прямая. Это очевидно, если обе точки A, B собственные. Если A — собственная, а B — несобственная точка, то прямая AB есть единственная прямая, проходящая через точку A и принадлежащая несобственному пучку («направлению»), соответствующему несобственной точке B. Наконец, если обе точки A и B несобственные, то единственная прямая, через них проходящая, есть несобственная прямая плоскости.

Мы только коснулись здесь вопросов, связанных с переходом от обыкновенной плоскости к проективной,— коснулись, чтобы сразу же отложить их до главы XXI этих «Лекций», предметом которой и будут начала аналитической геометрии именно на проективной плоскости.

§ 6. Две полуплоскости, определяемые данной прямой на плоскости

Пусть на плоскости дана прямая d своим уравнением

$$Ax + By + C = 0. \tag{1}$$

Для всех точек $M = (x, y)$ этой прямой и только для этих точек трехчлен

$$F(x, y) = Ax + By + C$$

обращается в нуль; если же точка $M = (x, y)$ не лежит на прямой (1), то для нее либо $F(x, y) > 0$, либо $F(x, y) < 0$. Мы говорим, что *прямая* (1) *разбивает плоскость на две полуплоскости*; одна из этих полуплоскостей определяется как множество всех точек $M = (x, y)$, для которых $F(x, y) > 0$, а другая — как множество всех тех точек $M = (x, y)$, для которых $F(x, y) < 0$; первая полуплоскость называется *положительной по отношению к данному уравнению* (1) нашей прямой, а вторая — *отрицательной*[1]).

Если ту же прямую d задать каким-либо другим уравнением

$$A'x + B'y + C' = 0, \tag{1'}$$

[1]) Геометрический смысл этого определения будет выяснен в этом же параграфе; он совпадает с наивным представлением о полуплоскости.

то, согласно доказанному в § 2 (теорема 1), имеется такое число λ, что $A' = \lambda A$, $B' = \lambda B$, $C' = \lambda C$, так что, обозначая левую часть уравнения (1′) через $F'(x, y)$, имеем $F'(x, y) = \lambda F(x, y)$. Отсюда сразу следует, что при $\lambda > 0$ положительная и отрицательная полуплоскости для уравнения (1) совпадают с положительной и отрицательной полуплоскостями относительно уравнения (1′), а при $\lambda < 0$ эти полуплоскости меняются местами: положительная полуплоскость относительно уравнения (1) делается отрицательной для уравнения (1′), и наоборот. Но всегда две точки, принадлежащие к одной или разным полуплоскостям относительно одного из двух уравнений (1), (1′), сохраняют это свойство и при переходе к другому уравнению.

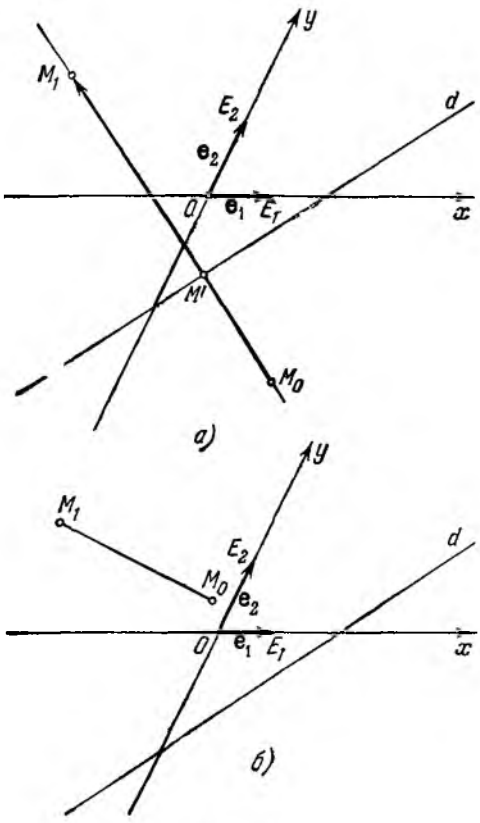


Рис. 68.

Имеет место следующая

Теорема 2. *Если точки* $M_0 = (x_0, y_0)$ *и* $M_1 = (x_1, y_1)$ *лежат в разных полуплоскостях, определенных прямой* (1), *то отрезок* $\overline{M_0M_1}$ *пересекает эту прямую в некоторой точке* M' (рис. 68, *а*); *если же точки* M_0 *и* M_1 *лежат в одной и той же полуплоскости, то в этой же полуплоскости лежит и весь отрезок* $\overline{M_0M_1}$ (рис. 68, *б*).

Доказательство. Пусть точки M_0 и M_1 лежат в разных полуплоскостях. Напишем уравнение прямой, проходящей через точки M_0 и M_1, в параметрической форме:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + at, \\ y &= y_0 + bt, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где за направляющий вектор $\mathbf{u}_0 = \{a, b\}$ взят вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$, так что $a = x_1 - x_0$, $b = y_1 - y_0$. Поэтому те и только те точки $M = (x, y)$ прямой (2) принадлежат отрезку $\overline{M_0M_1}$ этой прямой, для которых $0 \leqslant t \leqslant 1$. Посмотрим, какие значения принимает трехчлен $F(x, y)$, когда точка $M = (x, y)$ пробегает прямую (2). Для этого подставим в трехчлен $F(x, y)$ значения x и y из равенств (2). Получаем

$$F(x, y) = (Ax_0 + By_0 + C) + (Aa + Bb)\,t. \tag{3}$$

Обозначая константы $Ax_0 + By_0 + C$ и $Aa + Bb$ соответственно через μ и λ, видим, что трехчлен $F(x, y)$ превратился в линейную функцию от переменного t:

$$F(x, y) = \lambda t + \mu. \tag{4}$$

При $t = 0$ уравнения (2) дают нам координаты x_0, y_0 точки M_0, а при $t = 1$ (помним, что $a = x_1 - x_0$, $b = y_1 - y_0$) — координаты x_1, y_1 точки M_1. Так как по предположению числа $F(x_0, y_0)$ и $F(x_1, y_1)$ разного знака, то и значения линейной функции $\lambda t + \mu$ при $t = 0$ и $t = 1$ имеют разные знаки, а тогда для некоторого промежуточного значения t', $0 < t' < 1$, которому соответствует точка $M' = (x', y')$ отрезка $\overline{M_0M_1}$, функция $\lambda t + \mu$ и, значит, трехчлен $F(x, y)$ обратятся в нуль [1]). Точка M' является точкой пересечения отрезка $\overline{M_0M_1}$ и прямой (1) — первое утверждение теоремы доказано.

Доказываем второе утверждение. Помня все время, что $a = x_1 - x_0$, $b = y_1 - y_0$, переписываем (3) в виде

$$F(x, y) = (Ax_0 + By_0 + C) + [A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)]\,t,$$

т. е.

$$F(x, y) = (1 - t)\,F(x_0, y_0) + tF(x_1, y_1).$$

Если $0 < t < 1$, то числа как t, так и $1 - t$, положительны; поэтому, если $F(x_0, y_0)$ и $F(x_1, y_1)$ одного знака, то число $F(x, y) = (1 - t)F(x_0, y_0) + tF(x_1, y_1)$ будет иметь тот же знак, что и оба числа $F(x_0, y_0)$ и $F(x_1, y_1)$, — любая точка M отрезка $\overline{M_0M_1}$ принадлежит той же полуплоскости, что и обе точки M_0 и M_1. Теорема 2 полностью доказана.

Выясним ее наглядный смысл (а вместе с тем и геометрический смысл данного выше определения полуплоскости). Прямая (1) не может быть параллельна сразу обеим координатным осям; пусть,

[1]) Найдем это значение t'. При $t = 0$ функция $\lambda t + \mu$ принимает значение μ, а при $t = 1$ — значение $\lambda + \mu$. По предположению эти значения имеют разные знаки; пусть, например, $\mu < 0$, $\lambda + \mu > 0$. Тогда, очевидно, $\lambda > |\mu|$; значение $t = t'$, обращающее функцию $\lambda t + \mu$ в нуль, есть, очевидно, $t = -\frac{\mu}{\lambda}$; так как $\mu < 0$, $\lambda > |\mu|$, то $0 < t' < 1$, что нам и требовалось. Случай $\mu > 0$, $\lambda + \mu < 0$ трактуется аналогично.

например, она не параллельна оси Oy, так что $B \neq 0$. Тогда каждая точка $M_0 = (x_0, y_0)$, не лежащая на прямой (1), или лежит «выше» этой прямой, или лежит «ниже» ее (рис. 69). Точный смысл этих выражений такой. Через точку M_0 проходит единственная прямая, параллельная оси Oy, и эта прямая пересекает прямую (1) в точке $M_1 = (x_0, y_1)$. Если $y_1 < y_0$, то говорим, что точка M_0 лежит выше прямой (1), в противном случае говорим, что она лежит ниже.

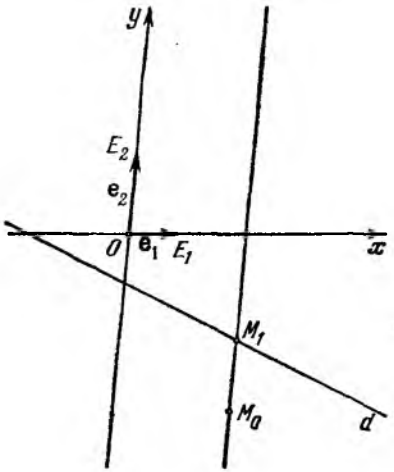


Рис. 69.

Теорема 3. *Все точки, лежащие выше прямой* (1), *образуют одну из двух полуплоскостей, на которые прямая* (1) *разбивает плоскость, а точки, лежащие ниже прямой* (1), *образуют вторую из этих полуплоскостей.*

Доказательство. Мы предположили, что $B \neq 0$. Пусть, например, $B > 0$. Докажем, что тогда для всех точек $M_0 = (x_0, y_0)$, лежащих выше прямой (1), будет $F(x_0, y_0) > 0$, а для всех точек $M_0 = (x_0, y_0)$, лежащих ниже этой прямой, будет $F(x_0, y_0) < 0$.

Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$ — какая-нибудь точка, не лежащая на прямой (1). Как и прежде, обозначим через $M_1 = (x_0, y_1)$ точку пересечения прямой (1) с прямой, проходящей через точку M_0 параллельно оси Oy. Тогда

$$Ax_0 + By_1 + C = 0.$$

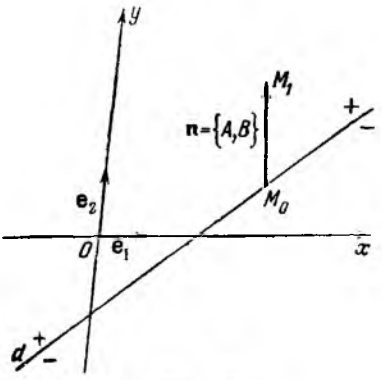


Рис. 70.

Так как мы предположили, что $B > 0$, то при $y_0 > y_1$ будет и $By_0 > By_1$, значит, $Ax_0 + By_0 + C > 0$; при $y_0 < y_1$ будет $By_0 < By_1$ и $Ax_0 + By_0 + C < 0$.

При $B < 0$ получаются противоположные неравенства.

Итак, для всех точек $M = (x_0, y_0)$, лежащих выше прямой (1), трехчлен $F(x, y)$ имеет один знак; для всех точек, лежащих ниже,— другой. Теорема доказана.

Говорят также, что точки одной полуплоскости лежат по одну сторону, точки другой полуплоскости — по другую сторону от пря-

мой (1), причем одну сторону (ту, где $Ax+By+C>0$) называем *положительной*, а другую (где $Ax+By+C<0$) *отрицательной* по отношению к данному уравнению (1) прямой d.

Теорема 4. *Если прямая d задана уравнением* (1), *то вектор* $\mathbf{n}=\{A, B\}$, *приложенный к какой-либо точке* $M_0=(x_0, y_0)$ *прямой* (1), *всегда направлен в положительную сторону от этой прямой.*

Это значит: если $\mathbf{n}=\{A, B\}=\overrightarrow{M_0M_1}$, где M_0 лежит на прямой (1), то точка $M_1=(x_1, y_1)$ лежит в положительной полуплоскости (рис. 70), для нее $Ax_1+By_1+C>0$. В самом деле, $x_1=x_0+A$, $y_1=y_0+B$. Вычисляем:

$$Ax_1+By_1+C=Ax_0+By_0+C+A^2+B^2=A^2+B^2>0.$$

Теорема доказана.

§ 7. Прямая на плоскости в прямоугольной системе координат. Нормальное уравнение прямой на плоскости

До сих пор предполагалось, что на плоскости дана произвольная аффинная система координат.

Предположим теперь, что эта система координат прямоугольная. Тогда уравнению всякой прямой на плоскости может быть придан так называемый нормальный вид.

Рассмотрим орт $\mathbf{e}$, перпендикулярный к нашей прямой d, причем если прямая d проходит через начало координат, то понимаем под $\mathbf{e}$ произвольный из двух взаимно противоположных ортов, перпендикулярных к прямой d, а если эта прямая не проходит через начало координат, то обозначаем через $\mathbf{e}$ тот из этих двух ортов, который направлен от начала координат O к прямой (т. е. имеет направление, совпадающее с направлением вектора $\overrightarrow{ON}$, где N — точка пересечения прямой d с перпендикуляром, опущенным на нее из начала координат) (рис. 71). Отсюда следует, что на оси, несущей вектор $\overrightarrow{ON}$ (или, что то же, орт $\mathbf{e}$), имеем

$$(ON)=\text{ав пр}_{\mathbf{e}}\overrightarrow{ON}=p\geqslant 0, \tag{1}$$

где p есть расстояние от начала координат до прямой d. Обозначая координаты орта $\mathbf{e}$ через ξ и η, имеем $\xi=\cos\alpha$, $\eta=\sin\alpha$, где α — угол наклона орта $\mathbf{e}$ к оси абсцисс [1]). Итак,

$$\mathbf{e}=\{\cos\alpha,\ \sin\alpha\}.$$

[1]) См. § 3 главы IV.

Пусть $M=(x, y)$ — какая-нибудь точка плоскости. В том и только в том случае, когда точка M лежит на прямой d, ее (ортогональная) проекция на прямую ON совпадает с точкой N, а проекция вектора $\overrightarrow{OM}$ совпадает с вектором $\overrightarrow{ON}$. Следовательно, для всех точек $M=(x, y)$ прямой d и только для этих точек выполнено условие

$$\text{ав пр}_{\mathbf{e}}\overrightarrow{OM}=p. \qquad (2)$$

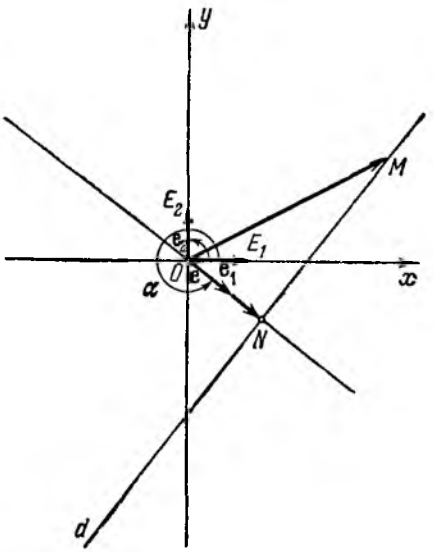


Рис. 71.

Так как $\overrightarrow{OM}=\{x, y\}$ и $\mathbf{e}=\{\cos\alpha, \sin\alpha\}$, то (см. (1) § 3 главы IV) имеем

$$\text{ав пр}_{\mathbf{e}}\overrightarrow{OM}=x\cos\alpha+y\sin\alpha,$$

так что условие (2) переписывается в виде уравнения

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0. \qquad (3)$$

Это уравнение и называется *нормальным уравнением прямой d*.

Пусть теперь дано какое-нибудь уравнение

$$Ax+By+C=0 \qquad (4)$$

нашей прямой d.

Так как уравнения (3) и (4) являются уравнениями одной и той же прямой в одной и той же системе координат, то существует такое число λ, что коэффициенты уравнения (3) получаются из коэффициентов уравнения (4) умножением на λ:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=A\lambda,\\ \sin\alpha&=B\lambda,\\ -p&=C\lambda.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Последнее из уравнений (5) (в случае $C\neq 0$) позволяет сразу определить знак λ: так как $p>0$, то

$$C\lambda=-p<0,$$

и знак λ противоположен знаку C.

Для определения модуля числа λ возводим каждое из двух первых уравнений (5) в квадрат и складываем. Получаем

$$(A^2+B^2)\lambda^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1,$$

откуда

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Число λ, *модуль которого есть* $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, *а знак противоположен знаку* C, *называется нормирующим множителем уравнения* (4); *при* $C=0$ *знак* λ *можно выбрать произвольно.*

Умножая обе части уравнения (4) на нормирующий множитель λ, мы превращаем это уравнение в нормальное уравнение (3) той же прямой.

Заметим, что *вектор* $\{A, B\} = \mathbf{n}$ *всегда перпендикулярен к прямой* (4) [1]). Это вытекает из того, что векторы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{n} = \{A, B\}$ коллинеарны (так как первый получается из второго умножением на λ), а вектор $\mathbf{e}$ перпендикулярен к прямой d, определяемой уравнением (4).

То же утверждение можно доказать, вспомнив, что всякий вектор $\mathbf{u} = \{\xi, \eta\}$, лежащий на прямой (4), удовлетворяет условию

$$A\xi + B\eta = 0,$$

т. е. $(\mathbf{n}, \mathbf{u}) = 0$, которое и означает взаимную перпендикулярность векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{u}$ (значит, и перпендикулярность между вектором $\mathbf{n}$ и прямой (4)).

§ 8. Расстояние от точки до прямой (на плоскости)

Под расстоянием от точки M_0 плоскости до прямой d, лежащей в этой плоскости, понимается длина перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую d.

Теорема 5. *Пусть в плоскости, снабженной прямоугольной системой координат, задана прямая* d *своим нормальным уравнением*

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{1}$$

Тогда расстояние $\rho(M_0, d)$ *произвольной точки* $M_0 = (x_0, y_0)$ *от прямой* d *равно числу*

$$|x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|.$$

Доказательство. Через точку M_0 проведем прямую d', параллельную прямой d (рис. 72), и рассмотрим ось, несущую приложенный к началу координат орт $\mathbf{e} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$; эта ось

[1]) Читатель помнит, что уравнение (4) взято относительно *прямоугольной* системы координат.

перпендикулярна к обеим прямым d и d' и пересекает их соответственно в точках N и N'. Длина вектора $\overrightarrow{NN'}$, равная модулю его алгебраического значения (NN') (на определенной выше оси), и есть искомое расстояние $\rho(M_0, d)$ между точкой M_0 и прямой d:

$$\rho(M_0, d) = |(NN')|.$$

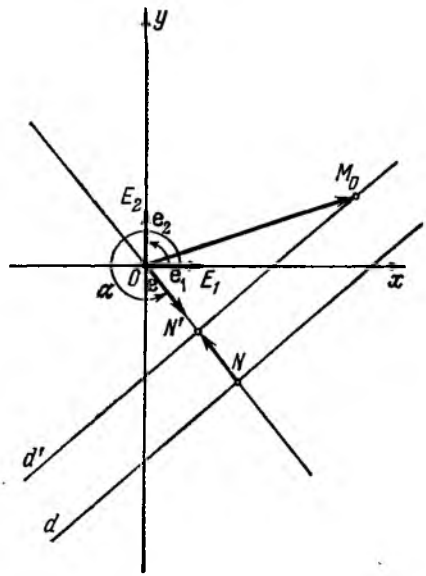


Рис. 72.

Но по лемме Шаля имеем (на той же оси)

$$\left.\begin{aligned}(ON') &= (ON) + (NN'),\\ (NN') &= (ON') - (ON),\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где

$$(ON') = \text{ав пр}_e \overrightarrow{OM_0} = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha,$$
$$(ON) = p.$$

Внося эти значения в (2), получаем

$$(NN') = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p,$$
$$\rho(M_0, d) = |(NN')| = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p|,$$

что и требовалось доказать.

Если прямая d дана своим общим уравнением

$$Ax + By + C = 0, \qquad (3)$$

то для определения ее расстояния от точки $M_0 = (x_0, y_0)$ надо сначала привести уравнение прямой к нормальному виду, т. е. умножить обе его части на $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. В результате получается формула

$$\rho(M_0, d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

§ 9. Углы, образуемые двумя прямыми на плоскости

1. Угол между двумя прямыми. *Углом между двумя прямыми* на плоскости называется угол между любым направляющим вектором одной и любым направляющим вектором другой прямой (рис. 73).

Очевидно, это определение дает нам не один, а два угла, дополняющие друг друга до π, т. е. оба смежных угла, образуемых двумя пересекающимися прямыми.

Предположим, что наши прямые d_1 и d_2 даны их уравнениями (в прямоугольной системе координат)

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad (I)$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0. \qquad (II)$$

Тогда в качестве направляющих векторов этих прямых мы можем взять, например, векторы

$$\mathbf{u}_1=\{-B_1,\ A_1\},\quad \mathbf{u}_2=\{-B_2,\ A_2\}. \qquad (1)$$

Угол φ между векторами $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ дается своим косинусом:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{(+\sqrt{A_1^2+B_1^2})(+\sqrt{A_2^2+B_2^2})}.$$

Если $A_1A_2+B_1B_2>0$, то мы получаем по этой формуле острый угол между прямыми d_1 и d_2.

Если $A_1A_2+B_1B_2<0$ — то тупой.

Равенство

$$A_1A_2+B_1B_2=0 \qquad (2)$$

выражает необходимое и достаточное *условие для перпендикулярности прямых* d_1 *и* d_2.

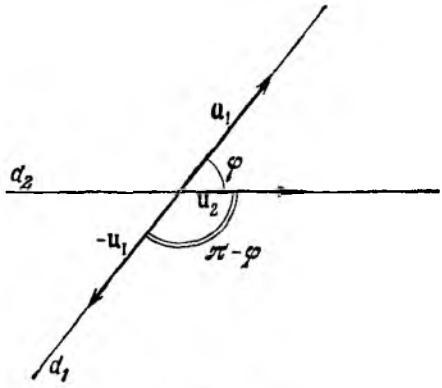


Рис. 73.

Часто бывает полезным следующее

Замечание. *Угол между векторами* $\mathbf{n}_1=\{A_1,\ B_1\}$, $\mathbf{n}_2=\{A_2,\ B_2\}$, *нормальными к прямым* d_1 *и* d_2, *равен тому углу между этими прямыми, в котором лежат точки, принадлежащие разноименным плоскостям, определяемым данными прямыми.*

В самом деле, пусть угол между векторами $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ равен α (рис. 74). Внутри угла, образованного данными прямыми, равного α, возьмем точку M_0 и опустим из нее перпендикуляры M_0M_1 и M_0M_2 на данные прямые. Угол β между лучами $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$ равен $\pi-\alpha$. Так как $\overrightarrow{M_0M_1}\parallel\mathbf{n}_1$, $\overrightarrow{M_0M_2}\parallel\mathbf{n}_2$ и $\alpha+\beta=\pi$, то один из лучей, пусть, например, $\overrightarrow{M_0M_1}$, одинаково направлен с соответствующим ему

вектором $\mathbf{n}_1$, тогда как другой луч $\overrightarrow{M_0M_2}$ и вектор $\mathbf{n}_2$ имеют противоположные направления. Поэтому луч, являющийся продолжением отрезка $\overline{M_0M_1}$ за точку M_1, лежит в положительной полуплоскости, определяемой уравнением $A_1x+B_1y+C_1=0$; луч же, являющийся продолжением отрезка $\overline{M_0M_2}$ за точку M_2, лежит в отрицательной полуплоскости, определяемой уравнением $A_2x+B_2y+C_2=0$. Отсюда следует, что точка M_0 лежит в отрицательной полуплоскости,

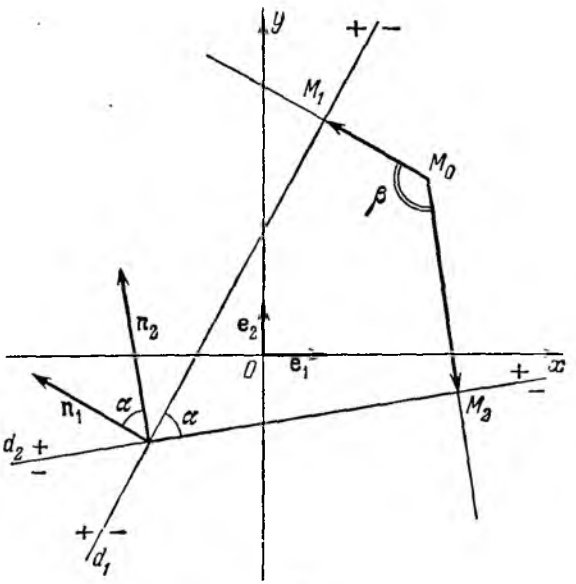


Рис. 74.

определяемой уравнением (I), и в положительной полуплоскости, определяемой уравнением (II).

2. Угол от первой прямой до второй. Если на плоскости выбрано положительное направление вращения, то можно говорить об угле от первой прямой до второй, понимая под этим снова угол от любого направляющего вектора первой до любого направляющего вектора второй прямой (рис. 75).

Так определенный угол $\theta_{1,2}$ определен с точностью до слагаемых вида $k\pi$, где k — целое.

Обозначая через α_1, соответственно α_2, угол наклона к оси абсцисс любого направляющего вектора соответственно первой и вто-

рой прямой (т. е. угол от орта оси абсцисс до соответствующего направляющего вектора), мы также получаем углы, определенные

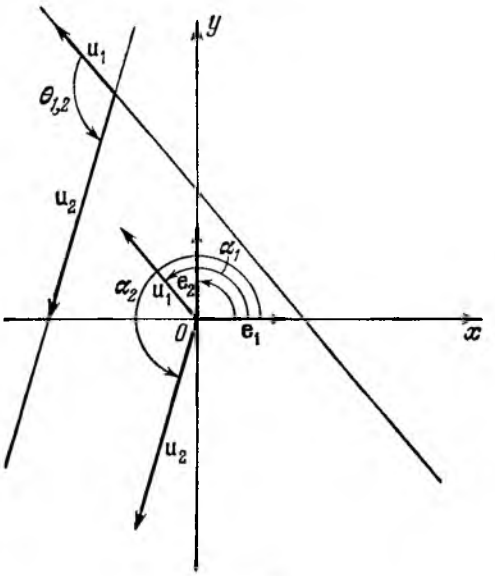


Рис. 75.

с точностью до слагаемых вида $k\pi$. При этом, все время с точностью до слагаемых вида $k\pi$, имеем $\theta_{1,2} = \alpha_2 - \alpha_1$, откуда

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta_{1,2} &= \sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1, \\ \cos\theta_{1,2} &= \cos\alpha_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_2\sin\alpha_1. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Беря снова направляющие векторы

$$\mathbf{u}_1 = \{-B_1, A_1\}, \qquad \mathbf{u}_2 = \{-B_2, A_2\},$$

получаем:

$$\sin\alpha_i = \frac{A_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}}, \qquad \cos\alpha_i = \frac{-B_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}}$$

и, подставляя эти значения в формулы (3), находим:

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta_{1,2} &= \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \\ \cos\theta_{1,2} &= \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\operatorname{tg}\theta_{1,2} = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \tag{5}$$

Если один из векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ заменить на противоположный, то изменится знак как у синуса угла (вследствие изменения направления вращения на противоположное), так и у косинуса (получается угол, смежный с рассмотренным); знак же тангенса угла от первого вектора до второго при такой замене не меняется.

Если прямые (I) и (II) даны своими уравнениями с угловым коэффициентом:

$$y = k_1 x + b_1, \tag{I'}$$

$$y = k_2 x + b_2, \tag{II'}$$

где $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$, то

$$\operatorname{tg} \theta_{1,2} = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2},$$

т. е.

$$\operatorname{tg} \theta_{1,2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{5'}$$

Если прямые (I) и (II) взаимно перпендикулярны, то можно положить $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$, значит, $\operatorname{tg} \alpha_2 = -\operatorname{ctg} \alpha_1$, т. е. $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, или

$$k_1 k_2 = -1 \quad (\textit{условие перпендикулярности}^1)). \tag{2'}$$

Формулы (5') и (2') можно получить и пользуясь общими уравнениями прямых (I) и (II) — подставляя в формулы (5) и (2) значения угловых коэффициентов

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}.$$

§ 10. Прямая в пространстве, снабженном прямоугольной системой координат

Если в пространстве дана прямоугольная система координат, то в качестве направляющего вектора всякой прямой всегда можно взять орт $\mathbf{u}_0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, так что каноническое уравнение прямой (уравнение (6) из § 4) примет вид

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\cos \beta} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma}, \tag{1}$$

где $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — какая-нибудь фиксированная точка нашей прямой, а $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — ее «направляющие косинусы», т. е. координаты одного из двух (взаимно противоположных) ортов, коллинеарных данной прямой.

---

[1]) Так как $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty$, то условие перпендикулярности (2') непосредственно следует из (5') и из $k_2 \neq k_1$.

Если даны две прямые: (1) и

$$\frac{x-x'_0}{\cos\alpha'}=\frac{y-y'_0}{\cos\beta'}=\frac{z-z'_0}{\cos\gamma'}, \tag{1'}$$

то углом между этими прямыми называется угол между любым направляющим вектором $\mathbf{u}_0$ одной и любым направляющим вектором $\mathbf{u}'_0$ другой прямой. Таким образом, угол между двумя прямыми определен неоднозначно: определены два угла, один — острый, другой — тупой, дополняющие друг друга до угла π. Обозначая любой из них через φ и предполагая, что φ есть угол между направляющими векторами $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}'_0$, имеем

$$\cos\varphi=\frac{(\mathbf{u}_0,\ \mathbf{u}'_0)}{|\mathbf{u}_0|\cdot|\mathbf{u}'_0|}. \tag{2}$$

Если $|\mathbf{u}_0|=1$, $|\mathbf{u}'_0|=1$, т. е. направляющие векторы суть орты, то (2) переходит в

$$\cos\varphi=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'. \tag{3}$$

В общем случае при $\mathbf{u}_0=\{a,\ b,\ c\}$, $\mathbf{u}'_0=\{a',\ b',\ c'\}$ имеем

$$\cos\varphi=\frac{aa'+bb'+cc'}{(+\sqrt{a^2+b^2+c^2})(+\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2})}. \tag{4}$$

Если это значение для $\cos\varphi$ положительное, то мы получили острый угол φ; если отрицательное — тупой.

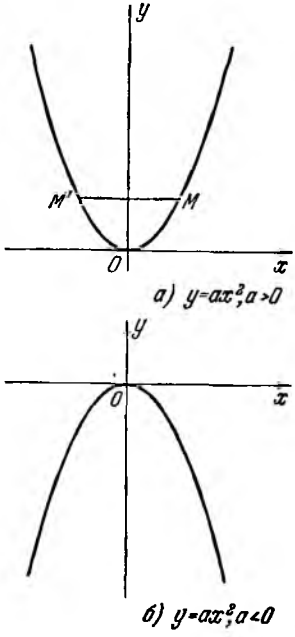
Из доказанного следует, что условие перпендикулярности двух прямых в пространстве, заданных в прямоугольной системе координат уравнениями (6) и (6′) § 4, есть

$$aa'+bb'+cc'=0. \tag{5}$$

ГЛАВА VI

ПАРАБОЛА. ЭЛЛИПС. ГИПЕРБОЛА

Во всей этой главе предполагается, что в плоскости (в которой лежат все рассматриваемые далее фигуры) выбран определенный масштаб; рассматриваются лишь прямоугольные системы координат с этим масштабом.



а) $y=ax^2, a>0$

б) $y=ax^2, a<0$

Рис. 76.

§ 1. Парабола

Парабола известна читателю из школьного курса математики как кривая, являющаяся графиком функции

$$y = ax^2, \qquad a \neq 0 \text{ (рис. 76).} \tag{1}$$

График любого квадратного трехчлена

$$y = ax^2 + bx + c \tag{2}$$

также является параболой; можно посредством одного лишь сдвига системы координат [1]) Oxy (на некоторый вектор $\overrightarrow{OO'}$), т. е. преобразования

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + x_0, \\ y &= y' + y_0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

достигнуть того, чтобы график функции $y' = ax'^2$ (во второй системе координат) совпадал с графиком (2) (в первой системе координат).

В самом деле, произведем подстановку (3) в равенство (2). Получим

$$y' + y_0 = a(x' + x_0)^2 + b(x' + x_0) + c,$$

[1]) См. § 2 главы III.

т. е.

$$y' = ax'^2 + (2ax_0 + b)x' + (ax_0^2 + bx_0 + c - y_0).$$

Мы хотим подобрать x_0 и y_0 так, чтобы коэффициент при x' и свободный член многочлена (относительно x') в правой части этого равенства были равны нулю. Для этого определяем x_0 из уравнения

$$2ax_0 + b = 0,$$

что и дает

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Теперь определяем y_0 из условия

$$ax_0^2 + bx_0 + c - y_0 = 0,$$

в которое подставляем уже найденное значение $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Получим

$$\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = y_0,$$

т. е.

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Итак, посредством сдвига (3), в котором

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

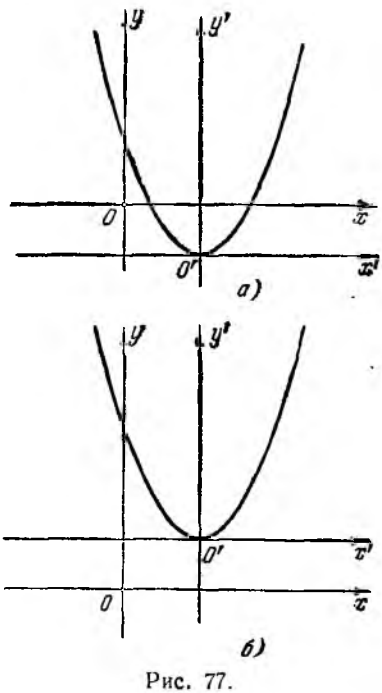


Рис. 77.

мы перешли к новой системе координат, в которой уравнение параболы (2) получило вид

$$y' = ax'^2$$ [1]) (рис. 77).

Вернемся к уравнению (1). Оно может служить определением параболы. Напомним ее простейшие свойства. Кривая имеет ось симметрии: если точка $M = (x, y)$ удовлетворяет уравнению (1), то точка $M' = (-x, y)$, симметричная точке M относительно оси ординат, также удовлетворяет уравнению (1) — кривая симметрична относительно оси ординат (рис. 76).

Если $a > 0$, то парабола (1) лежит в верхней полуплоскости $y \geqslant 0$, имея с осью абсцисс единственную общую точку O. При

[1]) Тот же результат можно получить и известным из средней школы способом «дополнения до полного квадрата».

неограниченном возрастании модуля абсцисс x ордината $y = ax^2$ также неограниченно возрастает. Общий вид кривой дан на рис. 76, *а*.

Если $a < 0$ (рис. 76, *б*), то кривая расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси абсцисс к кривой $y = |a|x^2$.

Если перейти к новой системе координат, полученной из старой заменой положительного направления оси ординат на противоположное[1]), то парабола, имеющая в старой системе уравнение $y = ax^2$, получит в новой системе координат уравнение $y = -ax^2$. Поэтому при изучении парабол можно ограничиться уравнениями (1), в которых $a > 0$.

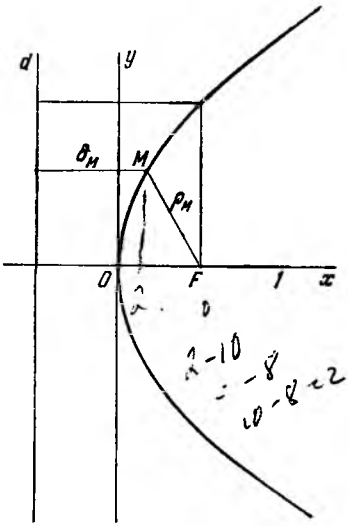


Рис. 78.

Поменяем, наконец, названия осей, т. е. перейдем к новой системе координат, в которой осью ординат будет старая ось абсцисс, а осью абсцисс — старая ось ординат. В этой новой системе уравнение (1) запишется в виде $y^2 = \frac{1}{a}x$ или, если число $\frac{1}{a}$ обозначить через $2p$, в виде

$$y^2 = 2px, \quad p > 0 \text{ (рис. 78)}. \qquad (4)$$

Уравнение (4) называется в аналитической геометрии *каноническим уравнением параболы*; прямоугольная система координат, в которой данная парабола имеет уравнение (4), называется *канонической системой координат* (для этой параболы).

Сейчас мы установим геометрический смысл коэффициента p. Для этого берем точку

$$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right), \qquad (5)$$

называемую *фокусом* параболы (4), и прямую d, определенную уравнением

$$x = -\frac{p}{2}. \qquad (6)$$

Эта прямая называется *директрисой*[2]) параболы (4) (см. рис. 78).

---

[1]) Обозначая координаты какой-нибудь точки M через x, y, получим в новой системе для той же точки координаты x, $-y$.

[2]) Ее можно было бы по-русски назвать «*направляющей*» прямой: латинское слово «director» (по-французски directeur) означает «правитель» (или управитель), женский род — directrix (по-французски directrice).

Пусть $M=(x, y)$ — произвольная точка параболы (4). Из уравнения (4) следует, что $x \geqslant 0$. Поэтому расстояние точки M от директрисы d есть число

$$\delta_M = \frac{p}{2} + x. \tag{7}$$

Расстояние точки M от фокуса F есть

$$r = \rho(F, M) = \rho_M = + \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \\ = + \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2}. \tag{7'}$$

Но $y^2 = 2px$, поэтому

$$r = + \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = x + \frac{p}{2} = \delta_M.$$

Итак, все точки M параболы равноудалены от ее фокуса и директрисы:

$$r = \delta_M. \tag{8}$$

Обратно, каждая точка M, удовлетворяющая условию (8), лежит на параболе (4).

В самом деле,

$$\delta_M = \left| x + \frac{p}{2} \right|, \qquad r = + \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Следовательно,

$$\left| x + \frac{p}{2} \right| = + \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

или

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

и, после раскрытия скобок и приведения подобных членов,

$$y^2 = 2px.$$

Мы доказали, что *каждая парабола* (4) *есть геометрическое место точек, равноудаленных от фокуса* F *и от директрисы* d *этой параболы.*

Вместе с тем мы установили и *геометрический смысл коэффициента* p *в уравнении* (4): *число* p *равно расстоянию между фокусом и директрисой параболы.*

Пусть теперь на плоскости даны произвольно точка F и прямая d, не проходящая через эту точку. Докажем, что существует парабола с фокусом F и директрисой d. Для этого проведем через

точку F прямую g (рис. 79), перпендикулярную к прямой d; точку пересечения обеих прямых обозначим через D; расстояние $|DF|$ (т. е. расстояние между точкой F и прямой d) обозначим через p. Прямую g превратим в ось, приняв на ней направление $\overrightarrow{DF}$ в качестве положительного. Эту ось сделаем осью абсцисс прямоугольной системы координат, началом которой является середина O отрезка $\overline{DF}$. Тогда $F=\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ и прямая d получает уравнение $x=-\frac{p}{2}$.

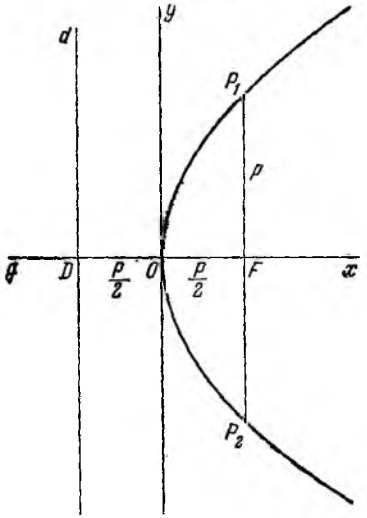


Рис. 79.

Теперь мы можем в выбранной системе координат написать каноническое уравнение параболы:

$$y^2=2px, \tag{4}$$

причем точка F будет фокусом, а прямая d — директрисой параболы (4).

Мы установили выше, что парабола есть геометрическое место точек M, равноудаленных от точки F и прямой d. Итак, мы можем дать такое геометрическое (т. е. не зависящее ни от какой системы координат) определение параболы.

Определение. *Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой фиксированной точки («фокуса» параболы) и некоторой фиксированной прямой («директрисы» параболы).*

Обозначая расстояние между фокусом и директрисой параболы через p, мы можем всегда найти прямоугольную систему координат, каноническую для данной параболы, т. е. такую, в которой уравнение параболы имеет канонический вид:

$$y^2=2px. \tag{4}$$

Обратно, всякая кривая, имеющая такое уравнение в некоторой прямоугольной системе координат, является параболой (в только что установленном геометрическом смысле).

Расстояние p между фокусом и директрисой параболы называется *фокальным параметром* или просто *параметром параболы*.

Прямая, проходящая через фокус перпендикулярно к директрисе параболы, называется ее *фокальной осью* (или просто *осью*); она является осью симметрии параболы — это вытекает из того, что ось параболы является осью абсцисс в системе координат, относительно

которой уравнение параболы имеет вид (4). Если точка $M=(x, y)$ удовлетворяет уравнению (4), то этому уравнению удовлетворяет и точка $M'=(x, -y)$, симметричная точке M относительно оси абсцисс.

Точка пересечения параболы с ее осью называется *вершиной* параболы; она является началом системы координат, канонической для данной параболы.

Дадим еще одно геометрическое истолкование параметра параболы.

Проведем через фокус параболы прямую, перпендикулярную к оси параболы; она пересечет параболу в двух точках P_1 и P_2 (см. рис. 79) и определит так называемую фокальную хорду $\overline{P_1P_2}$ параболы (т. е. хорду, проходящую через фокус параллельно директрисе [1]) параболы). *Половина длины фокальной хорды и есть параметр параболы.*

В самом деле, половина длины фокальной хорды есть абсолютная величина ординаты любой из точек P_1, P_2, абсцисса каждой из которых равна абсциссе фокуса, т. е. $\frac{p}{2}$. Поэтому для ординаты y каждой из точек P_1, P_2 имеем

$$y^2=2p\cdot\frac{p}{2}=p^2, \qquad |y|=p,$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Определение и каноническое уравнение эллипса

Определение. *Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2* (рис. 80) *есть постоянное число; это число мы обозначаем через $2a$. Точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса; расстояние между ними обозначается через $2c$ и называется фокусным расстоянием. Число a называется большой полуосью эллипса* (по причинам, которые выяснятся в дальнейшем). *Середина O отрезка $\overline{F_1F_2}$, соединяющего фокусы, называется центром эллипса, а вся прямая F_1F_2 называется его фокальной или первой осью. Прямая, проходящая через центр эллипса перпендикулярно к фокальной оси, называется второй осью эллипса* [2]).

Пусть M — какая-нибудь точка эллипса. Так как $2a=|\overline{F_1M}|+|\overline{F_2M}|\geqslant|\overline{F_1F_2}|=2c$, то $a\geqslant c$. Однако если $a=c$, то получаем совокупность всех точек M, для которых $|\overline{F_1M}|+|\overline{F_2M}|=|\overline{F_1F_2}|$,

---

[1]) Или перпендикулярно к оси.

[2]) Обычно их называют большой и малой осью, не считаясь с тем, что эти оси суть прямые, а соответствующие «полуоси» — числа!

т. е. отрезок $\overline{F_1F_2}$. Этот случай мы в дальнейшем рассматривать не будем и поэтому будем предполагать, что $a > c$.

Число

$$e = \frac{c}{a}$$

называется эксцентриситетом эллипса; оно всегда < 1. Эксцентриситет эллипса равен нулю тогда и только тогда, когда фокусы эллипса совпадают: $F_1 = F_2$. В этом случае эллипс превращается в геометрическое место точек M, расстояние которых от точки $F_1 = F_2$ равно a, т. е. в окружность радиуса a с центром $O = F_1 = F_2$; под осью окружности понимаем всякую прямую, проходящую через ее центр O.

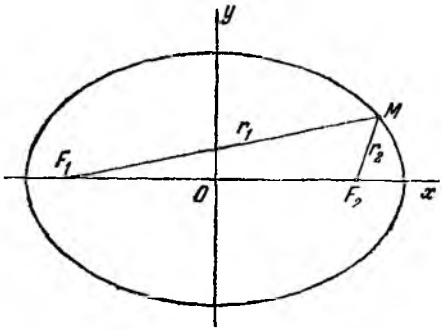


Рис. 80.

Пусть нам даи эллипс; значит, даны его фокусы F_1 и F_2 и дана его большая полуось a; все время, как сказано в самом начале главы, считаем данным масштаб, которым измеряются расстояния между точками на плоскости.

Значит, нам известно и число $c < a$, равное половине расстояния между фокусами.

Построим на плоскости прямоугольную систему координат, которую будем называть *канонической системой* (для данного эллипса). Ее начало O есть центр эллипса, а ось абсцисс совпадает с фокальной осью. Положительным направлением на ней считаем направление вектора $\overrightarrow{F_1F_2}$. Положительное направление на оси ординат выбираем произвольно.

В этой системе координиат имеем $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$; фокус F_1 условно называем *левым*, фокус F_2 — *правым*.

Предположим теперь, что $M = (x, y)$ — произвольная точка эллипса. Пусть $r_1 = \rho(F_1, M)$ и $r_2 = \rho(F_2, M)$ — расстояния точки M до фокусов F_1, соответственно F_2. Числа r_1 и r_2 называются *фокальными радиусами* точки M. Имеем:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Точка $M = (x, y)$ является точкой эллипса тогда и только тогда, когда

$$r_1 + r_2 = 2a, \tag{1}$$

т. е.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \qquad (1')$$

Это уравнение (в котором оба корня положнтельны) и есть уравнение эллипса в выбранной системе координат.

Преобразуем уравнение (1) к виду, который называется *каноническим уравнением эллипса*. Для этого перенесем второй радикал в правую часть. Возведя после этого обе части уравнения в квадрат, получаем

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

или (после раскрытия скобок и приведения подобных членов)

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx. \qquad (2)$$

Обе части равенства (2) снова возведем в квадрат, получим

$$a^2((x-c)^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

или (после очевидных упрощений)

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \qquad (3)$$

Так как $a>c$, то число a^2-c^2 положительно; обозначим его через b^2, называя *число* $b=+\sqrt{a^2-c^2}$ *малой полуосью эллипса*. Теперь равенство (3) можно переписать в виде

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

или

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.} \qquad (4)$$

Покажем теперь, что уравнение (4) действительно есть уравнение нашего эллипса, — ведь пока мы доказали только, что каждая точка $M=(x, y)$, удовлетворяющая уравнению (1'), удовлетворяет и уравнению (4). Остается доказать обратное утверждение, а именно, что каждая точка $M=(x, y)$, удовлетворяющая уравнению (4), есть точка эллипса, т. е. что для нее выполнено условие $r_1+r_2=2a$; это не очевидно, так как при переходе от уравнения (1') к уравнению (4) мы два раза возводили обе части уравнения в квадрат, а при этом могли появиться пары чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению (4), но не удовлетворяющие уравнению (1'). Итак, пусть $M=(x, y)$ — произвольная точка, удовлетворяющая уравнению (4). Найдем расстояния r_1, r_2 точки M от фокусов F_1 и F_2. Имеем

$$r_1=+\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \qquad (5)$$

причем из (4) имеем

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \tag{6}$$

Но $b^2 = a^2 - c^2$; подставляя это в (6), получаем

$$y^2 = a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2}{a^2}\,x^2.$$

Это значение y подставим в (5); получим

$$r_1 = +\sqrt{2cx + a^2 + \frac{c^2}{a^2}\,x^2} = +\sqrt{\left(a + \frac{c}{a}\,x\right)^2},$$

откуда

$$r_1 = \pm\left(a + \frac{c}{a}\,x\right) = \pm\,(a + ex). \tag{7}$$

Слева — положительное число r_1; справа надо взять такой знак, чтобы правая часть была тоже положительной. Но из (4) следует, что $|x| \leqslant a$; кроме того, $0 \leqslant e < 1$; значит, $|ex| < a$, т. е. всегда $a + ex > 0$, так что справа в (7) надо взять знак $+$, и мы получаем

$$\boxed{r_1 = a + ex.} \tag{I}$$

Точно так же

$$r_2 = +\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{8}$$

Это равенство отличается от (5) только тем, что в нем вместо c имеем $-c$. Поэтому, не повторяя выкладок, аналогичных только что проведенным, можем получить значение для r_2 сразу, заменяя в (7) c на $-c$. Получаем

$$r_2 = \pm\,(a - ex). \tag{9}$$

Снова имеем $|ex| < a$, значит, всегда $a - ex > 0$; справа надо опять взять знак $+$:

$$\boxed{r_2 = a - ex.} \tag{II}$$

Из (I) и (II) получаем $r_1 + r_2 = 2a$, точка $M = (x, y)$ принадлежит нашему эллипсу.

Итак, мы доказали, что уравнение (4) действительно есть уравнение эллипса; оно называется *каноническим уравнением эллипса*.

Формулы (I) и (II), очень просто — и даже линейно — выражают фокальные радиусы любой точки эллипса через абсциссу этой точки.

Кроме того, заметим, что из $b^2 = a^2 - c^2$ следует $c^2 = a^2 - b^2$; значит,

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \qquad \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2; \tag{10}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \qquad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}. \tag{11}$$

Эти формулы нам понадобятся в дальнейшем.

Из уравнения (4) легко выводятся некоторые свойства эллипса. Прежде всего, если точка $M=(x, y)$ лежит на нашем эллипсе, т. е. удовлетворяет уравнению (4), то тем же свойством обладает и точка $M'=(x, -y)$ (рис. 81), симметричная точке M относительно оси абсцисс (т. е. фокальной оси эллипса), а также точка $M''=(-x, y)$, симметричная точке M относительно оси ординат (т. е. второй оси эллипса). Итак, *обе оси эллипса* (первая и вторая) *являются его осями симметрии.*

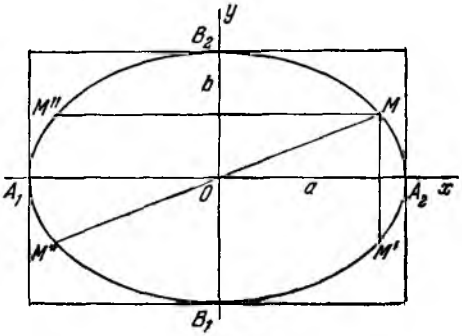


Рис. 81.

Центр эллипса является его центром симметрии: в самом деле, при нашем выборе системы координат центр есть начало координат O; если точка $M=(x, y)$ удовлетворяет уравнению (4), то и точка $M^*=(-x, -y)$, симметричная точке M относительно центра O, также удовлетворяет уравнению (4), откуда утверждение следует.

Заметим, наконец, что — в силу уравнения (4), которому удовлетворяют все точки эллипса, — для каждой точки $M=(x, y)$ эллипса имеем

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1, \quad \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,$$

т. е. $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant b$ — весь эллипс лежит в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x=\pm a$, $y=\pm b$, параллельными (второй и первой) осям эллипса и отстоящими от них соответственно на расстояние a и b. Этот прямоугольник называется *основным прямоугольником* для данного эллипса.

Точки $A_1=(-a, 0)$, $A_2=(a, 0)$, а также точки $B_1=(0, -b)$, $B_2=(0, b)$, т. е. *точки пересечения эллипса с его осями,* называются *вершинами* эллипса.

Таким образом, у эллипса (не являющегося окружностью) имеется четыре вершины.

Замечание. Непосредственно из определения эллипса вытекает следующий общеизвестный способ его построения. В чертежную доску вбиваются два гвоздика F_1 и F_2 (с расстоянием $2c$ между ними). На них накидывается замкнутая нить длины $2a+2c$; натянув эту нить приложением к ней острия карандаша, передвигают

карандаш так, чтобы нить все время была натянутой. При этом карандаш вычертит эллипс, как геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух фокусов F_1 и F_2, очевидно, равна $2a$ [1]).

§ 3. Параметрическая запись уравнения эллипса; построение эллипса по точкам. Эллипс как результат сжатия окружности к одному из ее диаметров

Пусть на плоскости дан эллипс своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

Построим две окружности — «большую» и «малую» — с общим центром в начале координат и радиусами a — у «большой окружности» и b — у «малой окружности» (рис. 82). Проведем из начала координат произвольный луч. Угол его наклона к оси абсцисс обозначим через φ. Точку пересечения нашего луча с большой окружностью обозначим через L, а с малой — через K. Через точки K и L проведем прямые k и l, параллельные оси Oy (пересекающие ось Ox в точках K' и L'). Через точку K проведем прямую, параллельную оси Ox. Точку пересечения этой прямой с прямой l обозначим через M. При $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ получаем $M=L$; при $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ точка $M=K$; это вершины эллипса. Вообще же при $0<\varphi<\pi$ наше построение дает некоторую точку верхней, а при $\pi<\varphi<2\pi$ — точку нижней полуплоскости, так что на каждой вертикальной прямой $x=m$, $-a<m<a$, получаем ровно две точки M.

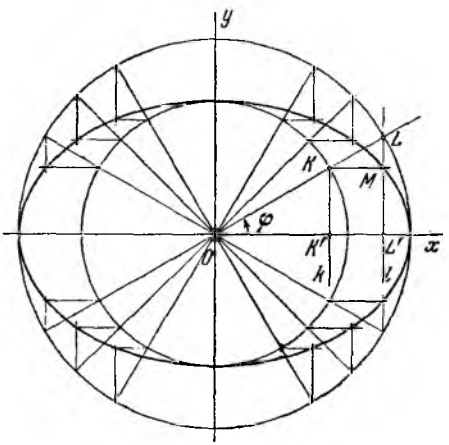


Рис. 82.

[1]) В чертежной практике применяются многочисленные другие способы построения эллипса; см., например, Б. Н. Делоне и Д. А. Райков, Аналитическая геометрия, т. I, М.— Л., Гостехиздат, 1948, стр. 257—265.

Докажем, что каждая из этих точек лежит на эллипсе (1). В самом деле, для координат x, y точки M имеем

$$\left.\begin{aligned} x = (OL') &= |\overline{OL}| \cos\varphi = a\cos\varphi, \\ y = (L'M) &= (K'K) = |\overline{OK}| \sin\varphi = b\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

так что $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, чем утверждение доказано.

Докажем, что наше построение — а следовательно, совокупность уравнений (2) — при некотором φ дает нам любую точку эллипса.

В самом деле, пусть $N = (x_0, y_0)$ — какая-нибудь точка эллипса, $-a < x_0 < a$. На прямой $x = x_0$ наше построение дает нам две точки M, и они, удовлетворяя уравнению (1), лежат на нашем эллипсе. Если бы ни одна из них не совпадала с точкой N, то на прямой $x = x_0$ оказалось бы три точки эллипса, чего быть не может, так как, полагая в уравнении (1) $x = x_0$, получаем для определения ординаты y_0 точки пересечения прямой $x = x_0$ с эллипсом (1) квадратное уравнение.

Мы доказали следующее предложение:

Все точки эллипса (1) *и только эти точки удовлетворяют системе уравнений*

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\varphi, \\ y &= b\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \qquad (3)$$

Эту систему называем поэтому «*параметрической записью уравнения эллипса*» или просто «*параметрическим уравнением эллипса*» (не боясь того, что уравнений здесь два, а не одно).

Вместе с тем мы дали способ построения эллипса «по точкам», вернее, способ построения произвольно большого числа точек эллипса. Но мы доказали, кроме того, одно важное и наглядное свойство эллипса. В самом деле, вернемся к рис. 82. Точка $M = (x, y)$ есть (произвольная) точка эллипса, а $L = (x, Y)$ есть точка большой окружности, имеющая ту же абсциссу, т. е. лежащая на той же вертикальной прямой, что и точка M. Тогда $Y = (L'L)$, а $y = (L'M) = (K'K)$. Из подобия треугольников OKK' и OLL' имеем $\frac{(K'K)}{(L'L)} = \frac{|\overline{OK}|}{|\overline{OL}|} = \frac{b}{a}$, т. е. $y = \frac{b}{a}Y$. Таким образом, наш эллипс получился из «большой» окружности преобразованием плоскости, заключающимся в том, что все точки оси абсцисс остаются на месте, а каждая точка P (рис. 83), не лежащая на этой оси, переходит в точку P^* с той же абсциссой, но с ординатой, полученной из ординаты точки P умножением на число $\frac{b}{a}$, — ордината каждой точки «сжалась» в отношении $\frac{b}{a}$. Такое

преобразование называется *равномерным сжатием плоскости к оси абсцисс в отношении* $\frac{b}{a}$.

Вообще, *равномерным сжатием плоскости к данной прямой* d *в отношении* $k > 0$ называется преобразование плоскости, состоящее в следующем: каждая точка прямой d остается на месте; произвольная точка P, не лежащая на прямой d, переходит в точку P^*, лежащую на перпендикуляре $\overline{PP'}$ к прямой d (см. рис. 83) по ту же сторону от этой прямой, что и точка P и определенную условием $|\overline{P'P^*}| = k\,|\overline{P'P}|$, где P' — основание перпендикуляра, т. е. пересечение его с прямой d.

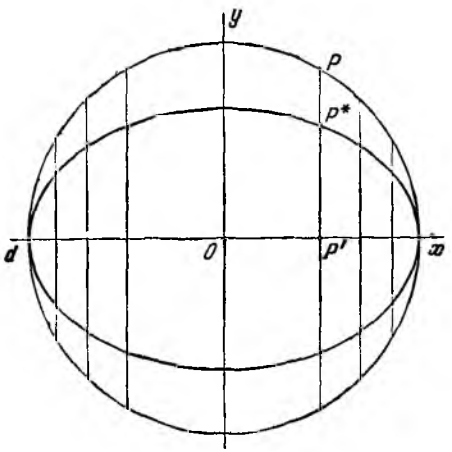


Рис. 83.

Термин «сжатие» наглядно оправдан лишь при $k < 1$ (см. рис. 83); при $k > 1$ происходит не сжатие, а «растяжение». Тем не менее мы будем употреблять термин «сжатие» в случае любого k. Читатель сам докажет, что наш эллипс может быть получен из малой окружности сжатием ее в отношении $\frac{a}{b}$ (т. е., говоря точнее, растяжением ее) к оси ординат.

Итак, доказано следующее предложение:

Всякий эллипс получается сжатием окружности к одному из ее диаметров [1]).

Из этого предложения и иллюстрирующего его рис. 83 легче всего уяснить форму эллипса. Впрочем, вероятно, читатель представлял себе ее и до того, как знакомился с этими лекциями.

§ 4. Эллипс как проекция окружности и как сечение круглого цилиндра

Пусть даны две плоскости α и β, пересекающиеся по некоторой прямой d (рис. 84). Острый угол между плоскостями α и β обозначим через φ.

---

[1]) Сам этот диаметр оказывается при $k < 1$ первой осью эллипса $\left(\text{тогда } k = \frac{b}{a}\right)$, а при $k > 1$ — второй осью $\left(k = \frac{a}{b}\right)$.

В плоскости β дана окружность K радиуса a с центром O, который (для удобства) предполагаем лежащим на прямой d. Докажем, что *ортогональная проекция K' окружности K на плоскость α есть эллипс.*

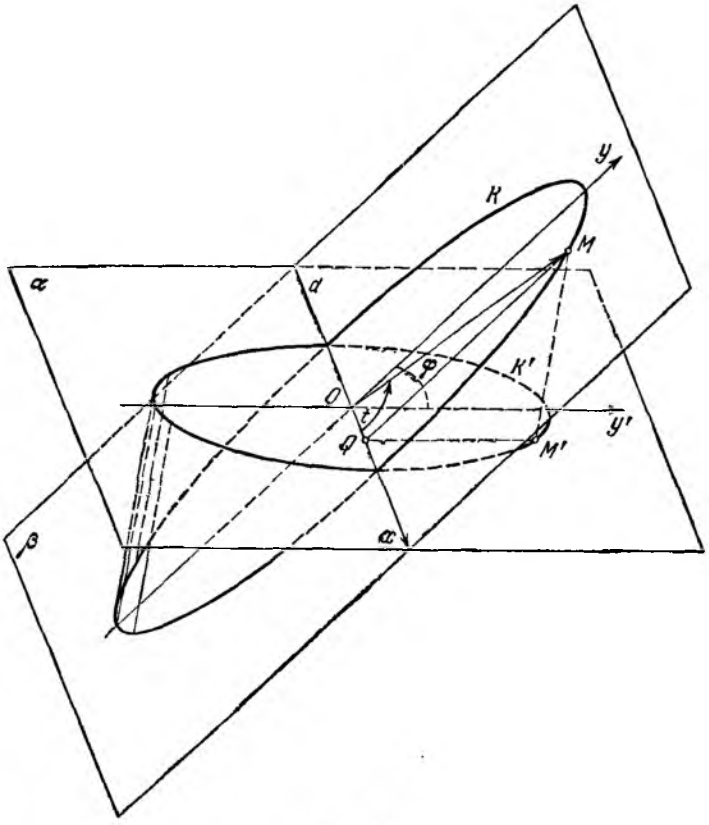


Рис. 84.

Для доказательства берем в плоскостях α и β по прямоугольной системе координат с общим началом O и общей осью абсцисс, идущей по прямой d. Оси ординат в плоскостях α и β направляем так, чтобы угол между их ортами был равен углу φ.

Пусть M—произвольная точка окружности K; ее проекцию на плоскость α обозначим через M'. Угол наклона вектора $\overrightarrow{OM}$ (в плоскости β) к оси абсцисс Ox обозначим через t. Тогда для координат x, y точки M' на плоскости α, обозначая через Q ортогональную

проекцию точки M' (и точки M) на ось абсцисс, имеем

$$x = (OQ) = |\overrightarrow{OM}| \cos t = a \cos t,$$
$$y = (QM') = |\overrightarrow{QM}| \cos \varphi = |\overrightarrow{OM}| \sin t \cos \varphi = a \cos \varphi \sin t.$$

Обозначая постоянную $a \cos \varphi$ через b, имеем

$$x = a \cos t,$$
$$y = b \sin t,$$

т. е. параметрическую форму уравнения эллипса, которой, таким образом, и удовлетворяют координаты любой точки M' нашей кривой K' (определенной как проекция окружности K на плоскость α). Следовательно, кривая K' есть эллипс, и наше утверждение доказано.

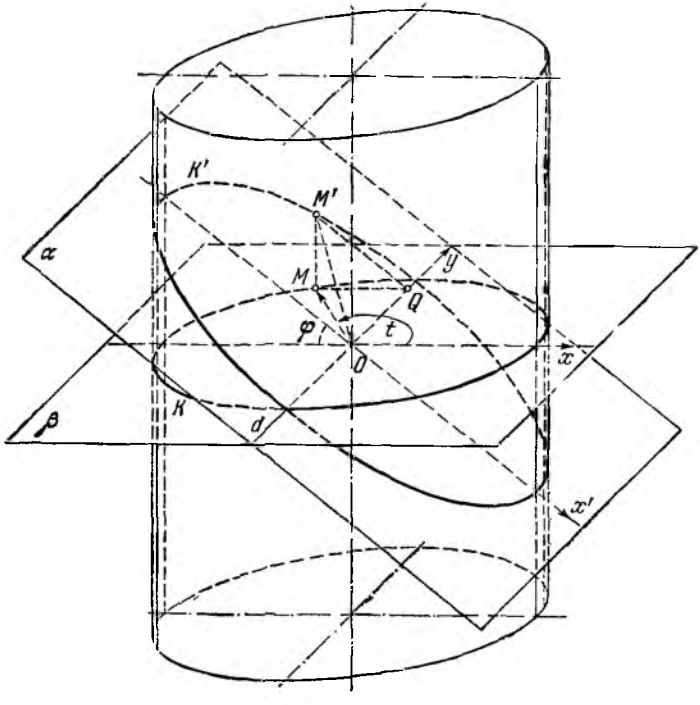


Рис. 85.

Всякий знает из опыта, что если резать колбасу «наискось», то полученные ломтики ее будут иметь форму эллипса. Дадим строгое

доказательство этому факту. Докажем, что *сечение круглого цилиндра плоскостью, не параллельной оси цилиндра, есть эллипс.*

Секущую плоскость обозначим через α, точку ее пересечения с осью цилиндра обозначим через O (рис. 85). Эту точку сделаем началом прямоугольной системы координат $Ox'y$, ось ординат которой идет по прямой пересечения d плоскости α с плоскостью β, проходящей через точку O перпендикулярно к оси цилиндра. Обозначая через Ox проекцию оси Ox' на плоскость β, получаем в плоскости β прямоугольную систему координат Oxy. Острый угол между плоскостями α и β обозначаем через φ.

Плоскость β пересекает цилиндр по окружности K (являющейся ортогональной проекцией на плоскость β интересующей нас кривой K' — кривой пересечения цилиндра с плоскостью α).

Пусть M' — произвольная точка кривой K', а M — ее проекция на плоскость β (точка M лежит на окружности K радиуса b). Точки M и M' лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости β; проводя через эту прямую плоскость, перпендикулярную к оси Oy, получим в пересечении с последней точку Q — проекцию на ось Oy обеих точек M и M'. Угол наклона вектора $\overrightarrow{OM}$ к оси Ox обозначим через t. Тогда имеем для координат x', y точки M'

$$\left.\begin{aligned} y &= (OQ) = |\overrightarrow{OM}| \sin t = b \sin t, \\ x' &= (QM') = \frac{(QM)}{\cos\varphi} = \frac{|\overrightarrow{OM}| \cos t}{\cos\varphi} = \frac{b}{\cos\varphi} \cos t. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Постоянную $\frac{b}{\cos\varphi}$ обозначаем через a, что при подстановке в (1) дает для координат произвольной точки M' кривой K' равенства

$$x' = a \cos t,$$
$$y = b \sin t;$$

мы снова получили в качестве параметрического уравнения кривой K' параметрическое уравнение эллипса. Теорема доказана.

§ 5. Определение гиперболы. Каноническое уравнение гиперболы

Определение. *Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2* (рис. 86) *есть положительная постоянная. Эту постоянную обозначим через $2a$. Число a будем называть первой полуосью гиперболы. Точки F_1 и F_2 называются фокусами гиперболы. Расстояние между ними обозначается через $2c$ и называется фокусным расстоянием. Как и в случае эллипса, середина отрезка $\overline{F_1F_2}$ называется центром гиперболы. Прямая, на которой*

лежат фокусы гиперболы, называется фокальной или первой (или действительной) осью гиперболы. Прямая, проходящая через центр перпендикулярно к первой оси гиперболы, называется ее второй (или мнимой [1])) осью.

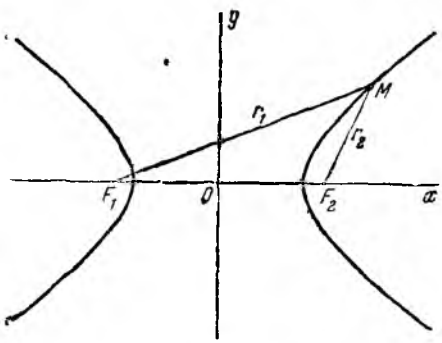


Рис. 86.

Из рис. 86 ясно, что

$$|\overline{F_1F_2}| \geqslant ||\overline{MF_1}| - |\overline{MF_2}||,$$

т. е. $c \geqslant a$.

Если $c = a$, то мы получаем точки M, для которых или

$$|\overline{MF_1}| - |\overline{MF_2}| = |\overline{F_1F_2}|,$$

или

$$|\overline{MF_2}| - |\overline{MF_1}| = |\overline{F_1F_2}|.$$

Эти точки M заполняют две полупрямые, дополняющие отрезок $\overline{F_1F_2}$ до всей прямой. Поэтому случай $c = a$ рассматривать не будем. Предполагаем, что $c > a$. Как и в случае эллипса, *число* $\frac{c}{a}$ *называем эксцентриситетом гиперболы и обозначаем через* e. Имеем

$$e = \frac{c}{a} > 1.$$

Пусть нам дана гипербола, т. е. даны ее фокусы F_1 и F_2, а также числа a и c. Как и в случае эллипса, построим на плоскости прямоугольную систему координат, которую будем называть *канонической* (для данной гиперболы). Начало этой системы координат лежит в центре O гиперболы, ось абсцисс совпадает с фокальной осью гиперболы. За положительное направление оси абсцисс примем направление вектора $\overrightarrow{F_1F_2}$. Тогда $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$.

Пусть $M = (x, y)$ — произвольная точка гиперболы. Обозначим через $r_1 = \rho(F_1, M)$ и $r_2 = \rho(F_2, M)$ расстояния точки $M = (x, y)$ соответственно до фокусов F_1 и F_2. Числа r_1 и r_2 называются *фокальными радиусами* точки M.

Имеем

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{1}$$

[1]) Когда мы познакомимся в главе XV с пополнением плоскости так называемыми мнимыми ее точками, то узнаем, что «мнимая» ось гиперболы пересекается с гиперболой в двух мнимых точках (тогда как «действительная» ось пересекается, очевидно, в двух обыкновенных «действительных» точках; отсюда названия — «действительная» и «мнимая» ось, вероятно, кажущиеся читателю (как и автору) довольно бессмысленными.

Точка $M=(x, y)$ есть точка гиперболы тогда и только тогда, когда

$$|r_1-r_2|=2a \tag{2}$$

или

$$r_1-r_2=\pm 2a.$$

Если принять во внимание равенства (1), то имеем (предполагая квадратные корни положительными)

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \tag{3}$$

Это уравнение и есть уравнение нашей гиперболы в выбранной системе координат.

Преобразуем уравнение (3) к виду, который называется *каноническим*. Для этого уединим первый радикал. Возведя затем обе части уравнения в квадрат, получаем

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

или (после простых преобразований)

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Обе части последнего равенства снова возведем в квадрат. Получим

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

или

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2). \tag{4}$$

Так как $c>a$, то число c^2-a^2 положительно; обозначим его через b^2, считая $b=+\sqrt{c^2-a^2}$. Равенство (4) можно переписать в виде

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

или

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.} \tag{5}$$

Осталось показать, что уравнение (5) действительно есть уравнение нашей гиперболы: пока мы доказали лишь, что каждая точка $M=(x, y)$, удовлетворяющая уравнению (2), удовлетворяет и уравнению (5); как и в случае эллипса, еще надо доказать, что каждая точка $M=(x, y)$, удовлетворяющая уравнению (5), удовлетворяет и уравнению (2).

Пусть $M=(x, y)$ — произвольная точка, удовлетворяющая уравнению (5). Найдем фокальные радиусы r_1 и r_2 точки M. Имеем

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}. \tag{1_1}$$

Из (5) находим (помня, что $b^2 = c^2 - a^2$)

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2} x^2 - x^2 - c^2 + a^2.$$

Подставляя это выражение для y^2 в (1_1) и учитывая, что $\frac{c}{a} = e$, имеем

$$r_1 = \sqrt{x^2 + 2eax + a^2e^2 + e^2x^2 - x^2 - a^2e^2 + a^2} = \sqrt{(a + ex)^2},$$

т. е.

$$r_1 = \pm (a + ex). \qquad (6_1)$$

Совершенно аналогично имеем

$$r_2 = \pm (a - ex). \qquad (6_2)$$

Так как r_1 и r_2 — положительные числа, то надо знак перед скобками выбрать так, чтобы и правые части равенств (6_1) и (6_2) были положительными. Для этого исследуем различные возможные случаи, представляемые равенствами (6_1) и (6_2). Из уравнения (5) находим прежде всего, что $|x| \geqslant a > 0$. Поэтому имеем два основных случая: в зависимости от того, лежит ли точка $M = (x, y)$ в правой полуплоскости $x > 0$ или в левой $x < 0$. Так как $e > 1$, то в обоих случаях имеем

$$|ex| > a. \qquad (7)$$

При $x > 0$ внутри скобки в (6_1) стоит положительное число, поэтому скобку надо взять со знаком $+$, и мы получаем

$$\boxed{r_1 = a + ex \quad \text{при} \quad x > 0.} \qquad (I^+)$$

Из (7) следует, что при $x > 0$ внутри скобки (6_2) стоит отрицательное число, скобку надо взять со знаком —, так что

$$\boxed{r_2 = -a + ex \quad \text{при} \quad x > 0.} \qquad (II^+)$$

Из (I^+) и (II^+) следует, что при $x > 0$ имеем

$$r_1 - r_2 = 2a,$$

и точка $M = (x, y)$, удовлетворяющая уравнению (5), лежит на гиперболе.

Пусть $x < 0$; из (7) следует, что теперь внутри скобки (6_1) стоит отрицательное число, значит, перед скобкой надо взять знак —, так что

$$\boxed{r_1 = -a - ex \quad \text{при} \quad x < 0.} \qquad (I^-)$$

Зато **внутри** скобки в (6_2) стоит теперь число **положительное**, значит,

$$\boxed{r_2 = a - ex \quad \text{при} \quad x < 0.} \qquad (\text{II}^-)$$

Имеем

$$r_2 - r_1 = 2a.$$

Итак, во всех случаях всякая точка, удовлетворяющая уравнению (5), лежит на гиперболе — мы доказали, что уравнение (5) действительно является уравнением нашей гиперболы. Оно называется *каноническим уравнением гиперболы*.

Формулы (I), (II) линейно выражают фокальные радиусы любой точки гиперболы через ее абсциссу.

Заметив, что $c^2 = a^2 + b^2$, получаем

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2, \qquad (8)$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}, \qquad e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \qquad (9)$$

Из уравнения (5) вытекает (как и в случае эллипса), что обе оси гиперболы являются ее осями симметрии, а центр гиперболы есть ее центр симметрии.

Переписывая уравнение гиперболы (5) в виде

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

и замечая, что его левая часть всегда $\geqslant 0$, видим, что для точек гиперболы должно быть $\frac{x^2}{a^2} - 1 \geqslant 0$, т. е. $|x| \geqslant a$. Другими словами, в полосе $-a < x < a$, ограниченной прямыми $x = \pm a$ (на рис. 87 эта полоса заштрихована), в частности на второй оси $x = 0$, не содержится точек гиперболы: все они лежат или вправо от прямой $x = a$, или влево от прямой $x = -a$, кроме двух точек $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, лежащих на самих этих прямых и являющихся точками пересечения гиперболы с ее фокальной осью. Эти две точки называются *вершинами* гиперболы.

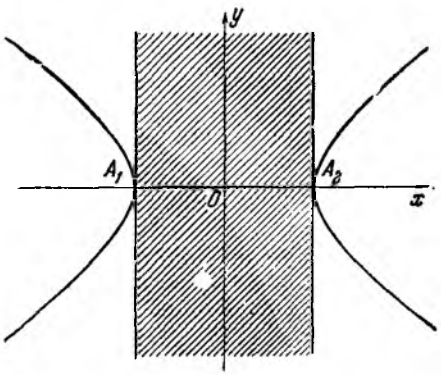


Рис. 87.

Итак, гипербола распадается на две ветви: «правую», для точек которой абсцисса $x \geqslant a$, и «левую», для точек которой $x \leqslant -a$.

Чтобы ближе познакомиться с общим видом гиперболы, надо определить прямые, называемые ее асимптотами.

§ 6. Основной прямоугольник и асимптоты гиперболы

Как и в случае эллипса, *основным прямоугольником* гиперболы называется прямоугольник, ограниченный прямыми, параллельными второй и первой осям гиперболы и отстоящими от них соответственно на расстояния a и b (рис. 88). В канонической системе координат уравнения этих прямых суть $x = \pm a$, $y = \pm b$, тогда как уравнение самой гиперболы имеет вид

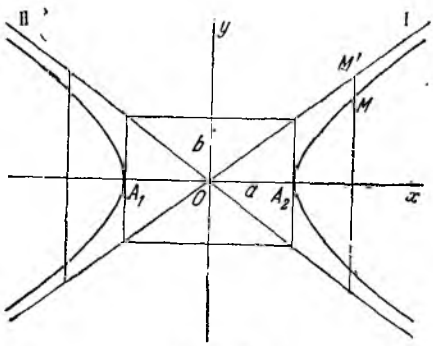


Рис. 88.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Диагонали основного прямоугольника [1]) суть прямые, имеющие своими уравнениями (все в той же системе координат, канонической для данной гиперболы)

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \qquad (2)$$

Эти прямые называются *асимптотами* гиперболы. Прямую $y = \frac{b}{a} x$ будем называть *первой*, а прямую $y = -\frac{b}{a} x$ — *второй* асимптотой.

Возьмем какое-нибудь значение переменного x, $x \geqslant a$. Ему соответствует в верхней полуплоскости точка M гиперболы с абсциссой x (см. рис. 88) и точка M' (первой) асимптоты с тою же абсциссой x:

$$M = (x,\ y), \qquad M' = (x,\ y').$$

При этом

$$y' = \frac{b}{a} x. \qquad (2^+)$$

[1]) Под *диагональю* прямоугольника (и вообще многоугольника) понимается вся бесконечная прямая, проходящая через две данные (не соседние) вершины многоугольника.

Чтобы найти ординату y точки M на гиперболе, достаточно решить уравнение (1) относительно y; получим

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \qquad (1^+)$$

При этом (так как мы находимся в верхней полуплоскости) радикал надо брать со знаком $+$. Сравнивая правые части равенств (2^+) и (1^+), прежде всего видим, что $\frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} > \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Другими словами, точка M, имея ту же абсциссу, что и точка M', имеет меньшую ординату, т. е. лежит под точкой M'. Оценим разность ординат:

$$0 < y' - y = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) =$$

$$= \frac{b}{a}\,\frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

При неограниченном возрастании x разность

$$y' - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}},$$

оставаясь положительной, монотонно убывает и стремится к нулю, т. е. точки M и M', уходя в бесконечность (при неограниченном возрастании их общей абсциссы x), неограниченно сближаются между собою. При этом точка M гиперболы все время остается под точкой M' асимптоты.

На нижней полуплоскости положение аналогично [1]); при неограниченном возрастании (положительной) абсциссы x точка $M = (x, y)$ гиперболы (имеющая абсциссу x и лежащая в нижней полуплоскости) неограниченно сближается с точкой $M' = (x, y')$ второй асимптоты, причем

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

$$y' = -\frac{b}{a}x,$$

$$0 < y - y' = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \to 0,$$

точка M лежит выше точки M'.

Мы исследовали взаимное расположение точек гиперболы и пары ее асимптот при $x \geqslant a$. Картина при $x \leqslant -a$ получается по

[1]) Что следует из симметрии фигуры, составленной из гиперболы и пары ее асимптот, относительно оси абсцисс.

симметрии (так как фигура, состоящая из гиперболы и двух ее асимптот, симметрична и относительно оси ординат). В целом общий вид гиперболы ясен из рис. 88.

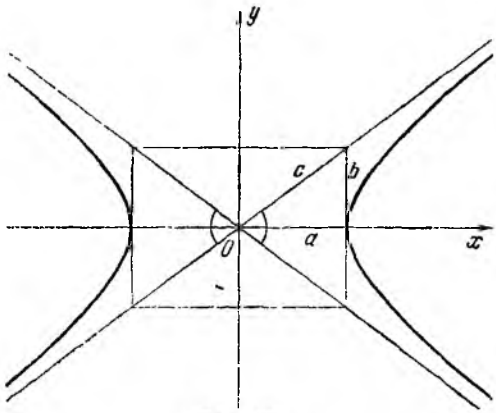


Рис. 89.

Из произведенного исследования взаимного расположения гиперболы и ее асимптот следует, что гипербола не имеет ни одной общей точки ни с одной из своих асимптот. Этот геометрический факт легко доказывается и алгебраически: если бы существовала общая точка $M=(x, y)$ гиперболы и ее асимптоты, то координаты x, y этой точки должны были бы одновременно удовлетворять уравнениям (1) и (2), которые несовместимы (подставляя (2) в (1), получим $\frac{x^2}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{b^2}=1$, т. е. $0=1$).

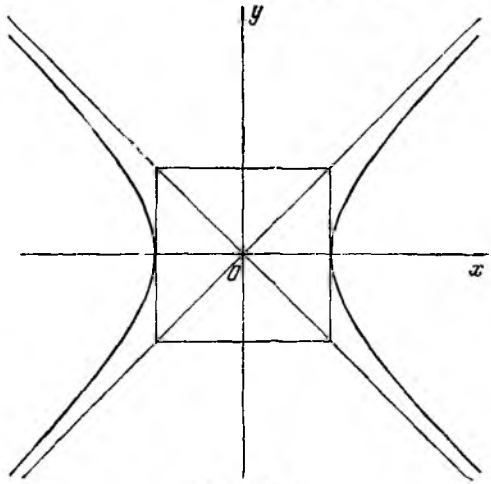


Рис. 90.

Замечание. Из формул (9) § 5 следует, что **эксцентриситет гиперболы**

$$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

(всегда больший единицы) равен отношению длины диагонали [1]) основного прямоугольника к его основанию (т. е. к стороне, параллельной фокальной оси гиперболы (рис. 89)). Эксцентриситет тем меньше, чем меньше отношение высоты основного прямоугольника к его основанию, т. е. чем острее угол между асимптотами.

Если $b=a$, т. е. если основной прямоугольник есть квадрат (рис. 90), то эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{2}$ и асимптоты взаимно перпендикулярны. В этом случае гипербола называется *равнобочной* или *равносторонней*; ее уравнение есть

$$x^2-y^2=a^2.$$

В главе VIII мы увидим, что если за оси координат принять асимптоты равнобочной гиперболы, то уравнением этой гиперболы будет

$$xy=\frac{a^2}{2}$$

или, полагая $\frac{a^2}{2}=k$,

$$y=\frac{k}{x},$$

— мы получим уравнение гиперболы, как «графика обратной пропорциональности», известное из курса средней школы.

§ 7. Директрисы эллипса и гиперболы

Директрисой эллипса (гиперболы), соответствующей данному фокусу F, называется прямая d, перпендикулярная к фокальной оси кривой, отстоящая от центра на расстояние $\frac{a}{e}$ и лежащая по ту же сторону от центра, что и фокус F (рис. 91 и 92).

Таким образом, и у эллипса (не являющегося окружностью), и у гиперболы — две директрисы.

Если взята каноническая для данной кривой прямоугольная система координат, то уравнение директрис d_1, d_2 (соответствующих фокусам F_1, F_2) будет соответственно

$$x=-\frac{a}{e}, \qquad (1_1)$$

$$x=\frac{a}{e}. \qquad (1_2)$$

[1]) В элементарно геометрическом смысле.

Для эллипса $e < 1$, поэтому директрисы эллипса удалены от центра на расстояние, большее a, т. е. расположены за пределами основного прямоугольника (см. рис. 91).

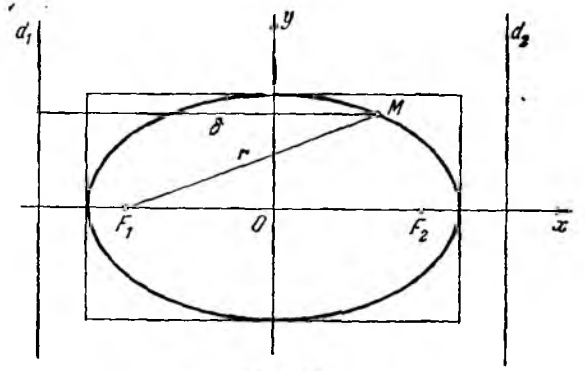


Рис. 91.

Для гиперболы $e > 1$, поэтому директрисы гиперболы удалены от ее центра на расстояние, меньшее a, они пересекают основной прямоугольник и проходят между центром и соответствующей вершиной гиперболы (см. рис. 92).

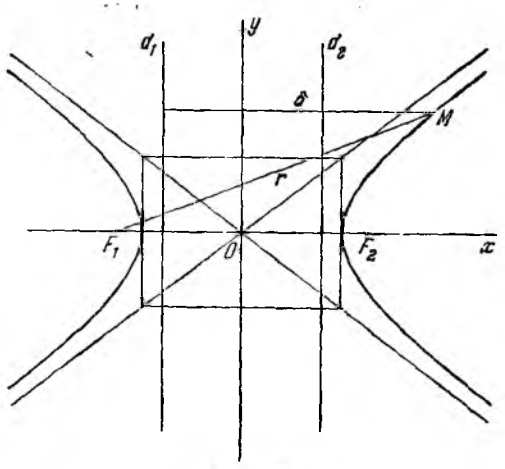


Рис. 92.

Заметим, наконец, что расстояние Δ директрисы от соответствующего ей фокуса есть

1) в случае эллипса

$$\Delta = \frac{a}{e} - ae = a\frac{1-e^2}{e} = \frac{1}{e}\cdot\frac{b^2}{a};$$

2) в случае гиперболы

$$\Delta = ae - \frac{a}{e} = a\frac{e^2-1}{e} = \frac{1}{e}\cdot\frac{b^2}{a}.$$

Итак, для эллипса и для гиперболы имеем

$$\Delta = \frac{1}{e}\cdot\frac{b^2}{a}. \qquad (2)$$

Если в случае гиперболы (при данном a) фокусное расстояние c, а значит, и эксцентриситет $e = \frac{c}{a}$ увеличиваются, то (острый) угол

между асимптотами уменьшается, а директрисы все более приближаются ко второй оси (и сближаются между собою).

Если в случае эллипса (при данном a) фокусное расстояние c, а значит, и эксцентриситет $e=\frac{c}{a}$ уменьшаются, то эллипс становится все более похожим на окружность, а его директрисы уходят все дальше и дальше от второй оси (и друг от друга). Наконец, для окружности $e=0$ и директрисы исчезают («уходя в бесконечность») — окружность не имеет директрис [1]).

Пусть дан какой-нибудь эллипс или гипербола C; один из фокусов кривой C обозначим через F, соответствующую ему директрису — через d. Для произвольной точки M обозначим через r расстояние этой точки M от точки F, через δ — расстояние точки M от прямой d. Докажем, что для всех точек M кривой C имеем

$$\frac{r}{\delta}=e. \tag{3}$$

Достаточно доказать это равенство для случая, когда $F=F_1$ — первый (левый) фокус (система координат — каноническая).

Тогда имеем

$$r=|a+ex|, \qquad \delta=\left|x+\frac{a}{e}\right|,$$

откуда

$$\frac{r}{\delta}=e.$$

Итак, равенство (3) имеет место для всех точек кривой C.

Докажем обратное утверждение: если для какой-нибудь точки $M=(x, y)$ плоскости выполнено равенство (3), то точка M лежит на кривой C.

В самом деле, пусть снова F — левый фокус кривой C, т. е. $F=(-c, 0)$, а прямая d имеет уравнение

$$x=-\frac{a}{e}.$$

Тогда

$$r^2=(x+c)^2+y^2,$$
$$\delta^2=\left(x+\frac{a}{e}\right)^2=\left(x+\frac{a^2}{c}\right)^2.$$

---

[1]) Это тягостное исключение устраняется при переходе к проективной плоскости (см. гл. V, § 5): оказывается, обе директрисы окружности действительно «ушли в бесконечность» — они обе совпадают с несобственной (бесконечно удаленной) прямой плоскости. Однако для того, чтобы это утверждение имело смысл, надо дать другое определение директрис, которое (в отличие от данного выше) не пользовалось бы понятием расстояния. Такое определение дается в проективной геометрии (но, к сожалению, остается за пределами этих лекций).

По предположению для точки M выполнено условие (3), так что

$$\frac{r^2}{\delta^2} = e^2 = \frac{c^2}{a^2},$$

т. е.

$$\frac{(x+c)^2 + y^2}{\left(x + \frac{a^2}{c}\right)^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

или

$$a^2(x+c)^2 + a^2y^2 = c^2\left(x + \frac{a^2}{c}\right)^2,$$

что после очевидных преобразований превращается в

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \qquad (4)$$

Если кривая C — эллипс, то $e = \frac{c}{a} < 1$, $a^2 - c^2 = b^2$ и уравнение (4) переписывается в виде

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— точка M лежит на эллипсе C.

Если же кривая C — гипербола, то $e = \frac{c}{a} > 1$, $c^2 - a^2 = b^2$ и уравнение (4) можно написать в виде

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

или в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— точка M лежит на гиперболе C.

Итак, доказана следующая теорема:

Как эллипс, так и гипербола C с эксцентриситетом e есть геометрическое место точек M плоскости, удовлетворяющих следующему условию: отношение расстояния точки M до произвольно выбранного фокуса кривой к расстоянию точки M до соответствующей этому фокусу директрисы равно e.

Пусть теперь (на плоскости) даны точка F, прямая d, не проходящая через эту точку, и положительное число $e \neq 1$.

Докажем, что при $e < 1$ существует эллипс и при $e > 1$ — гипербола с эксцентриситетом e, фокусом F и соответствующей ему директрисой d.

В самом деле, опустим из точки F перпендикуляр FD на прямую d и обозначим через A точку, делящую отрезок $\overrightarrow{FD}$ в отношении e, а через A' — точку, делящую тот же отрезок $\overrightarrow{FD}$ в отношении $-e$, так что

$$\frac{\overrightarrow{FA}}{\overrightarrow{AD}} = e, \qquad \frac{\overrightarrow{FA'}}{\overrightarrow{A'D}} = -e. \tag{5}$$

Нетрудно показать (см. задачу 1), что тогда середина O отрезка $\overrightarrow{AA'}$ делит отрезок $\overrightarrow{FD}$ в отношении $-e^2$:

$$\frac{\overrightarrow{FO}}{\overrightarrow{OD}} = -e^2,$$

т. е.

$$\overrightarrow{OF} = e^2\overrightarrow{OD}. \tag{5'}$$

Из равенств (5) и (5') следует, что точки F, D и A лежат по одну сторону от точки O.

Выберем прямоугольную систему координат Oxy с началом в точке O и положительным направлением $\overrightarrow{OF}$ оси Ox. Пусть в этой системе

$$F = (c,\ 0), \qquad D = (d,\ 0), \qquad A = (a,\ 0).$$

Так как точки A, F и D лежат на положительном луче оси Ox, то все три числа a, c и d являются положительными, причем

$$a = \frac{c + ed}{1 + e}, \tag{6}$$

$$c = e^2 \cdot d. \tag{6'}$$

Чтобы установить, что точка F и прямая d являются фокусом и директрисой кривой с центром O, первой полуосью a и эксцентриситетом e, достаточно показать, что

$$ae = c, \qquad \frac{a}{e} = d.$$

Имеем

$$a \cdot e = \frac{c + ed}{1 + e} \cdot e = \frac{ec + e^2 d}{1 + e} = \frac{ec + c}{1 + e} = c$$

и

$$\frac{a}{e} = \frac{c + ed}{(1 + e) \cdot e} = \frac{e^2 d + ed}{(1 + e) \cdot e} = d.$$

Утверждение доказано.

Эксцентриситет эллипса (не являющегося окружностью) есть положительное число $e < 1$; эксцентриситет гиперболы $e > 1$.

Определим эксцентриситет для всякой параболы, положив его равным $e=1$. Теперь любое положительное число e является эксцентриситетом или эллипса, или параболы, или гиперболы, и мы в качестве итога рассуждений этого параграфа получаем такой основной результат:

Класс кривых, являющихся эллипсами (кроме окружности), параболами или гиперболами, может быть определен следующим образом:

Каждая кривая C этого класса (и только кривая этого класса) есть геометрическое место точек M, для которых отношение $\frac{r_M}{\delta_M}$ расстояния r_M точки M от некоторой фиксированной точки F («фокуса кривой C») к расстоянию δ_M точки M от некоторой фиксированной прямой («директрисы кривой C») есть постоянное положительное число e,

$$e=\frac{r_M}{\delta_M} \text{ (для всех точек } M \text{ кривой } C),$$

называемое эксцентриситетом кривой C.

Кривая C есть

эллипс, если $e<1$,
парабола, если $e=1$,
гипербола, если $e>1$.

§ 8. Фокальный параметр эллипса и гиперболы. Уравнение при вершине

1. Фокальный параметр. Пусть C — эллипс или гипербола. Как раньше (в случае параболы), проведем через (какой-нибудь) фокус F кривой C прямую, перпендикулярную к ее фокальной оси. Эта прямая пересечет кривую C в двух точках P и P', расположенных «над» и «под» фокусом F. Длину полученной таким образом «фокальной» хорды $\overline{PP'}$ обозначаем через $2p$; величина p называется *фокальным параметром*[1]) кривой C.

Фокальный параметр окружности, очевидно, равен ее радиусу.

Возьмем каноническую для данной кривой C систему координат; тогда фокальный параметр кривой C равен модулю ординаты каждой из точек P, P'. Вычислим его.

Если кривая C есть эллипс с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

то для любой точки $M=(x, y)$ этого эллипса

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

---

[1]) В силу симметрии кривой относительно ее второй оси безразлично, какой из двух фокусов обозначен буквой F.

Подставляя сюда абсциссу фокуса F, т. е.

$$x = \pm c,$$

получим для ординат точек P, P' значения

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2} = \frac{b^2}{a}.$$

Итак, фокальный параметр эллипса есть

$$p = \frac{b^2}{a}. \tag{1}$$

Для точки $M = (x, y)$ гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

имеем

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Для $x = \pm c$ получаем

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2} = \pm \frac{b^2}{a}.$$

Фокальный параметр гиперболы также есть

$$p = \frac{b^2}{a}. \tag{1}$$

Вспомним, что мы нашли (§ 7) для расстояния Δ между фокусом и соответствующей директрисой как эллипса, так и гиперболы выражение

$$\Delta = \frac{1}{e} \cdot \frac{b^2}{a}.$$

Теперь мы видим, что это расстояние Δ может быть выражено и через фокальный параметр:

$$\Delta = \frac{p}{e}, \tag{2}$$

и это выражение годится не только для эллипса и гиперболы, но и для параболы (для которой, как мы знаем, $e = 1$ и $\Delta = p$). Таким образом, для всех наших кривых (кроме окружности) *фокальный параметр p может быть определен как число $p = e\Delta$, где Δ — расстояние от фокуса до директрисы, а e — эксцентриситет.*

2. Уравнение при вершине. Объяснение названий «парабола», «эллипс», «гипербола». Воспользуемся фокальным параметром для того, чтобы найти такую систему координат, в которой уравнения всех трех кривых (эллипса, гиперболы и параболы) имеют сходную форму.

Эта система координат имеет своим началом вершину кривой, а осью абсцисс — фокальную ось; для параболы эта система координат уже рассмотрена нами в § 1 под названием «канонической»; относительно этой системы парабола имеет уравнение $y^2 = 2px$.

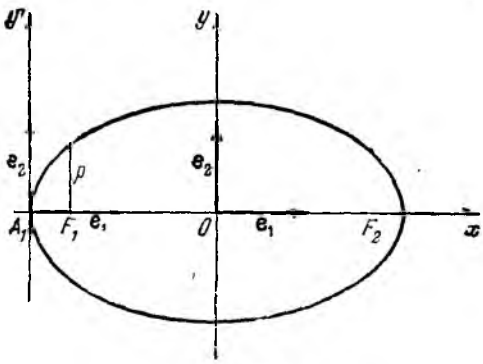


Рис. 93.

В случае эллипса примем за начало новой системы координат «левую» вершину A_1, сохранив единичные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ старой системы (т. е. системы, канонической для данной кривой C (рис. 93)). Обозначая координаты какой-либо точки M в новой системе через x', y', имеем формулы перехода от старых координат x, y к новым x', y' (см. гл. III, § 2):

$$x = -a + x',$$
$$y = y'.$$

Подставляя эти значения в каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

получаем $\frac{(-a+x')^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ или, после очевидных преобразований,

$$-2\frac{x'}{a} + \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0,$$

т. е.

$$y'^2 = 2\frac{b^2}{a}x' - \frac{b^2}{a^2}x'^2. \tag{3}$$

Но $\frac{b^2}{a} = p$, $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$, так что уравнение (3) переписываем в виде

$$y'^2 = 2px' + (e^2 - 1)x'^2$$

или, полагая

$$q = e^2 - 1, \tag{4}$$

в виде

$$y'^2 = 2px' + qx'^2. \tag{5}$$

Пусть теперь кривая C есть гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Переходим к новой системе координат, перенося начало канонической (для кривой C) системы в правую вершину $A_2 = (a, 0)$ гиперболы и сохраняя единичные векторы канонической системы (рис. 94).

Теперь

$$x = x' + a,$$
$$y = y'.$$

Подставляя это в уравнение гиперболы (6), получаем

$$\frac{x'^2 + 2ax' + a^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

или

$$y'^2 = 2\frac{b^2}{a}x' + \frac{b^2}{a^2}x'^2,$$

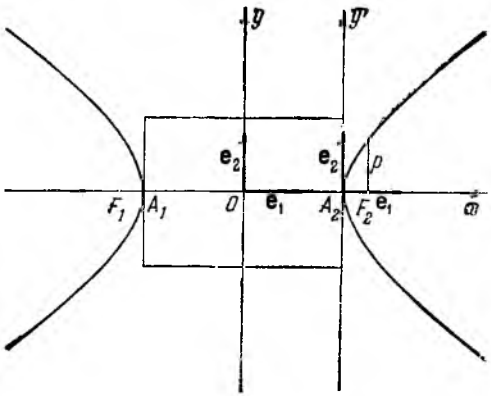


Рис. 94.

таким образом (помня, что в случае гиперболы $\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$)

$$y'^2 = 2px' + (e^2 - 1)x'^2,$$

или, наконец (при обозначении (4)),

$$y'^2 = 2px' + qx'^2.$$

Итак, *в надлежащим образом выбранной системе координат все три кривые — парабола, эллипс и гипербола — имеют уравнения одного и того же вида, а именно:*

$$y^2 = 2px + qx^2, \qquad (5')$$

где p — фокальный параметр кривой, а

$$q = e^2 - 1$$

(*через e, как всегда, обозначается эксцентриситет кривой*).

Из этих обозначений следует, что для эллипса $q < 0$, для параболы $q = 0$ и для гиперболы $q > 0$. Начало этой системы координат есть вершина кривой[1]) (левая для эллипса, правая для гиперболы), а ось абсцисс есть фокальная ось, направленная от (выбранной) вершины к (соответствующему) фокусу.

На рис. 95 изображены кривые семейства, состоящего из эллипсов, параболы и гипербол с общей вершиной, с общей фокальной

[1]) Поэтому уравнение (5') и называется «уравнением при вершине» данной кривой.

осью, с одним и тем же фокальным параметром p и эксцентриситетом e, принимающим все возрастающие значения: начиная от нуля (окружность) до 1 (парабола) и далее (гиперболы).

Замечание. Геометры Древней Греции не владели методом координат и не знали аналитической геометрии; но свойства эллипса,

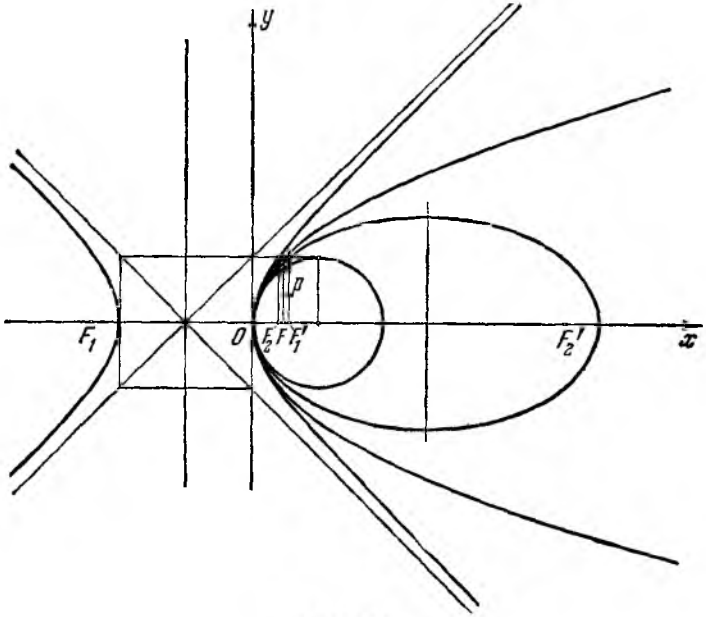


Рис. 95.

гиперболы и параболы знали не хуже нас с вами; знания эти они получали методами так называемой синтетической геометрии, т. е. непосредственным геометрическим построением, определяя эти кривые — эллипс, гиперболу, параболу — как конические сечения, т. е. как плоские сечения круглого конуса (об этом определении см. гл. XVIII, § 3). Свойства наших кривых, выражаемые уравнением (5′), греки также знали хорошо; но ордината y была для них половиной вертикальной (т. е. перпендикулярной к фокальной оси) хорды, одним из концов которой была данная точка P, а абсцисса x этой точки была расстоянием от касательной, проведенной к кривой в ее вершине. Греческие геометры хорошо знали (и умели ценить) также и фокальный параметр p конического сечения.

Они называли «приложением» данного квадрата к данному отрезку построение прямоугольника с данным основанием, равновеликого данному квадрату (т. е. фактически построение высоты этого

прямоугольника). Формула

$$y^2 = 2px$$

и разрешает (для случая параболы) задачу приложения квадрата y^2 (при приведенном выше геометрическом истолковании ординаты произвольной точки y) к основанию $2p$ (т. е. к фокальной хорде этой кривой) — высота искомого прямоугольника есть x, т. е. расстояние от точки M до касательной в вершине. Так хорошо задача решается именно для параболы, отсюда и ее название: παραβολή означает «нахождение чего-нибудь рядом», «приложение».

Для эллипса и гиперболы задача уже не проходит так гладко: нужен добавочный член qx^2, положительный (т. е. являющийся избытком, ὑπερβολή) в случае гиперболы, отрицательный (т. е. являющийся недостатком ἔλλιψις) в случае эллипса. Слова «гипербола» и «эллипс» и означают соответственно «избыток» и «недостаток»[1]).

§ 9. Уравнение эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах

Фокальный параметр находит свое применение и при выводе уравнений эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах. Этими уравнениями постоянно пользуются в астрономии и во многих вопросах механики.

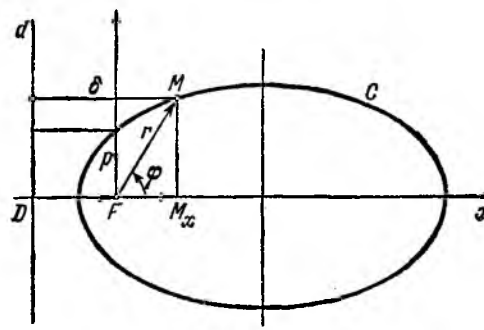


Рис. 96.

Начало полярной системы координат помещаем в фокус F (левый в случае эллипса (рис. 96), правый в случае гиперболы (рис. 97) [2]) и в единственный фокус в случае параболы (рис. 98)); полярная ось направлена от полюса в сторону, противоположную от соответствующей директрисы d (т. е. так же, как направлена ось абсцисс в канонической для данной кривой системе координат).

[1]) Эти слова в этом смысле употребляются также в стилистике и риторике; слово «гипербола» означает преувеличение, а «эллипсис» (точное воспроизведение греческого слова) — риторическую фигуру, заключающуюся в пропуске какого-нибудь члена предложения, например: «Мой дядя — самых честных правил».

[2]) К несчастью, в случае гиперболы уравнение в полярных координатах определяет не всю кривую, а лишь одну ветвь — при нашем выборе начала — правую.

Для любой точки M нашей кривой обозначаем через r расстояние от M до фокуса F, через δ — расстояние от M до d. Наша кривая C есть геометрическое место точек M, для которых $\frac{r}{\delta} = e$, т. е.

$$r = e\delta. \tag{1}$$

Но r есть полярный радиус точки M. Вычислим δ. Обозначая через D точку пересечения директрисы d с фокальной осью, а через M_x проекцию точки M на эту ось, видим, что δ есть длина вектора $\overrightarrow{DM_x}$,

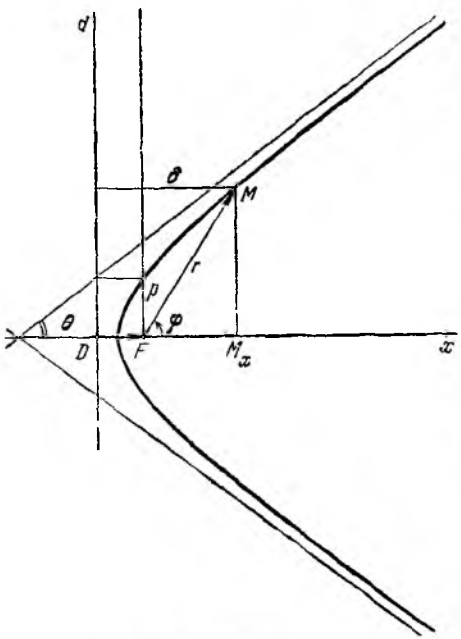


Рис. 97.

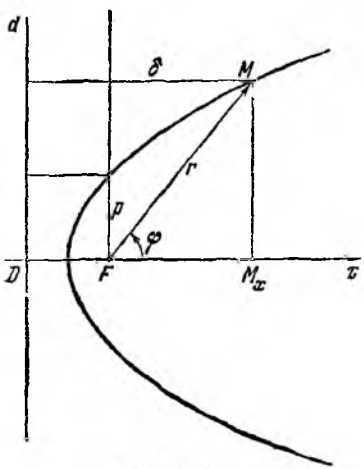


Рис. 98.

лежащего на оси абсцисс (канонической системы). Для алгебраических значений векторов на этой оси имеем

$$(DM_x) = (DF) + (FM_x), \tag{2}$$

но

$$(DF) = |\overrightarrow{DF}| = \frac{p}{e},$$

тогда как

$$(FM_x) = r\cos\varphi,$$

где φ — угол наклона вектора $\overrightarrow{FM}$ к полярной оси, т. е. полярный угол точки M. На кривой C (в случае гиперболы на правой ее ветви)

$(DM_x) = |\overrightarrow{DM_x}| = \delta$. Подставляя в равенство (2) найденные значения входящих в него величин, получаем

$$\delta = \frac{p}{e} + r\cos\varphi = \frac{p + er\cos\varphi}{e}.$$

Наконец, подставляя это значение δ в (1), имеем

$$r = p + er\cos\varphi,$$

т. е. $r(1 - e\cos\varphi) = p$ или

$$\boxed{r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}.} \tag{3}$$

Это и есть уравнение параболы, эллипса и (ветви) гиперболы в полярных координатах.

Для параболы получаем просто

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}; \tag{3'}$$

здесь φ принимает все значения $0 < \varphi < 2\pi$; значение $\varphi = 0$ не годится, что и естественно, так как ему не соответствует никакая точка параболы.

В случае эллипса все значения $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ хороши (так как всегда $e\cos\varphi \leqslant e < 1$).

Для гиперболы можно брать значения φ, для которых

$$\cos\varphi < \frac{1}{e} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\theta,$$

где θ — (острый) угол между асимптотой и фокальной осью гиперболы; у всех точек правой ветви гиперболы полярный угол φ заключен в пределах

$$\theta < \varphi < 2\pi - \theta,$$

так что

$$\cos\theta > \cos\varphi.$$

ГЛАВА VII

ДЕТЕРМИНАНТЫ

§ 1. Площадь ориентированного параллелограмма и треугольника

Треугольник и параллелограмм называются *ориентированными*, если они снабжены определенным направлением обхода их контура (это направление и называется ориентацией параллелограмма или треугольника).

Если рассматривать параллелограмм как построенный на двух данных векторах $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$ (рис. 99), исходящих из одной и той же вершины, то выбор той или иной ориентации нашего параллелограмма равносилен указанию, какой из векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ является первым, а какой — вторым. В самом деле, если дана ориентация, т. е. направление обхода контура параллелограмма, то первым будет называться тот из двух векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, направление которого совпадает с выбранным направлением обхода; обратно, если один из двух векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ выбран в качестве первого, то его направление считается задающим направление всего обхода.

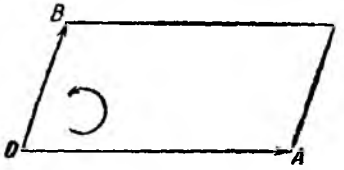


Рис. 99

Задав направленне обхода параллелограмма, мы этим задаем и некоторое определенное направление вращения на плоскости — то направление, в котором вращается луч, исходящий из центра параллелограмма и направленный в точку, совершающую обход параллелограмма в заданном направлении. Обратно, если задано направление вращения на плоскости, то этим задано и определенное направление обхода всякого параллелограмма, лежащего в этой плоскости, т. е. задана его ориентация.

Предположим теперь, что на плоскости одно из двух возможных направлений вращения выбрано в качестве положительного; пред-

положим, что независимо от этого выбора на той же плоскости задан ориентированный параллелограмм, построенный на векторах $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$ (пусть первый вектор при этой ориентации есть $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$, а второй $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$).

Если заданное этой ориентацией направление обхода параллелограмма совпадает с положительным направлением вращения на плоскости, то ориентацию параллелограмма назовем *положительной*; в противном случае она называется *отрицательной*.

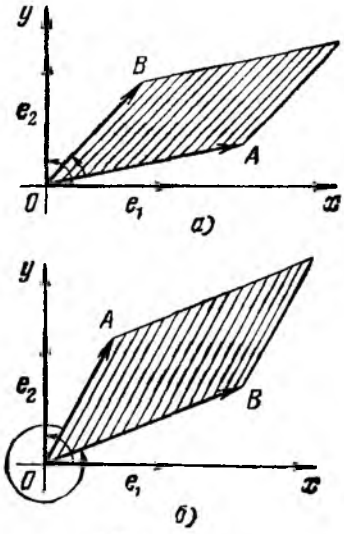


Рис. 100.

Если ориентация параллелограмма положительна, то угол α от первого вектора $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ до второго $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$ (считаемый в положительном направлении вращения на плоскости) будет $< \pi$; для отрицательно ориентированного параллелограмма этот угол $> \pi$ (рис. 100). Поэтому число

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \alpha$$

положительно или отрицательно в зависимости от того, является ли ориентация параллелограмма (построенного на векторах $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$) положительной или отрицательной. Модуль числа $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, очевидно, равняется площади (в элементарно геометрическом смысле) данного параллелограмма; поэтому само это число $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ естественно назвать *площадью ориентированного параллелограмма* (построенного на данных векторах); знак площади ориентированного параллелограмма совпадает со знаком его ориентации.

Если векторы $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$ заданы своими координатами

$$\mathbf{u} = \{x_1, y_1\}, \qquad \mathbf{v} = \{x_2, y_2\},$$

то (как мы видели в главе четвертой)

$$\sin \alpha = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

и, следовательно,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Площадь ориентированного треугольника (построенного на векторах $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$) определяется аналогичным образом; она равна половине площади ориентированного параллелограмма, построенного на тех же векторах.

§ 2. Детерминант второго порядка. Матрицы

Определение. *Выражение* $x_1y_2 - x_2y_1$ *обозначается так:*

$$x_1y_2 - x_2y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \tag{1}$$

и называется детерминантом (или определителем) второго порядка.

В нашем изложении это выражение появилось как площадь ориентированного параллелограмма, натянутого на два вектора $\mathbf{u}_1 = \{x_1, y_1\}$ и $\mathbf{u}_2 = \{x_2, y_2\}$, т. е. как функция двух векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, данных в определенном порядке своими координатами в некоторой прямоугольной системе координат. Поэтому естественна и такая запись:

$$D(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \quad \text{при } \mathbf{u}_1 = \{x_1, y_1\}, \quad \mathbf{u}_2 = \{x_2, y_2\}. \tag{2}$$

Эти два вектора можно записать в виде квадратной таблицы или *квадратной матрицы*

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

второго порядка, строками которой являются наши векторы; тогда детерминант (1) называется *детерминантом матрицы* (3).

Установим некоторые свойства детерминантов второго порядка.

1° *Значение детерминанта не меняется, если его строки сделать столбцами, и наоборот (если «транспонировать» матрицу, детерминант которой берется).*

В самом деле, очевидно,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

2° *Если поменять местами две строки (два столбца) детерминанта, то его абсолютная величина не меняется, а знак меняется на противоположный:*

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

3° *Равенство детерминанта второго порядка нулю означает, что две строки его пропорциональны; пропорциональность строк эквивалентна пропорциональности столбцов*[1]).

[1]) В частности, детерминант равен нулю, если у него две одинаковые строки (два одинаковых столбца).

Это свойство можно сформулировать и так:

3° *Детерминант равен нулю тогда и только тогда, когда его строки (столбцы), рассматриваемые как векторы, линейно зависимы между собою.*

4° *Значение детерминанта не меняется, если к какой-либо его строке почленно прибавить другую строку, умноженную на любой числовой множитель* λ.

В самом деле, непосредственное вычисление показывает, что

$$\begin{vmatrix} x_1+\lambda x_2 & y_1+\lambda y_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Аналогично — для столбцов.

Мы пришли к понятию детерминанта из геометрических соображений и поэтому сразу же уяснили себе его геометрический смысл. Понятие детерминанта является мощным орудием, применяемым в самых различных вопросах математики.

Исторически это понятие впервые возникло при решении систем уравнений первой степени. Пусть дана система из двух линейных уравнений первой степени с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y&=b_1,\\ a_{21}x+a_{22}y&=b_2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Будем ее решать, например, методом уравнивания коэффициентов. Получим

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\\ y&=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Детерминант

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{6}$$

называется *детерминантом системы* (4). Если он отличен от нуля система (4) имеет единственное решение (5), и это решение дает нам единственную точку пересечения прямых, определяемых уравнениями (4).

Пусть теперь $A=0$; тогда одна из строк детерминанта (6) — пусть вторая — получается из другой умножением на некоторое число λ:

$$a_{21}=\lambda a_{11},\quad a_{22}=\lambda a_{12}; \tag{7}$$

мы имеем пропорцию $\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}$. Если при этом и

$$b_2=\lambda b_1, \tag{8}$$

т. е. если имеет место пропорция $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{b_1}{b_2}$, то все второе уравнение в системе (4) получается из первого умножением первого на λ, следовательно, оба уравнения эквивалентны между собою — прямые, определяемые уравнениями (4), совпадают, система (4) имеет бесчисленное множество решений. Если же (7) имеет место, а (8) — нет, то система (4) не имеет ни одного решения, она несовместна (т. е. противоречива)[1] — прямые, определяемые уравнениями (4), параллельны (в собственном смысле слова). Мы доказали следующее предложение:

Система (4) *двух уравнений первой степени с двумя неизвестными имеет единственное решение в том и только в том случае, если детерминант системы отличен от нуля. В этом случае это единственное решение дается формулами* (5), *называемыми формулами Крамера.*

§ 3. Детерминанты третьего порядка

Пусть дана квадратная таблица, состоящая из трех строк и трех столбцов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Такие таблицы называются (*квадратными*) *матрицами третьего порядка*. Назовем *молнией*[2] всякую такую тройку элементов этой матрицы, что никакие два элемента из этой тройки не принадлежат одному столбцу или одной строке. Всякая молния содержит, таким образом, ровно по одному элементу из каждой строки и ровно по одному элементу из каждого столбца. Она может быть, следовательно, записана в виде

$$\langle a_{1i_1},\ a_{2i_2},\ a_{3i_3}\rangle, \tag{2}$$

если писать ее элементы в порядке возрастания номеров тех строк, к которым они принадлежат, или в виде

$$\langle a_{j_11},\ a_{j_22},\ a_{j_33}\rangle, \tag{3}$$

если ее писать в порядке возрастания номеров столбцов.

---

[1]) В самом деле, если $x=x_0$, $y=y_0$ есть решение системы (4), то $b_1=a_{11}x_0+a_{12}y_0$. Если при этом выполнено (7), то $b_2=a_{21}x_0+a_{22}y_0=\lambda(a_{11}x_0+a_{12}y_0)=\lambda b_1$, т. е. выполнено и (8). Итак, если система (4) совместна и выполнено условие (7), то непременно выполнено и (8).

[2]) Термин заимствован мною из лекций Н. Н. Лузина по теории детерминантов.

Существуют ровно две молнии, содержащие элемент a_{11}; это молнии

$$\langle a_{11}, a_{22}, a_{33}\rangle \quad \text{и} \quad \langle a_{11}, a_{23}, a_{32}\rangle. \tag{4_1}$$

Точно так же имеются две молнии, содержащие элемент a_{12}, а именно:

$$\langle a_{12}, a_{23}, a_{31}\rangle \quad \text{и} \quad \langle a_{12}, a_{21}, a_{33}\rangle, \tag{4_2}$$

и, наконец, две молнии

$$\langle a_{13}, a_{21}, a_{32}\rangle \quad \text{и} \quad \langle a_{13}, a_{22}, a_{31}\rangle, \tag{4_3}$$

содержащие элемент a_{13}; всего в матрице A имеется $6 = 3!$ молний.

Каждая молния порождает вполне определенное взаимно однозначное соответствие между строками и столбцами матрицы A, а именно:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{array}$$

(номера строк),
(номера соответствующих им столбцов).

Это же соответствие может быть записано в виде

$$\begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

(номера строк),
(номера соответствующих им столбцов).

Другими словами, имеем одну и ту же перестановку [1]):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

так что перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix}$$

взаимно обратны и, следовательно, имеют один и тот же знак: они или обе четные, или обе нечетные. *Этот знак называется знаком данной молнии.*

В записях (4_1), (4_2), (4_3) первые молнии положительны, а вторые — отрицательны.

Назовем теперь *зарядом молнии* произведение всех ее элементов, взятое со знаком $+$, если молния положительна, и со знаком $-$, если молния отрицательна.

---

[1]) Предполагается, что читатель выучил теорию перестановок, как она изложена в § 1 Прибавления к этим «Лекциям».

Сумма зарядов всех молний матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется детерминантом этой матрицы и обозначается так:

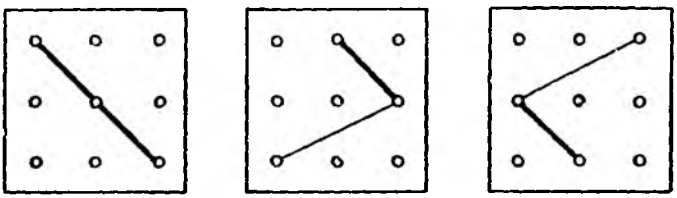
$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum \text{зн}\,(i_1i_2i_3)\,a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}.$$

Суммирование — по всем шести перестановкам $i_1i_2i_3$[1]) из трех элементов 1, 2, 3. Развернутая запись этого детерминанта есть

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}). \qquad (5)$$

Существуют правила, позволяющие сразу написать значение детерминанта третьего порядка. Одно из простейших — следующее:

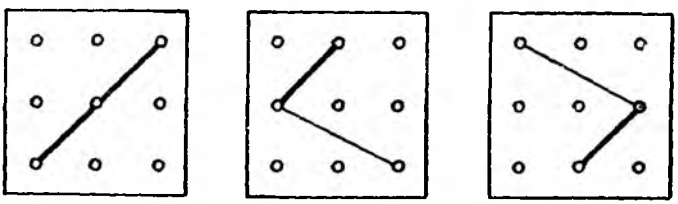
Положительны молнии



(+)

(кратчайшие звенья соответствующих им ломаных параллельны главной диагонали матрицы, т. е. диагонали, связывающей левый верхний и правый нижний угол матрицы).

Отрицательны молнии



(−)

[1]) Для сокращения письма мы пишем $i_1i_2i_3$ вместо $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$.

(кратчайшие звенья соответствующих им ломаных параллельны побочной диагонали матрицы, т. е. диагонали, связывающей правый верхний и левый нижний угол).

Перечислим основные свойства детерминантов в применении к детерминантам третьего порядка. Предварительно введем следующее

Определение. *Транспонировать матрицу — значит сделать ее строки столбцами, и наоборот, сохраняя порядок тех и других*[1]). *Таким образом, матрица, транспонированная к матрице*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

есть матрица

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

1° *При транспонировании матрицы ее детерминант не меняется.*

В справедливости этого свойства легко убеждаемся непосредственно из формулы (5), а также замечая, что при транспонировании матрицы три ломаные, образующие группу, обозначенную знаком (+), а также три ломаные, образующие группу, обозначенную знаком (—), переходят в ломаные той же группы.

Очевидно:

2° *При умножении всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на какое-нибудь число λ на то же число умножается и детерминант этой матрицы.*

Строки (столбцы) матрицы естественно рассматривать как векторы

$$\mathbf{u}_1=\{a_{11},\ a_{12},\ a_{13}\},$$
$$\mathbf{u}_2=\{a_{21},\ a_{22},\ a_{23}\},$$
$$\mathbf{u}_3=\{a_{31},\ a_{32},\ a_{33}\}$$

(и аналогично векторы-столбцы $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$). Поэтому и детерминант $\det A$ можно рассматривать как функцию векторов-строк (соответственно векторов-столбцов) матрицы A:

$$\det A = D(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3).$$

3° *Если* $\mathbf{u}_i=\mathbf{u}_i'+\mathbf{u}_i''$ *при каком-нибудь* i, *например, если*

$$\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_1'+\mathbf{u}_1'',\quad \mathbf{u}_1'=\{a_{11}',\ a_{12}',\ a_{13}'\},\quad \mathbf{u}_1''=\{a_{11}'',\ a_{12}'',\ a_{13}''\},$$

[1]) Матрица A перейдет в транспонированную к ней матрицу A^*, если ее перевернуть вокруг главной диагонали.

то

$$D(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = D(\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) + D(\mathbf{u}_1'', \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3).$$

Для доказательства достаточно подставить в формулу (5) значения

$$a_{11} = a_{11}' + a_{11}'', \quad a_{12} = a_{12}' + a_{12}'', \quad a_{13} = a_{13}' + a_{13}''$$

и сделать вытекающие из этой подстановки совсем простые вычисления.

Очевидно:

4° *Если в матрице какая-нибудь строка (какой-нибудь столбец) состоит из нулей, то детерминант матрицы равен нулю.*

Если поменять местами две какие-нибудь строки матрицы A, то перестановка $i_1 i_2 i_3$ в записи (2) произвольной молнии испытает транспозицию и потому изменит свой знак, значит, изменит свой знак (сохраняя абсолютную величину) и сумма зарядов всех молний, т. е. детерминант. То же происходит и при перестановке двух столбцов. Итак:

5° *При перестановке двух каких-нибудь строк матрицы (двух столбцов) ее детерминант, сохраняя свою абсолютную величину, меняет знак.*

Отсюда вытекает:

6° *Если в матрице имеются две одинаковые строки (два одинаковых столбца), то ее детерминант равен нулю.*

В самом деле, обозначая наш детерминант **через** D, видим, что, с одной стороны, при упомянутой перестановке строк в детерминанте ничего не меняется, с другой стороны, детерминант должен изменить свой знак; значит, $D = -D$, $2D = 0$, $D = 0$.

7° *Если к элементам некоторой строки (столбца) матрицы A (почленно) прибавить (или из них вычесть) элементы другой строки (столбца), умноженные на какое-нибудь число λ, то значение детерминанта* $\det A$ *не изменяется.*

В самом деле, имеем по предыдущему

$$D(\mathbf{u}_1 + \lambda\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = D(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) + D(\lambda\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) =$$
$$= D(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) + \lambda D(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = D(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3).$$

Повторное применение этого результата дает:

7'° *Прибавляя к какой-либо строке матрицы (или вычитая из нее) произвольную линейную комбинацию других строк, мы не меняем значения детерминанта этой матрицы.*

Отсюда вытекает:

8° *Если в матрице одна строка (один столбец) является линейной комбинацией других строк (столбцов), то детерминант матрицы равен нулю.*

В самом деле, вычитая из данной строки данную линейную комбинацию других строк, мы (в силу 7'°) не меняем значения детерми-

нанта и в то же время превращаем его в детерминант, одна из строк которого состоит из нулей. Доказанное утверждение может быть сформулировано так:

8′° *Если строки (столбцы) матрицы линейно зависимы, то ее детерминант равен нулю.*

§ 4. Разложение детерминанта третьего порядка по элементам какой-либо строки. Приложение к системе трех уравнений с тремя неизвестными (правило Крамера)

Возьмем в матрице A третьего порядка какой-либо элемент a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$; вычеркнем из матрицы A строку и столбец, содержащие элемент a_{ik}.

Оставшиеся элементы матрицы A образуют матрицу второго порядка, которую будем называть *минором элемента* a_{ik} *в матрице*[1]) A. Детерминант минора элемента a_{ik}, умноженный на $(-1)^{i+k}$, называется *алгебраическим дополнением* или *адъюнктой элемента* a_{ik} в матрице A (и в ее детерминанте $\det A$). Так, в детерминанте

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

алгебраическими дополнениями элементов a_{12}, a_{23}, a_{33} являются соответственно

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Возьмем развернутую запись детерминанта:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) +$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \qquad (1)$$

[1]) Буквально: matrix minor — меньшая (или уменьшенная) матрица.

где

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\quad A_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Мы видим, что:

9° *Каждый детерминант (третьего порядка) равняется сумме произведений элементов какой-либо своей строки (столбца) на адъюнкты этих элементов.*

Это представление детерминанта называется его *разложением по элементам данной строки (столбца)*.

Докажем, наконец, следующее свойство детерминантов:

10° *Сумма произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (другого столбца) равна нулю.*

Докажем, например, что

$$a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=0. \tag{2}$$

Для этого разложим по элементам первой строки детерминант

$$0=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}.$$

Утверждение доказано.

Теперь мы можем очень быстро изложить те приложения детерминантов третьего порядка к решению систем уравнений первой степени, которые и послужили началом их теории.

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z&=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z&=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z&=b_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Предположим, что *детерминант системы* (3), т. е. **детерминант**

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

отличен от нуля. Через A_{ik} обозначаем адъюнкту элемента a_{ik} этого детерминанта. Умножаем обе части первого уравнения (3) на A_{11}, обе части второго — на A_{21}, обе части третьего — на A_{31} и складываем; получаем

$$\begin{aligned}(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31})\,x+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31})\,y+\\ +(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31})\,z=b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}.\end{aligned} \tag{4}$$

Но в силу предложений 9° и 10° первая скобка в левой части равна $\det A$, тогда как две другие скобки суть нули. Выражение справа есть детерминант матрицы

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

полученной, если в A заменить первый столбец столбцом свободных членов b_1, b_2, b_3 системы (3). Итак, уравнение (4) можно переписать так:

$$\det A \cdot x = \det B_1. \tag{5$_1$}$$

Точно так же, умножая обе части первого уравнения (3) на A_{12}, второго — на A_{22}, третьего — на A_{32} и складывая, получаем

$$\det A \cdot y = \det B_2 \tag{5$_2$}$$

и аналогично

$$\det A \cdot z = \det B_3, \tag{5$_3$}$$

где B_2 и B_3 суть матрицы, получающиеся, если в матрице A заменить второй, соответственно третий, столбец столбцом свободных членов. Так как $\det A \neq 0$, то из (5$_1$), (5$_2$), (5$_3$) получаем:

$$x = \frac{\det B_1}{\det A}, \quad y = \frac{\det B_2}{\det A}, \quad z = \frac{\det B_3}{\det A}. \tag{6}$$

Мы получили уравнения (6) как следствия уравнений (3) в предположении, что $A \neq 0$. Итак, если — в предположении $A \neq 0$ — система (3) имеет решение, то это решение единственно и дается равенствами (6). Остается проверить, что формулы (6) действительно дают решение системы (3).

Для этого (все время предполагая, что $\det A \neq 0$) подставим выражения (6) в первое уравнение (3). Левая часть первого из этих уравнений превращается в

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\det A}(a_{11} \cdot \det B_1 + a_{12} \cdot \det B_2 + a_{13} \cdot \det B_3) = \\
&= \frac{a_{11}}{\det A}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}) + \\
&+ \frac{a_{12}}{\det A}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}) + \\
&+ \frac{a_{13}}{\det A}(b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}) = \\
&= \frac{b_1}{\det A}(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) + \\
&+ \frac{b_2}{\det A}(a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}) + \\
&+ \frac{b_3}{\det A}(a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}).
\end{aligned}$$

Но

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\det A,$$
$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0,$$
$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=0.$$

Итак, левая часть первого из уравнений (3) после подстановки значений x, y, z из (6) превращается в $\frac{b_1}{\det A}\det A=b_1$, т. е. само это уравнение превращается в тождество $b_1=b_1$. Также и два других уравнения (3) превращаются после подстановки значений x, y, z из (6) в тождества $b_2=b_2$ и $b_3=b_3$.

Мы доказали основное предложение.

Теорема 1. *Если система трех уравнений с тремя неизвестными* (3) *имеет детерминант*

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0,$$

то система (3) *имеет единственное решение, которое находится «по правилу Крамера», т. е. по формулам* (6), *в которых* B_1, B_2, B_3 *суть матрицы, получающиеся из* A *посредством замены соответственно первого, второго, третьего столбца на столбец свободных членов* b_1, b_2, b_3.

В частности, если однородная система

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z&=0,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z&=0,\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

имеет детерминант, отличный от нуля, то система (7) *имеет единственное решение, а именно нулевое решение:* $x=y=z=0$.

§ 5. Системы трех уравнений с тремя неизвестными с детерминантом системы, равным нулю

Переходим к рассмотрению случая, когда детерминант системы (3) предыдущего параграфа [1]) равен нулю.

Начнем с однородной системы (7).

Итак, $\det A=0$. Предположим сначала, что хотя бы одна из адъюнкт элементов матрицы A отлична от нуля, например $A_{11}\neq 0$. Тогда, разлагая $\det A$ по элементам первой строки, получим

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=0. \qquad (8_1)$$

[1]) В этом параграфе сохраняем нумерацию формул предыдущего параграфа и продолжаем ее.

Кроме того, имеем на основании предложения 10° из § 4

$$a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=0, \qquad (8_2)$$
$$a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}=0. \qquad (8_3)$$

Совокупность тождеств $(8_1),(8_2),(8_3)$ показывает, что, полагая

$$\xi_0=A_{11}, \quad \eta_0=A_{12}, \quad \zeta_0=A_{13},$$

мы получаем решение

$$\mathbf{u}_0=\{\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0\}$$

системы (7), не являющееся нулевым (так как по предположению $\xi_0=A_{11}\neq 0$). Система (7) имеет бесконечно много решений, так как очевидно, что, каково бы ни было число λ, тройка чисел («вектор») $\lambda\mathbf{u}_0=\{\lambda\xi_0,\ \lambda\eta_0,\ \lambda\zeta_0\}$ также является решением системы (7).

Попутно мы доказали, что при $\det A=0$, $A_{11}\neq 0$ столбцы матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

образуют линейно зависимую систему. В самом деле, полагая

$$\mathbf{v}_1=\{a_{11},\ a_{21},\ a_{31}\}, \quad \mathbf{v}_2=\{a_{12},\ a_{22},\ a_{32}\}, \quad \mathbf{v}_3=\{a_{13},\ a_{23},\ a_{33}\},$$

можем переписать тождества (8_1), (8_2), (8_3) в виде

$$A_{11}\mathbf{v}_1+A_{12}\mathbf{v}_2+A_{13}\mathbf{v}_3=0,$$

что и означает (ввиду $A_{11}\neq 0$) линейную зависимость столбцов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ матрицы A.

Пусть теперь детерминанты всех миноров второго порядка в матрице A равны нулю. Из равенства

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=0$$

мы заключаем, что $a_{21}:a_{11}=a_{22}:a_{12}$, а из

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}=0$$

заключаем, что $a_{22}:a_{12}=a_{23}:a_{13}$.

Итак, первые две строки матрицы A пропорциональны между собою. Точно так же пропорциональны между собою последние две строки этой матрицы, значит, все строки матрицы A пропорциональны между собою, и, следовательно, все уравнения (7) могут быть

получены из одного из них умножением на некоторые числа λ и λ'. Пусть, например,

$$a_{21}=\lambda a_{11}, \quad a_{22}=\lambda a_{12}, \quad a_{23}=\lambda a_{13},$$
$$a_{31}=\lambda' a_{11}, \quad a_{32}=\lambda' a_{12}, \quad a_{33}=\lambda' a_{13}.$$

Тогда всякое решение уравнения

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0 \tag{7'}$$

является решением и двух других уравнений системы (7). Но уравнение (7'), несомненно, имеет ненулевые решения. В самом деле, если $a_{13}\neq 0$, то такое решение получим, дав неизвестным x, y произвольные значения $x=\xi_0$, $y=\eta_0$ и определив $z=\zeta_0$ из (7'):

$$\zeta_0=\frac{-a_{11}\xi_0-a_{12}\eta_0}{a_{13}}.$$

Если же $a_{13}=0$, то, полагая $x=0$, $y=0$, $z=\zeta_0$, где ζ_0 — любое число, не равное 0, получим ненулевое решение $\{0, 0, \zeta_0\}$ уравнения (7').

Итак, во всех случаях при $\det A=0$ система (7) имеет бесконечное множество ненулевых решений $\{\xi_0, \eta_0, \zeta_0\}$, и, следовательно, столбцы $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ матрицы A связаны соотношением

$$\xi_0\mathbf{v}_1+\eta_0\mathbf{v}_2+\zeta_0\mathbf{v}_3=0,$$

в котором не все коэффициенты ξ_0, η_0, ζ_0 равны нулю.

Итак, из равенства нулю детерминанта матрицы следует линейная зависимость ее столбцов. А так как, транспонируя матрицу, не меняем ее детерминанта, то из равенства нулю детерминанта следует и линейная зависимость ее строк.

Сопоставляя этот результат с предложением 8'° § 3, можем сформулировать следующее фундаментальное предложение.

Теорема 2. *Равенство нулю детерминанта квадратной матрицы третьего порядка равносильно линейной зависимости строк (столбцов) этой матрицы*[1])

Одновременно доказана и

Теорема 3. *Для того чтобы система* (7) *трех однородных уравнений с тремя неизвестными имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы детерминант системы равнялся нулю. В этом случае система* (7) *имеет бесконечное множество ненулевых решений.*

Переходим к общему случаю системы (3) трех уравнений с тремя неизвестными с детерминантом, равным нулю. В отличие от однородных систем, неоднородная система может быть несовместной;

---

[1]) Отсюда, в частности, вытекает, что линейная зависимость столбцов (квадратной) матрицы равносильна линейной зависимости ее строк.

такова, например, система

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 1 \end{aligned}$$

(при любых значениях коэффициентов в первых двух уравнениях) или система

$$\begin{aligned} 1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z &= 1, \\ 2\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

(при любых значениях коэффициентов a_{31}, a_{32}, a_{33}, b_3).

В обоих случаях детерминант системы равен нулю, что неизбежно ввиду теоремы 1. Однако имеет место следующая совершенно общая

Теорема 4. *Если система m уравнений первой степени с n неизвестными*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

имеет решение

$$(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0),$$

то, прибавляя (почленно) к этому решению любое решение

$$\{\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n\}$$

соответствующей однородной системы

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

получим снова решение

$$x_1^0 + \xi_1,\ x_2^0 + \xi_2,\ \ldots,\ x_n^0 + \xi_n$$

системы (9), *причем всякое решение*

$$y_1,\ \ldots,\ y_n$$

системы (9) *получается в виде*

$$y_1 = x_1^0 + \xi_1,\ \ldots,\ y_n = x_n^0 + \xi_n,$$

если надлежащим образом выбрать решение $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ *однородной системы* (10).

Мы докажем эту теорему при $m = n = 3$, доказательство в общем случае совершенно такое же.

Итак, пусть (x_0, y_0, z_0) — какое-нибудь фиксированное решение системы

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

а $\{\xi, \eta, \zeta\}$ — произвольное решение однородной системы (7). Подставляя в (3) значения

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta,$$

видим, что левая часть первого из уравнений (3) превращается в

$$a_{11}(x_0 + \xi) + a_{12}(y_0 + \eta) + a_{13}(z_0 + \zeta) = \\ = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0) + (a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta).$$

Но первая скобка равна b_1, а вторая равна нулю, так что после нашей подстановки первое уравнение системы (3) превращается в тождество $b_1 = b_1$. В аналогичные тождества превращаются и остальные уравнения системы (3).

Обратно, если (x_1, y_1, z_1) — произвольное решение системы (3), то, подставляя в уравнения этой системы сначала $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, а затем $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ и производя почленное вычитание, видим, что разности

$$\xi = x_1 - x_0, \quad \eta = y_1 - y_0, \quad \zeta = z_1 - z_0$$

образуют решение $\{\xi, \eta, \zeta\}$ системы (7) и

$$x_1 = x_0 + \xi, \quad y_1 = y_0 + \eta, \quad z_1 = z_0 + \zeta.$$

Теорема 4 доказана.

Вернемся теперь к системе (3) в предположении, что детерминант системы равен нулю.

Если система (3) несовместна, то нам с ней больше нечего делать.

Если же она совместна и (x_0, y_0, z_0) — какое-нибудь решение системы, то мы получим бесконечное множество решений

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta,$$

складывая решение (x_0, y_0, z_0) со всевозможными решениями однородной системы (7).

Общим итогом сказанного является

Теорема 5. *Система уравнений*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

имеет единственное решение $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ *в том и только в том случае, когда детерминант системы отличен от нуля; тогда это единственное решение получается по правилу Крамера. Если же детерминант системы* (3) *равен нулю, то система* (3) *либо несовместна, т. е. не имеет ни одного решения, либо имеет бесконечное число решений, которые все получаются из одного какого-нибудь решения* (x_0, y_0, z_0) *почленным прибавлением к нему всевозможных решений однородной системы* (7).

§ 6. Арифметическое n-мерное векторное многообразие (пространство). Общее определение матрицы. Детерминанты любого порядка

Мы разобрали подробно детерминанты порядков $n = 2$ и $n = 3$. Наша задача — обобщить полученные результаты на случай любого n. Сначала распространим векторную терминологию, которой мы пользовались при $n \leqslant 3$, также на любое n.

1. Арифметическое n-мерное векторное пространство. Итак, пусть дано произвольное натуральное число n. Будем называть любой набор из n действительных чисел, данных в определенном порядке:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

вектором, сами числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будем иногда называть *координатами* вектора $\mathbf{v} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Совокупность всех векторов $\mathbf{v} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ будем называть *арифметическим n-мерным векторным многообразием* или *пространством*. При $n = 3$ мы получаем уже известные нам векторные трехмерные многообразия в предположении, что в пространстве выбран определенный базис, позволяющий записать каждый вектор трехмерного векторного многообразия в виде $\mathbf{v} = \{x, y, z\}$.

Суммой двух векторов $\mathbf{v} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *и* $\mathbf{v}' = \{x_1', x_2', \ldots, x_n\}$ арифметического n-мерного пространства будем называть вектор

$$\mathbf{v} + \mathbf{v}' = \{x_1 + x_1', x_2 + x_2', \ldots, x_n + x_n'\}.$$

Произведением вектора $\mathbf{v} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *на число* λ будем называть вектор $\lambda\mathbf{v} = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n\}$.

Нулевым вектором называется вектор $\mathbf{0} = \{0, 0, \ldots, 0\}$. Это единственный вектор, удовлетворяющий для любого вектора $\mathbf{v}$ условию $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$.

Вектором, *противоположным* вектору $\mathbf{v}=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, называем вектор

$$-\mathbf{v}=\{-x_1, -x_2, \ldots, -x_n\};$$

это единственный вектор, дающий в сумме с вектором $\mathbf{v}$ нулевой вектор.

Легко видеть, что определенные таким образом линейные операции над векторами обладают всеми алгебраическими свойствами, перечисленными в § 2 главы II (коммутативность и ассоциативность сложения, свойства дистрибутивности умножения на число и т. д.). В частности, верны формулы: $1\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}$, $0\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0}$, $(-1)\cdot\mathbf{v}=-\mathbf{v}$. Так же, как и в главе II, вводим для векторов n-мерного арифметического пространства понятия линейной комбинации, линейной зависимости (и независимости) и доказываем все алгебраические предложения из § 5 главы II (формулировки и доказательства сохраняются дословно).

Замечание 1. В качестве обязательного упражнения читателю предлагается доказать, что векторы

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1&=\{1, 0, \ldots, 0\},\\ \mathbf{v}_2&=\{0, 1, \ldots, 0\},\\ &\ldots\ldots\ldots\\ \mathbf{v}_n&=\{0, 0, \ldots, 1\}\end{aligned}$$

n-мерного арифметического пространства линейно независимы и что каждый вектор $\mathbf{v}=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ записывается (при этом единственным образом) в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, а именно:

$$\mathbf{v}=x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+\ldots+x_n\mathbf{v}_n.$$

2. Общее определение матрицы. Детерминанты n-го порядка. Невырождающиеся матрицы. *Матрицей называется любая прямоугольная таблица вида*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов.

Если $m=n$, то матрица называется квадратной, а число $m=n$ называется ее порядком.

Мы будем предполагать, что элементы a_{ik} матрицы суть числа (но в математике рассматриваются и матрицы, элементами которых являются, например, функции и вообще любые элементы какого-нибудь заданного множества).

Матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которую мы получим, сделав столбцы матрицы A строками матрицы A^* (а строки — столбцами, с сохранением порядка тех и других), называется матрицей, транспонированной к матрице A.

Очевидно, $(A^*)^* = A$.

Переходим к определению детерминанта (квадратной) матрицы A порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Назовем *молнией* любое множество, состоящее из n элементов матрицы (1) и удовлетворяющее тому условию, что никакие два элемента этого множества не принадлежат одному столбцу или одной строке. Каждая молния содержит, следовательно, ровно по одному элементу из каждой строки и ровно по одному элементу из каждого столбца. Если эти элементы расположить в порядке возрастания номеров содержащих их строк, то молния запишется в виде

$$\langle a_{1i_1}, a_{2i_2}, \dots, a_{ni_n} \rangle. \tag{2}$$

Если писать ту же молнию в порядке возрастания номеров столбцов, то она запишется в виде

$$\langle a_{j_1 1}, a_{j_2 2}, \dots, a_{j_n n} \rangle. \tag{3}$$

Каждая молния порождает вполне определенное взаимно однозначное соответствие между строками и столбцами матрицы A, а именно:

$$\begin{array}{l} 1 \;\; 2 \;\; \dots \;\; n \text{ (номера строк)}, \\ \updownarrow \;\; \updownarrow \;\;\;\; \updownarrow \\ i_1 \;\; i_2 \;\; \dots \;\; i_n \text{(номера соответствующих им столбцов)}. \end{array}$$

Это же соответствие может быть записано и в виде

$$\begin{array}{l} j_1 \;\; j_2 \;\; \dots \;\; j_n \text{ (номера строк)}, \\ \updownarrow \;\; \updownarrow \;\;\;\; \updownarrow \\ 1 \;\; 2 \;\; \dots \;\; n \text{ (номера соответствующих им столбцов)}. \end{array}$$

Другими словами, имеем одну и ту же перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

так что перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

взаимно обратны и, следовательно, имеют один и тот же знак, называемый *знаком молнии*. Произведение всех элементов данной молнии, взятое со знаком $+$, если молния положительная, и со знаком $-$, если она отрицательная, называется *зарядом молнии*. Сумма зарядов всех молний данной матрицы называется *детерминантом* этой матрицы. Детерминант матрицы порядка n кратко называется *детерминантом порядка* n и обозначается через

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \text{зн}\,(i_1 i_2 \dots i_n)\, a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} =$$

$$= \sum \text{зн}\,(j_1 j_2 \dots j_n)\, a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n}$$

(суммирование по всем $n!$ перестановкам $i_1 i_2 \dots i_n$, соответственно $j_1 j_2 \dots j_n$).

Уже при изучении матриц второго и третьего порядка мы могли убедиться, насколько важным является обращение или необращение в нуль детерминанта матрицы. Поэтому введем следующее

Определение. *Матрица A называется невырождающейся, если она есть квадратная матрица с детерминантом, отличным от нуля.*

3. Основные свойства детерминантов. Перечислим основные свойства детерминантов n-го порядка.

1° *Данная матрица*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и транспонированная матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

имеют один и тот же детерминант.

В самом деле, каждая молния

$$\langle a_{1i_1},\ a_{2i_2},\ \ldots,\ a_{ni_n}\rangle \equiv \langle a_{j_11},\ a_{j_22},\ \ldots,\ a_{j_nn}\rangle$$

одной из двух матриц A, A^* является молнией и другой матрицы; при этом производимая данной молнией перестановка строк одной матрицы является в другой матрице перестановкой столбцов. Поэтому в обеих матрицах каждая данная молния имеет один и тот же знак, значит, и один и тот же заряд. Сумма зарядов всех молний в матрицах A и A^* одна и та же, а это и значит, что $\det A = \det A^*$.

Свойство 1° детерминанта имеет своим следствием, что каждое высказывание, верное для строк детерминанта, сохраняет свою силу и для столбцов, и обратно.

2° *Если все элементы какой-либо строки (какого-либо столбца) матрицы A умножить на произвольное число λ, то на это же λ умножится и весь детерминант матрицы A.*

В самом деле, если мы строку

$$a_{h1},\ a_{h2},\ \ldots,\ a_{hn}$$

заменим строкой

$$\lambda a_{h1},\ \lambda a_{h2},\ \ldots,\ \lambda a_{hn},$$

то в каждой молнии

$$\langle a_{1i_1},\ a_{2i_2},\ \ldots,\ a_{hi_h},\ \ldots,\ a_{ni_n}\rangle$$

элемент a_{hi_h} заменится на λa_{hi_h}, а остальные элементы останутся без изменения. Поэтому заряд каждой молнии умножится на λ, значит, на λ умножится и детерминант $\det A$.

Обозначая векторы-строки матрицы A через

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \{a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n}\},\\
\mathbf{u}_2 &= \{a_{21},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2n}\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{u}_n &= \{a_{n1},\ a_{n2},\ \ldots,\ a_{nn}\},
\end{aligned}$$

мы можем рассматривать детерминант $\det A$ как функцию векторов $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \ldots,\ \mathbf{u}_n$ и записывать его в виде

$$\det A = D(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \ldots,\ \mathbf{u}_n).$$

В этой записи свойство 2° выражается в виде

$$D(\mathbf{u}_1,\ \ldots,\ \lambda\mathbf{u}_h,\ \ldots,\ \mathbf{u}_n) = \lambda D(\mathbf{u}_1,\ \ldots,\ \mathbf{u}_h,\ \ldots,\ \mathbf{u}_n).$$

3° *Если вектор-строка матрицы A*

$$\mathbf{u}_h = \{a_{h1},\ a_{h2},\ \ldots,\ a_{hn}\}$$

есть сумма двух векторов $\mathbf{u}'_h = \{a'_{h1},\ \ldots,\ a'_{hn}\}$ *и* $\mathbf{u}''_h = \{a''_{h1},\ \ldots,\ a''_{hn}\}$,

то

$$D(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h, \ldots, \mathbf{u}_n) = D(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}'_h, \ldots, \mathbf{u}_n) + D(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}''_h, \ldots, \mathbf{u}_n)$$

или, в более подробной записи,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{h1}+a''_{h1} & a'_{h2}+a''_{h2} & \ldots & a'_{hn}+a''_{hn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{h1} & a'_{h2} & \ldots & a'_{hn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a''_{h1} & a''_{h2} & \ldots & a''_{hn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

В самом деле, заряд каждой молнии детерминанта $\operatorname{Det} A = D(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_h, \ldots, \mathbf{u}_n)$ есть умноженное на знак перестановки $i_1 i_2 \ldots i_n$ число

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots (a'_{hi_h} + a''_{hi_h}) \ldots a_{ni_n} =$$
$$= a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a'_{hi_h} \ldots a_{ni_n} + a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a''_{hi_h} \ldots a_{ni_n}.$$

Суммирование по всем молниям дает слева $D(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, а справа $D(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}'_h, \ldots, \mathbf{u}_n) + D(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}''_h, \ldots, \mathbf{u}_n)$.

Введем теперь следующее весьма важное понятие.

Функция $F(u, v, w)$ называется *линейной* — например, по аргументу v, — если

$$F(u, v' + v'', w) = F(u, v', w) + F(u, v'', w)$$

и

$$F(u, \lambda v, w) = \lambda F(u, v, w).$$

Аналогично для функций любого числа аргументов $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Введя это определение, мы можем совокупность свойств 2° и 3° сформулировать так:

Детерминант $D(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ есть функция от своих n аргументов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, линейная по каждому из этих аргументов.

Аналогичное утверждение имеет, разумеется, место, если рассматривать детерминант как функцию столбцов матрицы.

Очевидно (и следует из 2°) свойство

4° *Если в матрице A какая-нибудь строка (столбец) состоит из нулей, то детерминант матрицы A равен нулю.*

В самом деле, каждая молния матрицы A будет содержать нуль в числе элементов, значит, ее заряд будет равен нулю.

5° *При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее детерминант, сохраняя свою абсолютную величину, меняет знак.*

В самом деле, при перестановке двух каких-либо строк детерминанта, положим h-й и k-й, в молнии

$$\langle a_{1i_1},\ a_{2i_2},\ \ldots,\ a_{hi_h},\ \ldots,\ a_{ki_k},\ \ldots,\ a_{ni_n}\rangle$$

переставляются элементы a_{hi_h} и a_{ki_k}; другими словами, порождаемая этой молнией перестановка столбцов

$$i_1\ \ldots\ i_h\ \ldots\ i_k\ \ldots\ i_n$$

испытывает транспозицию $\begin{pmatrix} i_h \\ i_k \end{pmatrix}$, от чего знак этой перестановки, т. е. знак молнии, меняется на противоположный. Итак, при перестановке двух строк заряд каждой молнии, сохраняя свою абсолютную величину, меняет свой знак, откуда утверждение 5° и следует.

Аналогичное утверждение верно, конечно, и для столбцов.

Из свойства 5° вытекает свойство

6° *Если в матрице имеются две одинаковые строки (два одинаковых столбца), то ее детерминант равен нулю.*

Доказательство — как для матриц третьего порядка.

7° *Если к какой-нибудь строке*

$$\mathbf{u}_h = \{a_{h1},\ a_{h2},\ \ldots,\ a_{hn}\}$$

матрицы почленно прибавить другую строку

$$\mathbf{u}_k = \{a_{k1},\ a_{k2},\ \ldots,\ a_{kn}\},$$

помноженную на какое-нибудь число λ, то детерминант матрицы не изменит своего значения, т. е.

$$D(\mathbf{u}_1,\ \ldots,\ \mathbf{u}_h + \lambda\mathbf{u}_k,\ \ldots,\ \mathbf{u}_n) = D(\mathbf{u}_1,\ \ldots,\ \mathbf{u}_h,\ \ldots,\ \mathbf{u}_n).$$

В самом деле (на основании свойств 3° и 2°),

$$\begin{aligned} &D(\mathbf{u}_1,\ \ldots,\ \mathbf{u}_h + \lambda\mathbf{u}_k,\ \ldots,\mathbf{u}_n) = \\ &= D(\mathbf{u}_1,\ \ldots,\ \mathbf{u}_h,\ \ldots,\ \mathbf{u}_n) + \lambda D(\mathbf{u}_1,\ \ldots,\ \mathbf{u}_k,\ \ldots,\ \mathbf{u}_k,\ \ldots,\ \mathbf{u}_n) = \\ &\quad = D(\mathbf{u}_1,\ \ldots,\ \mathbf{u}_h,\ \ldots,\ \mathbf{u}_n) + \lambda \cdot 0 = D(\mathbf{u}_1,\ \ldots,\ \mathbf{u}_h,\ \ldots,\ \mathbf{u}_n). \end{aligned}$$

Последовательно применяя это предложение, получаем, очевидно:

7′° *Если к какой-нибудь строке (столбцу) матрицы прибавить произвольную линейную комбинацию других строк (столбцов) той же матрицы, то значение детерминанта матрицы не изменится.*

Отсюда в свою очередь вытекает:

8° *Если какая-нибудь строка (какой-нибудь столбец) матрицы есть линейная комбинация других строк (столбцов) этой же матрицы, то детерминант матрицы равен нулю.*

(Доказательство — как при $n=3$.)

Доказанное утверждение может быть сформулировано так:

8′° *Если строки (столбцы) матрицы образуют линейно зависимую систему, то детерминант матрицы равен нулю.*

В § 7 главы XII мы докажем и обратное предложение.

§ 7. Разложение детерминанта n-го порядка по элементам данной строки (данного столбца)

В начале § 4 мы определили минор и адъюнкту для матриц порядка $n=3$. Это определение остается в силе для любого n.

Минором элемента a_{ik} *матрицы*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрица, полученная из матрицы A вычеркиванием той строки и того столбца, на пересечении которых лежит элемент a_{ik} (т. е. i-й строки и k-го столбца). Детерминант минора элемента a_{ik} в матрице A, умноженный на $(-1)^{i+k}$, называется адъюнктой элемента a_{ik} и обозначается через A_{ik}.

Докажем одно из самых важных свойств детерминантов, а именно:

9° *Детерминант* $\det A$ *равен сумме произведений элементов какой-нибудь его строки (столбца) на адъюнкты этих элементов:*

$$\left.\begin{aligned} \det A &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}, \\ \det A &= a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\dots+a_{nk}A_{nk}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Достаточно доказать первое из двух равенств (1).

Возьмем какой-нибудь элемент a_{ik} и обозначим через $Q_{ik}=Q$ его минор в матрице A.

Рассмотрим какую-нибудь молнию M матрицы A, содержащую элемент a_{ik}; остальные элементы молнии M образуют молнию M' минора Q. Следовательно, произведение элемента a_{ik} на заряд молнии M' равно заряду молнии M, помноженному на (-1) в какой-то степени; мы сейчас докажем: $(-1)^{i+k}$.

Пусть сначала $i=k=1$, так что

$$A=\left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right), \qquad Q=\begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Берем произвольную молнию матрицы A, содержащую элемент a_{11}:

$$M=\langle a_{11},\ a_{2i_2},\ \ldots,\ a_{ni_n}\rangle;$$

соответствующая молния M' минора Q есть

$$M'=\langle a_{2i_2},\ a_{3i_3},\ \ldots,\ a_{ni_n}\rangle.$$

Знак молнии M есть знак перестановки

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n\\ 1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Знак молнии M' есть знак перестановки

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & \ldots & n\\ i_2 & i_3 & \ldots & i_n\end{pmatrix}. \tag{2'}$$

Обе перестановки (2) и (2′) — и, значит, обе молнии M и M' — имеют один и тот же знак, заряд молнии M равен произведению элемента a_{11} на заряд молнии M'; в то же время $i=k=1$, $(-1)^{i+k}=1$. Итак, для разобранного частного случая утверждение доказано.

Пусть теперь a_{ik} — какой-нибудь элемент матрицы A. Переставляем последовательно i-ю строку с $(i-1)$-й, затем $(i-1)$-ю с $(i-2)$-й и т. д., пока наконец i-я строка не станет на первое место.

Например, если $n=4$, $i=3$, $k=2$,

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix},\quad Q=Q_{32}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{23} & a_{24}\\ a_{41} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix},$$

то получаем последовательно матрицы

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} & a_{34}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} & a_{34}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}.$$

Итак, после $i-1$ транспозиций строк i-я строка стала на первое место, а *остальные строки сохранили свой порядок*.

Затем в полученной матрице мы переставляем k-й столбец с $(k-1)$-м, затем с $(k-2)$-м и т. д., пока он не станет на первое место; остальные столбцы при этом сохраняют свой порядок. В результате этих $k-1$ транспозиций столбцов мы придем к матрице A', в которой элемент a_{ik} будет стоять уже в верхнем левом углу, а его минор будет по-прежнему минор Q.

В нашем примере $k=2$, и мы получим

$$A'=\left(\begin{array}{c|ccc} \boxed{a_{32}} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right), \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}=Q.$$

Матрица A' получается из матрицы A посредством $(i-1)+(k-1)=i+k-2$ транспозиций строк и столбцов; молнии в обеих матрицах одни и те же, но заряд какой-либо молнии в одной из этих матриц получается из заряда той же молнии в другой матрице умножением на $(-1)^{i+k-2}=(-1)^{i+k}$. Пусть M — какая-нибудь молния матрицы A, содержащая элемент a_{ik}, M' — молния минора $Q_{ik}=Q$, полученная вычеркиванием из M элемента a_{ik}. Матрица Q является минором элемента a_{ik} как в матрице A, так и в A'. Заряд молнии M в A' равняется произведению a_{ik} на заряд молнии M'. Но заряд молнии M в A есть произведение заряда той же молнии M в A' на $(-1)^{i+k}$; поэтому

$$\text{зар. молнии } M \text{ в } A=(-1)^{i+k}a_{ik}\cdot\text{зар. молнии } M' \text{ в } Q. \qquad (3)$$

Когда M пробегает все молнии матрицы A, содержащие элемент a_{ik}, то M' пробегает все молнии минора Q, причем соответствие между молниями M и M' взаимно однозначно.

Поэтому, суммируя равенства (3) по всем молниям M в A, содержащим a_{ik}, — или, что то же, по всем молниям M' матрицы Q, — мы справа получаем $(-1)^{i+k}a_{ik}$, умноженное на детерминант матрицы Q, т. е. получаем $a_{ik}A_{ik}$. Итак,

$$\text{сумма зарядов молний матрицы } A, \text{ содержащих } a_{ik}, \text{ равна } a_{ik}A_{ik}. \qquad (4)$$

При данном постоянном i всякая молния матрицы A содержит единственный элемент a_{ik}. Поэтому, суммируя равенство (4) по всем $k=1, 2, \ldots, n$, получаем слева сумму зарядов всех вообще молний матрицы A, т. е. $\det A$, справа $a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$; первое из равенств (1) доказано.

Сделаем следующее замечание, которое понадобится нам и сейчас, и в следующем параграфе.

9′° *Если в матрице*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

заменить элементы какой-нибудь строки, положим i-й, произвольными числами b_1, b_2, b_3, ..., b_n, то на адъюнкты этих элементов эта замена не окажет (очевидно) никакого влияния, а детерминант новой матрицы будет равен

$$b_1A_{i1} + b_2A_{i2} + \ldots + b_nA_{in}.$$

Аналогичное утверждение верно, разумеется, и для столбцов:

$$\det B_i = b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \ldots + b_nA_{ni}. \tag{5}$$

Утверждение следует из формул (1) (свойство 9^c).

Если, в частности, положить

$$b_1 = a_{j1},\ b_2 = a_{j2},\ \ldots,\ b_n = a_{jn},$$

то (при $i \neq j$) в матрице после этой замены окажутся **две одинаковые** строки

$$a_{j1},\ a_{j2},\ \ldots,\ a_{jn}$$

на j-м и на i-м месте, так что детерминант новой матрицы **окажется** равным нулю.

Мы получим формулы

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \ldots + a_{jn}A_{in} = 0 \qquad (\text{при } i \neq j),$$

аналогично

$$a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \ldots + a_{nj}A_{ni} = 0 \qquad (\text{при } i \neq j),$$

выражающие свойство:

10° *Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) данной матрицы на адъюнкты элементов другой строки (другого столбца) равна нулю.*

§ 8. Правило Крамера для решений систем n уравнений с n неизвестными

Пусть дана система n уравнений первой степени с n неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\

получаем (на основании свойства 10° для столбцов)

$$(a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \ldots + a_{ni}A_{ni})\, x_i = b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \ldots + b_nA_{ni}.$$

Но в силу 9° коэффициент при x_i есть $\det A$, а в силу 9'° правая часть есть детерминант $\det B_i$ матрицы, полученной из матрицы A заменой i-го столбца столбцом свободных членов $b_1, \ldots, b_n$. Поэтому (и так как $\det A \neq 0$) имеем

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Итак, из (1) следует (3); если система уравнений (1) имеет решение, то это решение дается формулами (3) и, следовательно, единственно. Проверка, т. е. подстановка значений x_i, даваемых формулами (3), в уравнения (1), показывает (совершенно, как в § 4), что формулы (3) действительно дают решение системы (1).

Итак, доказана общая

Теорема 6. *Если система уравнений* (1) *имеет детерминант* (2), *не равный нулю, то эта система имеет единственное решение, которое находится по формулам* (3) (*называемым «правилом Крамера»*). *В частности, система из n однородных уравнений с n неизвестными, имеющая детерминант, не равный нулю, обладает единственным, а именно нулевым, решением.*

Дальнейшее исследование систем линейных уравнений мы отложим до главы XIV.

§ 9. Общее определение миноров матрицы. Теорема Лапласа[1])

Возьмем в данной матрице A из m строк и n столбцов какие-нибудь p строк, положим i_1-ю, i_2-ю, ..., i_p-ю, и q столбцов, положим k_1-й, k_2-й, ..., k_q-й. Элементы, лежащие на пересечениях выделенных строк и столбцов, образуют матрицу, состоящую из p строк и q столбцов. Всякая матрица, таким образом полученная, называется матрицей, содержащейся в первоначальной матрице A, или *частью матрицы* A. Например, частью матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \end{pmatrix} \tag{1}$$

[1]) Лаплас (Pierre Simon Laplace, 1749—1827) — один из величайших математиков последней четверти XVIII и первой четверти XIX века, работы которого, относящиеся к различным областям математического анализа, а также к теории вероятностей, небесной механике и математической физике, занимают выдающееся место в истории этих областей знания.

является матрица

$$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{26} \\ a_{42} & a_{44} & a_{46} \\ a_{52} & a_{54} & a_{56} \end{pmatrix}.$$

Любая квадратная матрица, содержащаяся в данной матрице, называется *минором данной матрицы*. Если минор r-го порядка образован элементами, лежащими в первых r строках и первых r столбцах матрицы A, то он называется *угловым минором* r-го порядка матрицы A; так, например, матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

есть угловой минор третьего порядка матрицы (1).

Предположим, что исходная матрица A квадратная и имеет порядок n. Берем какой-нибудь лежащий в ней минор p-го порядка, $p < n$. Этот минор, обозначим его через P, лежит в каких-то p строках и p столбцах матрицы A. Остальные $n-p$ строк и $n-p$ столбцов матрицы A определяют однозначно минор $(n-p)$-го порядка Q, называемый *минором, дополнительным к данному минору* P; свойство дополнительности двух миноров, очевидно, взаимное.

Ниже схематически изображены два взаимно дополнительных минора P и Q соответственно четвертого и второго порядка в матрице A шестого порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{16} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} & a_{36} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{63} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Назовем *адъюнктой минора* P, лежащего в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_p$ и столбцах с номерами $k_1, k_2, \ldots, k_p$, детерминант дополнительного минора Q, умноженный на число

$$(-1)^{(i_1+i_2+\ldots+i_p)+(k_1+k_2+\ldots+k_p)},$$

называемое *указателем минора* P.

Для краткости будем часто полагать

$$s = i_1 + i_2 + \ldots + i_p + k_1 + k_2 + \ldots + k_p.$$

Если возьмем какую-нибудь молнию M' из P и объединим ее с какой-нибудь молнией[1]) M'' из Q, то получим вполне определенную молнию $M = M' \cup M''$ матрицы A.

Например, объединение молнии

$$M' = \langle a_{15}, a_{31}, a_{56}, a_{63} \rangle \tag{2}$$

минора P с молнией

$$M'' = \langle a_{24}, a_{42} \rangle \tag{3}$$

минора Q есть молния

$$M = \langle a_{15}, a_{24}, a_{31}, a_{42}, a_{56}, a_{63} \rangle \tag{4}$$

матрицы A. Следовательно, произведение зарядов молний (2) и (3) есть заряд молнии (4), умноженный, как мы сейчас докажем, на $(-1)^s$, т. е. на указатель минора P.

Докажем наше утверждение сначала в предположении, что P есть угловой минор:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{pmatrix}.$$

Всякая молния минора P имеет вид

$$M' = \langle a_{1i_1}, \ldots, a_{pi_p} \rangle;$$

всякая молния минора Q имеет вид

$$M'' = \langle a_{p+1,i_{p+1}}, \ldots, a_{ni_n} \rangle.$$

---

[1]) Ведь молния есть некоторое множество элементов матрицы; речь идет об объединении этих множеств.

Знак молнии M' есть знак перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix}, \tag{5}$$

знак молнии M'' есть знак перестановки

$$\begin{pmatrix} p+1 & \dots & n \\ i_{p+1} & \dots & i_n \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Две молнии M' и M'' объединяются в молнию

$$M = \langle a_{1i_1}, a_{2i_2}, \dots, a_{pi_p}, a_{p+1,i_{p+1}}, \dots, a_{ni_n} \rangle,$$

знак которой есть знак перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p & p+1 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p & i_{p+1} & \dots & i_n \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Так как при $h \leqslant p$, $k \geqslant p+1$ всегда $i_h \leqslant p < p+1 \leqslant i_k$, то всякая инверсия перестановки (7) содержится или в (5), или в (6).

Поэтому число инверсий в (7) равно сумме числа инверсий в (5) и (6) и знак перестановки (7) есть произведение знаков перестановок (5) и (6), значит, и заряд молнии M есть произведение зарядов M' и M''. В то же время указатель углового минора P есть $(-1)^{(1+2+\dots+p)+(1+2+\dots+p)} = (-1)^{2(1+2+\dots+p)} = 1$ — утверждение доказано.

Пусть теперь P — произвольный минор матрицы A, лежащий в строках и столбцах этой матрицы, номера которых суть соответственно $i_1, \dots, i_p$; $k_1, \dots, k_p$. Переставляем i_1-ю строку матрицы A последовательно с (i_1-1)-й, (i_1-2)-й, ..., пока она после i_1-1 транспозиций не займет наконец 1-го места. Потом переставляем i_2-ю строку с (i_2-1)-й, (i_2-2)-й, ... до тех пор, пока она после i_2-2 транспозиций не займет 2-го места. Продолжая эти перестановки, мы наконец поместим после i_p-p транспозиций i_p-ю строку на p-е место.

В результате после

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\dots+(i_p-p) = (i_1+i_2+\dots+i_p)-(1+2+\dots+p) \tag{8}$$

транспозиций строк матрицы A достигнем того, что i_1-я, i_2-я, ..., i_p-я строки этой матрицы займут соответственно 1-е, 2-е, ..., p-е место, а взаимный порядок остальных строк останется тем же, что и до этих перестановок. Теперь возьмемся за столбцы и, поступая с ними так

же, как только что со строками, достигнем того, что после

$$(k_1-1)+(k_2-2)+\ldots+(k_p-p)= \\ =(k_1+k_2+\ldots+k_p)-(1+2+\ldots+p) \quad (9)$$

транспозиций столбцы, имевшие в матрице A номера $k_1, \ldots, k_p$, станут соответственно на 1-е, 2-е, ..., p-е место. В результате всех этих перестановок матрица A превратится в некоторую матрицу A', состоящую из тех же элементов и имеющую те же молнии, что и матрица A, но расположенных уже по-другому — так, что минор P матрицы A станет угловым минором p-го порядка матрицы A', а *дополнительным к нему минором в матрице A' будет по-прежнему минор Q*.

Произведение зарядов произвольной молнии M' минора P и произвольной молнии M'' минора Q равно заряду молнии $M=M'\cup M''$ в матрице A'. Так как матрица A' произошла из матрицы A в результате $(i_1+\ldots+i_p)+(k_1+\ldots+k_p)-2(1+\ldots+p)$ транспозиций, то заряд какой-либо молнии M в матрице A отличается от заряда той же молнии в матрице A' множителем $(-1)^s$. Поэтому произведение зарядов молний M' и M'' (соответственно в P и в Q) равно произведению $(-1)^s$ на заряд молнии $M=M'\cup M''$ в A.

Какова бы ни была молния M матрицы A, содержащая произвольную, но фиксированную молнию M' минора P, совокупность остальных элементов молнии M, т. е. элементов, не входящих в P, образует некоторую (однозначно) определенную молнию M'' минора Q, и мы имеем

$$\text{зар. } M \text{ в } A=(-1)^s\cdot\text{зар. } M'\cdot\text{зар. } M''. \quad (10)$$

Пусть M пробегает все молнии матрицы A, содержащие какую бы то ни было молнию M' минора P. Каждая такая молния (однозначно) представима в виде

$$M=M'\cup M''. \quad (11)$$

Тогда не только M' в формуле (11) пробегает все молнии минора P, но и M'' пробегает все молнии минора Q; это вытекает из того, что, какую бы молнию M из матрицы A, содержащую молнию M' минора P, мы ни взяли, она однозначно дополняется молнией M'' из минора Q. При этом каждый раз имеет место формула (10). Поэтому, если мы просуммируем равенства (10) по всем молниям, содержащим молнии из P, то в правой части равенства мы получим $(-1)^s$, помноженную на сумму зарядов всех молний M' из P и на сумму зарядов всех молний M'' из Q.

Другими словами:

Сумма зарядов всех молний M матрицы A, содержащих всевозможные молнии матрицы P, равна $(-1)^s \det P\cdot\det Q$. (12)

Пусть теперь в матрице A фиксированы строки, имеющие номера $i_1, i_2, \ldots, i_p$. Через P будем обозначать всевозможные миноры p-го порядка, лежащие в этих строках, через Q — дополнительные к P миноры.

Для каждой молнии M матрицы A существует единственный такой минор P (лежащий в заданных p строках), что M содержит молнию M' этого минора. В самом деле, если лежащие в заданных p строках элементы молнии M суть $a_{i_1k_1}, a_{i_2k_2}, \ldots, a_{i_pk_p}$, то минор P есть минор, лежащий в i_1-й, ..., i_p-й строках и k_1-м, ..., k_p-м столбцах. Поэтому каждая молния M матрицы A единственным образом представима в виде (11), и если мы просуммируем равенства (12) по всем минорам P (лежащим в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_p$), то слева мы получим сумму всех зарядов матрицы A, а справа — сумму произведений $(-1)^s \det P \cdot \det Q$, взятую по всем названным P. Итак, нами доказана следующая знаменитая в теории детерминантов

Теорема 7 (теорема Лапласа). *Пусть в матрице A произвольно выбраны p строк. Тогда детерминант матрицы A есть сумма произведений детерминантов миноров P порядка p, лежащих в выбранных p строках, на адъюнкты этих миноров.*

§ 10. Умножение детерминантов

Пусть требуется перемножить два детерминанта третьего порядка:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим детерминант шестого порядка

$$P=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

При любых элементах $c_{11}, c_{12}, c_{13}; c_{21}, c_{22}, c_{23}; c_{31}, c_{32}, c_{33}$, помещенных в левом нижнем углу детерминанта (1), значение этого детерминанта по теореме Лапласа равно AB. Пользуясь этой свободой в выборе элементов $c_{11}, c_{12}, c_{13}; c_{21}, c_{22}, c_{23}; c_{31}, c_{32}, c_{33}$, можем

написать

$$P=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = AB.$$

Преобразуем теперь четвертый столбец нашего детерминанта, прибавив к нему (почленно)

первый столбец, умноженный на b_{11},
второй столбец, умноженный на b_{21},
третий столбец, умноженный на b_{31}.

К пятому столбцу прибавим

первый столбец, умноженный на b_{12},
второй столбец, умноженный на b_{22},
третий столбец, умноженный на b_{32}.

Наконец, к шестому столбцу прибавим

первый столбец, умноженный на b_{13},
второй столбец, умноженный на b_{23},
третий столбец, умноженный на b_{33}.

В результате детерминант P своего значения не изменит, но запишется в виде

$$AB=P=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

где

$$p_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+a_{i3}b_{3k} \quad (i,\ k=1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

Применяя теорему Лапласа к последним трем строкам этого детерминанта, видим, что он равен

$$AB=\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Назовем (формальным) скалярным произведением двух троек чисел $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ и $\{a, b, c\}$ число $\alpha a+\beta b+\gamma c$. Теперь можем следующим

образом сформулировать полученное *правило умножения детерминантов*.

Теорема 8. *Произведение двух детерминантов n-го порядка A и B есть детерминант n-го порядка P, элемент которого p_{ik}, стоящий на пересечении i-й строки и k-го столбца, есть (формальное) скалярное произведение i-й строки детерминанта A на k-й столбец детерминанта B.*

Замечание 1. Замена строк столбцами в одном (или в обоих) из перемножаемых детерминантов приводит к соответствующим вариантам правила умножения детерминантов: вместо (формального) произведения i-й строки детерминанта A на k-й столбец детерминанта B можно (для получения элемента p_{ik}) детерминанта P (формально) умножать

i-й столбец A на k-й столбец B,
i-й столбец A на k-ю строку B,
i-ю строку A на k-ю строку B

— всего четыре варианта.

Замечание 2. Мы провели доказательство правила умножения детерминантов n-го порядка для $n=3$; это доказательство, однако, совершенно общее, и читатель сам должен переизложить его для любого n.

§ 11. Детерминант n-го порядка как линейная нечетная нормированная функция от n векторов

Мы видели, что детерминант n-го порядка

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix},$$

рассматриваемый как функция $D(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ от n векторов:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}\}, \\ \mathbf{u}_2 &= \{x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}\}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{u}_n &= \{x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}\}, \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

обладает свойством линейности по всем своим аргументам, означающим, что

$$\left.\begin{aligned} &D(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h', \dots, \mathbf{u}_n) = \\ &\quad = D(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h, \dots, \mathbf{u}_n) + D(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h', \dots, \mathbf{u}_n), \\ &\quad D(\mathbf{u}_1, \dots, \lambda\mathbf{u}_h, \dots, \mathbf{u}_n) = \lambda D(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h, \dots, \mathbf{u}_n), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

а также свойством нечетности, или антикоммутативности, означающим, что функция, сохраняя свою абсолютную величину, меняет знак, если поменять местами два каких-либо ее аргумента:

$$D(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i, \ldots, \mathbf{u}_j, \ldots, \mathbf{u}_n) = -D(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_j, \ldots, \mathbf{u}_i, \ldots, \mathbf{u}_n). \tag{2}$$

Кроме того, функция $D(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, как говорят, *нормирована*. Это означает, что, полагая

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \{1, 0, \ldots, 0\}, \\ \mathbf{e}_2 &= \{0, 1, \ldots, 0\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}_n &= \{0, 0, \ldots, 1\}, \end{aligned}$$

имеем

$$D(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1. \tag{3}$$

Мы докажем сейчас следующее фундаментальное предложение.

Теорема 9. *Если функция $d(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ от векторов* (I) *обладает свойствами линейности по всем своим аргументам, нечетности и нормированности, то она есть детерминант $D(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$.*

Желая обойтись без длинных формул, мы докажем эту теорему для $n = 3$ — доказательство имеет общий характер и годится для любого n (в чем читатель должен убедиться сам).

Итак,

$$\mathbf{u}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}, \quad \mathbf{u}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}, \quad \mathbf{u}_3 = \{x_3, y_3, z_3\},$$

т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{u}_2 &= x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{u}_3 &= x_3\mathbf{e}_1 + y_3\mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Вычисляем, основываясь на линейности функции по всем ее аргументам:

$$\begin{aligned} &d(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \\ &= d(x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3,\ x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3,\ x_3\mathbf{e}_1 + y_3\mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{e}_3) = \\ &= \sum_{i,\ j,\ k=1}^{3} x_i y_j z_k\, d(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k). \end{aligned} \tag{4}$$

В этой сумме индексы i, j, k независимо друг от друга принимают значения 1, 2, 3, так что всего имеется 27 слагаемых.

Из нечетности функции d следует, однако, что при равенстве двух каких-либо из индексов i, j, k значение функции $d(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$ обращается в нуль (так как перестановка этих индексов, с одной стороны, не меняет значения функции, а с другой — меняет его знак, так что, например, $d(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = -d(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$, откуда $2d(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 0$, $d(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 0$). Поэтому в сумме (4) все те

слагаемые, в которых имеются два равных индекса, обращаются в нуль, и остаются лишь слагаемые, соответствующие всевозможным перестановкам трех индексов 1, 2, 3, так что

$$d(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = x_1y_2z_3\, d(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + x_2y_3z_1\, d(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + \\ + x_3y_1z_2\, d(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + x_2y_1z_3\, d(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + \\ + x_3y_2z_1 d(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + x_1y_3z_2 d(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2). \qquad (5)$$

Но $d(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$ в силу нормированности, а в силу нечетности функции при нечетной перестановке аргументов знак функции меняется на обратный, а при четной — остается неизменным. Поэтому

$$d(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \text{зн}\,(i\ j\ k),$$

т. е.

$$d(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = d(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = d(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1,$$
$$d(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = d(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = d(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = -1.$$

Подставляя это в (5), получаем

$$d(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \sum \text{зн}\,(ijk)\, x_i y_j z_k,$$

суммирование по всем перестановкам i, j, k из трех цифр 1, 2, 3, т. е.

$$d(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2$$

или

$$d(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

что и требовалось доказать.

ГЛАВА VIII

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ. МАТРИЦЫ

§ 1. Переход от одной аффинной системы координат к другой

1. Переход от одной аффинной системы координат к другой с тем же началом. Переход от одного базиса к другому. Матрица, обратная к данной. Как мы знаем, аффинная координатная система, или, как мы будем кратко говорить, аффинный *репер* [1]), в пространстве [2]) есть тройка некомпланарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, данных в определенном порядке и приложенных к точке O — началу репера.

Тройка векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ называется иногда *базисом репера* (или *координатной системы*); название основано на том, что эти векторы образуют базис многообразия всех (свободных) векторов трехмерного пространства.

Если наряду с репером $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, который будем условно называть «старым», дан «новый» репер с началом O' и базисом $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$, то возникает общая задача преобразования координат, сформулированная еще в главе III, § 2: по координатам произвольной точки M (произвольного вектора $\mathbf{u}$) в одной из двух систем координат найти координаты той же точки (того же вектора) в другой системе. Простейший случай этой задачи — когда оба репера имеют один и тот же базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и отличаются между собою только началом — уже был рассмотрен в главе III, § 2. Предположим теперь, что оба репера имеют одно и то же начало O. Тогда новый репер вполне определен, если заданы векторы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ своими координатами (относительно старого базиса), т. е. если даны коэффициенты a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ в равенствах

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3 &= a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

---

[1]) Первоначальное значение французского слова «repére» отправной пункт, метка, зарубка. Ударение (как всегда по-французски) на последнем слоге: репёр.

[2]) Мы излагаем случай пространства; случай плоскости отличается от него только большей простотой.

Матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей перехода* от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$, а также матрицей перехода от первого репера ко второму. Так как векторы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ линейно независимы, то детерминант матрицы A^* отличен от нуля [1] — *матрица перехода от одного базиса к другому есть всегда невырождающаяся матрица*. Так как векторы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ образуют базис, то каждый из векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в свою очередь однозначно представим как линейная комбинация векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= a'_{11}\mathbf{e}'_1 + a'_{21}\mathbf{e}'_2 + a'_{31}\mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_2 &= a'_{12}\mathbf{e}'_1 + a'_{22}\mathbf{e}'_2 + a'_{32}\mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{e}_3 &= a'_{13}\mathbf{e}'_1 + a'_{23}\mathbf{e}'_2 + a'_{33}\mathbf{e}'_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

— уравнения (1) *однозначно разрешимы* относительно старых единичных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Посмотрим, как связаны между собою координаты x, y, z и x', y', z' произвольной точки M (произвольного вектора $\mathbf{u} = \overrightarrow{OM}$) в старой и новой координатных системах.

Вектор $\mathbf{u} = \overrightarrow{OM}$ записывается, во-первых, как линейная комбинация векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ с коэффициентами x, y, z и, во-вторых, как линейная комбинация векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ с коэффициентами x', y', z', так что имеем тождество

$$\mathbf{u} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = x'\mathbf{e}'_1 + y'\mathbf{e}'_2 + z'\mathbf{e}'_3.$$

Вносим в это тождество выражения $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ из (1); получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = {} & x'(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3) + \\ & + y'(a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3) + z'(a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

или, группируя по-новому члены,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = {} & (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')\,\mathbf{e}_1 + \\ & + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')\,\mathbf{e}_2 + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')\,\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Но вектор $\mathbf{u}$ единственным образом представляется как линейная комбинация векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, следовательно, коэффициенты при векторах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в левой и правой частях последнего равенства

---

[1] См. VII, § 5, теорема 2.

должны быть одни и те же, т. е.

$$\left.\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эти формулы и выражают старые координаты x, y, z точки M (вектора $\mathbf{u}$) через новые. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

дающая это выражение, называется *матрицей преобразования координат*; она является транспонированной по отношению к матрице A^* перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$. Обе матрицы имеют один и тот же отличный от нуля детерминант. Следовательно, уравнения (2) однозначно решаются относительно x', y', z' по правилу Крамера:

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} x & a_{12} & a_{13} \\ y & a_{22} & a_{23} \\ z & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad y' = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & x & a_{13} \\ a_{21} & y & a_{23} \\ a_{31} & z & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad z' = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x \\ a_{21} & a_{22} & y \\ a_{31} & a_{32} & z \end{vmatrix}}{\det A}.$$

Разлагая в этих формулах числители по элементам столбца x, y, z, получаем

$$\left.\begin{aligned} x' &= a'_{11}x + a'_{12}y + a'_{13}z, \\ y' &= a'_{21}x + a'_{22}y + a'_{23}z, \\ z' &= a'_{31}x + a'_{32}y + a'_{33}z, \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

где

$$a'_{ik} = \frac{A_{ki}}{\det A} \tag{3}$$

и A_{ki} есть адъюнкта элемента a_{ki} в матрице A.

Определение. *Пусть матрица A — невырождающаяся матрица. Матрица*

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix},$$

где a'_{ik} определены формулами (3), *называется* ***матрицей, обратной к матрице***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

и обозначается через A^{-1}. Другими словами: если матрица A выражает координаты x, y, z (т. е. координаты относительно базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) через координаты x', y', z' (относительно базиса $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$), то обратная матрица определяется как матрица, выражающая координаты x', y', z', через координаты x, y, z, причем безразлично, понимаем ли мы под координатами координаты точки или вектора.

2. Переход от одной аффинной системы координат к другой с изменением начала координат. Общий случай перехода от репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ к реперу $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ сводится к комбинации двух случаев: переноса начала (гл. III, § 2) и только что разобранного случая перехода от одного базиса к другому. В самом деле, рассмотрим наряду с двумя реперами $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ еще третий, «промежуточный», имеющий начало $O'=(x_0, y_0, z_0)$ и базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$; координаты точки относительно этого промежуточного репера обозначим через x'', y'', z''. Тогда $x=x_0+x''$, $y=y_0+y''$, $z=z_0+z''$, где x'', y'', z'' выражаются через x', y', z' по формулам (2) (в которых, естественно, надо x, y, z (слева) соответственно заменить на x'', y'', z''). Получаем окончательно:

в пространстве:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y &= y_0 + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z &= z_0 + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'; \end{aligned}\right\} \qquad (4_3)$$

на плоскости:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + a_{11}x' + a_{12}y', \\ y &= y_0 + a_{21}x' + a_{22}y'. \end{aligned}\right\} \qquad (4_2)$$

Это и есть общие формулы преобразования координат для двух произвольных аффинных координатных систем.

Матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

коэффициентов a_{ik} в равенствах (4_3), соответственно (4_2), называется *матрицей преобразования координат.*

3. Уравнение гиперболы относительно ее асимптот. Пусть гипербола дана в канонической для нее системе координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5)$$

(рис. 101). Переходим к новому реперу $O\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$, где

$$\mathbf{e}'_1=\left\{\frac{a}{c}, -\frac{b}{c}\right\}, \qquad \mathbf{e}'_2=\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right\}, \quad c=\sqrt{a^2+b^2}$$

(т. е. принимаем за новые единичные векторы орты, направленные по асимптотам гиперболы)

$$A^* = \begin{pmatrix} \frac{a}{c} & -\frac{b}{c} \\ \frac{a}{c} & \frac{b}{c} \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{c} & \frac{a}{c} \\ -\frac{b}{c} & \frac{b}{c} \end{pmatrix},$$

т. е.

$$x = \frac{a}{c}x' + \frac{a}{c}y',$$

$$y = -\frac{b}{c}x' + \frac{b}{c}y';$$

внося эти выражения x, y через x', y' в уравнение (5), получаем после очевидных преобразований

$$x'y' = \frac{c^2}{4}. \tag{6}$$

Это уравнение называется *естественным уравнением гиперболы* относительно ее асимптот (ставших осями новой аффинной координатной системы).

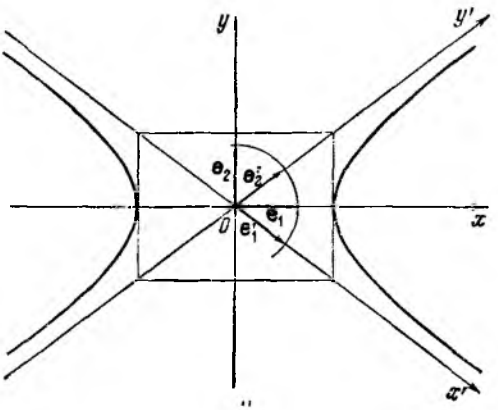


Рис. 101.

В частности, для равносторонней гиперболы

$$x^2 - y^2 = a^2 \tag{7}$$

имеем

$$x'y' = \frac{a^2}{2} \tag{8}$$

(см. гл. VI, § 6).

Если в общем случае произвольной гиперболы принять за новые оси ее асимптоты, не налагая никаких ограничений на длины единичных векторов, то уравнение гиперболы будет иметь вид

$$x'y' = k. \tag{9}$$

Число k может быть любым действительным числом, отличным от нуля.

§ 2. Перемножение матриц. Новое определение обратной матрицы

1. Произведение двух матриц. Предположим, что, наряду с исходным базисом $I = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, даны два базиса $I' = \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ и $I'' = \mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3$, причем известны матрицы перехода A^* от базиса I к базису I' и B^* от базиса I' к базису I'', а следовательно, и матрицы A, B соответствующих преобразований координат. Другими словами, даны формулы

$$\left.\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и

$$\left.\begin{aligned} x' &= b_{11}x'' + b_{12}y'' + b_{13}z'', \\ y' &= b_{21}x'' + b_{22}y'' + b_{23}z'', \\ z' &= b_{31}x'' + b_{32}y'' + b_{33}z''. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Требуется найти матрицу перехода C^* от базиса I к базису I'' или, что равносильно, матрицу C, выражающую координаты x, y, z через x'', y'', z'':

$$\left.\begin{aligned} x &= c_{11}x'' + c_{12}y'' + c_{13}z'', \\ y &= c_{21}x'' + c_{22}y'' + c_{23}z'', \\ z &= c_{31}x'' + c_{32}y'' + c_{33}z''. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Решение не представляет затруднений: надо просто подставить данные формулами (2) выражения для x', y', z' в (1) и сделать приведение подобных членов.

Получаем

$$\begin{aligned} x = a_{11}(b_{11}x'' + b_{12}y'' + b_{13}z'') + a_{12}(b_{21}x'' + b_{22}y'' + b_{23}z'') + \\ + a_{13}(b_{31}x'' + b_{32}y'' + b_{33}z''), \\ y = a_{21}(b_{11}x'' + b_{12}y'' + b_{13}z'') + a_{22}(b_{21}x'' + b_{22}y'' + b_{23}z'') + \\ + a_{23}(b_{31}x'' + b_{32}y'' + b_{33}z''), \\ z = a_{31}(b_{11}x'' + b_{12}y'' + b_{13}z'') + a_{32}(b_{21}x'' + b_{22}y'' + b_{23}z'') + \\ + a_{33}(b_{31}x'' + b_{32}y'' + b_{33}z''), \end{aligned}$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} x &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})x'' + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})y'' + \\ &\quad + (a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33})z'', \\ y &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})x'' + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})y'' + \\ &\quad + (a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{13}b_{33})z'', \\ z &= (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31})x'' + (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32})y'' + \\ &\quad + (a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33})z''. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Вспомним, что мы в § 10 главы VII назвали (формальным) скалярным произведением двух наборов чисел x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 (двух векторов арифметического векторного пространства) число $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Мы видим теперь, что первая, вторая, третья скобка в первом из равенств (4), т. е. первый, второй, третий элемент первой строки матрицы C, есть скалярное произведение первой строки матрицы A соответственно на первый, второй, третий столбец матрицы B и что вообще элемент c_{ik} матрицы C (стоящий на пересечении i-й строки и k-го столбца этой матрицы) есть скалярное произведение i-й строки матрицы A на k-й столбец матрицы B. Матрица C, построенная по этому правилу, называется *произведением матрицы A на матрицу B* и записывается в виде

$$C = AB; \tag{5}$$

при этом легко видеть на простых примерах (даже матриц второго порядка), что умножение матриц, вообще говоря, не коммутативно; поэтому важно, какая из двух перемножаемых матриц является первым («левым»), а какая вторым («правым») множителем.

Сопоставляя определение произведения двух матриц с доказанным в § 10 главы VII правилом перемножения детерминантов, видим, что *детерминант произведения двух матриц есть произведение детерминантов этих матриц*.

Следующее важное равенство доказывается непосредственной проверкой:

$$(AB)^* = B^*A^*,$$

где звездочка, как всегда, означает переход к транспонированной матрице [1]).

Так как матрица преобразования координат, соответствующая переходу от одного базиса к другому, транспонирована к соответствующей матрице перехода, то, обозначая через A^* матрицу перехода от базиса I к базису I', а через B^* матрицу перехода от базиса I' к базису I'', видим, что матрица $C^* = (AB)^*$ перехода от базиса I к базису I'' есть

$$C^* = B^*A^*, \tag{5*}$$

в чем читатель легко может убедиться и непосредственным вычислением.

---

[1]) Проверив это равенство для матриц второго (или третьего) порядка, что не представляет никакого труда, читатель увидит, что и общий случай квадратной матрицы порядка n допускает такую же непосредственную проверку.

2. Новое определение обратной матрицы. *Квадратная матрица*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

главная диагональ которой состоит из единиц, а все остальные элементы суть нули, называется единичной матрицей.

Единичная матрица третьего порядка есть, очевидно, матрица тождественного перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к этому же самому базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, или матрица тождественного преобразования координат

$$\begin{aligned} x &= x', \\ y &= y', \\ z &= z'. \end{aligned}$$

Пусть A — произвольная невырождающаяся матрица (третьего порядка). Легко вычислить непосредственно (обязательное упражнение!) [1]), что

$$AA^{-1} = E, \quad A^{-1}A = E.$$

Однако в этом можно убедиться и следующим образом, без вычислений. Матрицу A мы можем рассматривать как матрицу перехода от одного базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к другому $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ [2]). Делая сначала переход от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ (он дается матрицей A), а затем обратный переход от $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ (он дается матрицей A^{-1}), мы получим тождественный переход от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к этому же самому базису. Поэтому

$$A^{-1}A = E. \tag{6}$$

Делая сначала переход от базиса $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ к $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (матрица A^{-1}) и затем обратный переход к $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ (матрица A), мы видим, что

$$AA^{-1} = E. \tag{6'}$$

Отсюда следует, что

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \tag{7}$$

и, далее, что невырождающаяся матрица A и обратная к ней матрица A^{-1} всегда имеют детерминанты одного и того же знака.

---

[1]) При вычислении воспользоваться формулой (3) § 1, определяющей матрицу A^{-1}, и предложениями 9°, 10° из § 4 главы VII.

[2]) До сих пор мы ее рассматривали как матрицу преобразования координат; законно, очевидно, и то и другое.

§ 3. Переход от одной прямоугольной системы координат к другой

1. Случай прямоугольного репера на плоскости. Можно ограничиться реперами с общим началом. Базис прямоугольного репера состоит из двух взаимно перпендикулярных ортов. Такие базисы будем называть *прямоугольными* или *ортонормальными*.

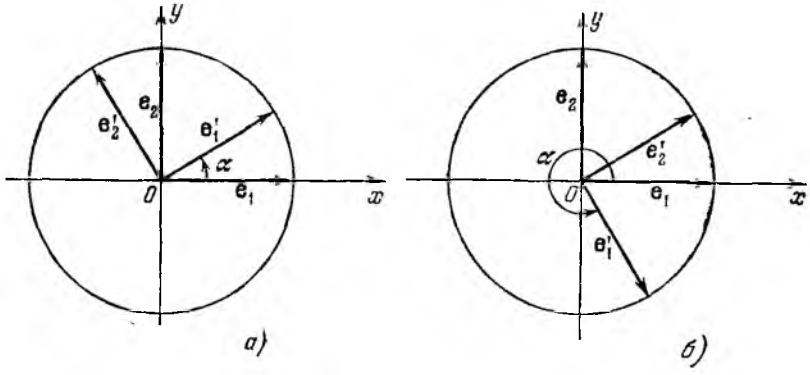


Рис. 102.

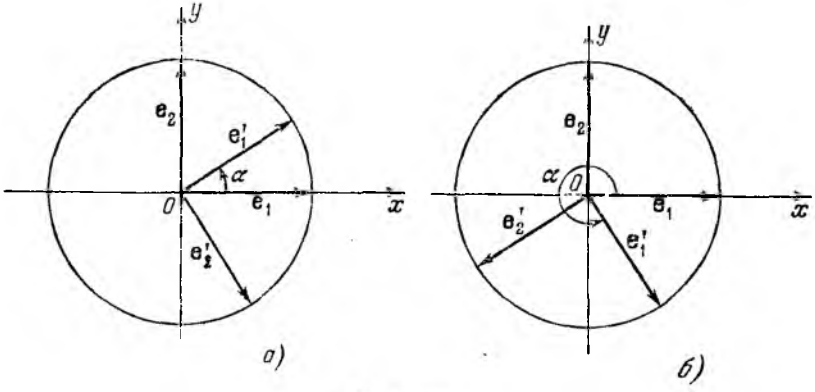


Рис. 103.

Лемма. *Пусть* Oe_1e_2 *и* $Oe_1'e_2'$ *— два ортогональных репера на плоскости с общим началом* O. *Тогда поворотом репера* Oe_1e_2 *в несущей его плоскости вокруг точки* O *на некоторый угол* α *можно перевести репер* Oe_1e_2 *либо в репер* $Oe_1'e_2'$, *либо в репер* $Oe_1'(-e_2')$ (рис. 102 и 103). *Другими словами: репер* $Oe_1'e_2'$ *получается из ре-*

пера Oe_1e_2 либо поворотом, либо поворотом и последующим отражением (относительно прямой, несущей вектор e_1').

Доказательство. Репер Oe_1e_2 определяет некоторое положительное направление вращения плоскости, а именно то направление, в котором угол от орта e_1 до орта e_2 равен $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{а не } \frac{3\pi}{2}\right)$. Обозначим через α угол от орта e_1 до орта e_1'. Повернув репер Oe_1e_2 (в его плоскости) в положительном направлении на угол α, мы совместим орт e_1 с ортом e_1'; тогда орт e_2, будучи перпендикулярен к орту e_1, либо совместится с ортом e_2' (рис. 102), либо совместится с противоположным ему ортом $-e_2'$ (рис. 103). Утверждение доказано.

Из доказанного следует, что относительно базиса e_1, e_2 орт e_1' имеет координаты $\cos\alpha$, $\sin\alpha$:

$$e_1' = \{\cos\alpha,\ \sin\alpha\},$$

тогда как для e_2' имеем две возможности:

либо

$$e_2' = \left\{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right\},$$

т. е.

$$e_2' = \{-\sin\alpha,\ \cos\alpha\},$$

либо

$$-e_2' = \{-\sin\alpha,\ \cos\alpha\},$$

и тогда

$$e_2' = \{\sin\alpha,\ -\cos\alpha\}.$$

Матрица перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2', имеет вид:

в первом случае

$$C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},\quad \det C = 1, \tag{I}$$

во втором

$$C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix},\quad \det C = -1. \tag{II}$$

Базисы e_1, e_2 и e_1', e_2' называются в первом случае *одноименными* или *одинаково ориентированными*, а во втором — *разноименными* или *противоположно ориентированными*.

Так как $\det C = 1$ в случае одноименных, $\det C = -1$ в случае разноименных базисов, то только что высказанное определение можно сформулировать и так:

Определение. *Два ортогональных базиса (репера) одноименны, если матрица перехода от одного из них к другому имеет*

положительный детерминант, и разноименны, если этот детерминант отрицателен.

Формулы преобразования координат даются матрицами, транспонированными к матрицам перехода от одного базиса к другому; это будут формулы:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$ в случае одноименных базисов,

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha - y'\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$ в случае разноименных базисов.

Строки матрицы C формул (I) и (II) выражают орты $\mathbf{e}_1'$ и $\mathbf{e}_2'$, записанные их координатами по отношению к базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Поэтому скалярное произведение этих строк должно быть равно нулю, а скалярный квадрат каждой строки — единице; матрица C должна быть, как говорят, «ортогональна по строкам», при этом каждая строка рассматривается как вектор, записанный своими координатами. И действительно, мы имеем:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$
$$\cos\alpha(-\sin\alpha) + \sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Аналогичная проверка доказывает и «ортогональность по столбцам» (скалярный квадрат каждого столбца равен 1, скалярное произведение двух различных столбцов равно 0)[1]).

Пример. Берем равнобочную гиперболу в каноническом уравнении

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Обозначим через $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ орты ее (взаимно перпендикулярных) асимптот, наклоненные к орту $\mathbf{e}_1$ канонической системы координат под углами $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$ и $\frac{\pi}{4}$; тогда имеем:

$$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$x = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{y'-x'}{\sqrt{2}}.$$

Внося эти выражения в уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

---

[1]) Решая уравнения $\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1\cos\alpha + \mathbf{e}_2\sin\alpha$, $\pm\mathbf{e}_2' = -\mathbf{e}_1\sin\alpha + \mathbf{e}_2\cos\alpha$ относительно векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, легко убедиться, что столбцы матрицы C суть векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, записанные их координатами по отношению к базису $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, — отсюда и ортогональность по столбцам.

получаем

$$2x'y' = a^2$$

— уравнение равнобочной гиперболы, отнесенное к ее асимптотам.

2. Ортогональные матрицы. Прямоугольные (ортогональные) реперы в пространстве. Дадим следующее

Определение. Квадратная матрица C любого порядка n называется *ортогональной*, если транспонированная к ней матрица C^* является ее обратной матрицей:

$$C^* = C^{-1}. \tag{1}$$

Элемент матрицы C^{-1}, стоящий на пересечении k-й строки и i-го столбца, есть, как мы видели,

$$c'_{ki} = \frac{C_{ik}}{\det C}$$

(где C_{ik} — адъюнкта элемента c_{ik} матрицы C). Ортогональность матрицы C означает, что $c'_{ki} = c_{ik}$. Итак, за определение ортогональности матрицы C может быть принято равенство

$$c_{ik} = \frac{C_{ki}}{\det C}. \tag{1'}$$

Через E обозначаем, как всегда, единичную матрицу. Тогда равенство (1) эквивалентно каждому из равенств $CC^* = E$, $C^*C = E$. Если расписать равенство $CC^* = E$, приравнивая каждый элемент матрицы CC^* соответствующему элементу матрицы E, то получатся (для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$) соотношения $c_{i1}c_{j1} + \ldots + c_{in}c_{jn} = 0$ (при $i \neq j$), $c_{i1}^2 + \ldots + c_{in}^2 = 1$, называемые *соотношениями ортогональности* (точнее, ортонормальности) по строкам[1]). Точно так же, расписывая поэлементно равенство $C^*C = E$, получим соотношения ортогональности по столбцам: $c_{1i}c_{1j} + \ldots + c_{ni}c_{nj} = 0$ (при $i \neq j$), $c_{1i}^2 + \ldots + c_{ni}^2 = 1$.

---

[1]) Достаточно проверить это в простейшем случае матрицы C второго порядка. Пусть

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad C^* = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$CC^* = \begin{pmatrix} c_{11}^2 + c_{12}^2 & c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} \\ c_{21}c_{11} + c_{22}c_{12} & c_{21}^2 + c_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$c_{11}^2 + c_{12}^2 = 1, \qquad c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} = 0,$$
$$c_{21}c_{11} + c_{22}c_{12} = 0, \qquad c_{21}^2 + c_{22}^2 = 1$$

— ортогональность по строкам.

Нами доказана

Теорема 1. *Ортогональность матрицы C в смысле равенства* (1) *эквивалентна как ортогональности по строкам, так и ортогональности по столбцам.*

Теорема 2. *Детерминант всякой ортогональной матрицы C равен* ± 1.

В самом деле,

$$\det C \cdot \det C^{-1} = \det E = 1,$$

но для ортогональной матрицы $C^{-1} = C^*$, значит, $\det C^{-1} = \det C^* = \det C$, и мы получаем

$$(\det C)^2 = 1, \quad \det C = \pm 1.$$

Геометрический смысл понятия ортогональной матрицы второго или третьего порядка заключается в следующем.

Теорема 3. *Ортогональные матрицы и только они являются матрицами перехода от одного ортогонального базиса к другому.*

Доказательство. Если матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

ортогональна и в пространстве дан произвольный ортогональный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, то, полагая

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{12}\mathbf{e}_2 + c_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' &= c_{21}\mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2 + c_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' &= c_{31}\mathbf{e}_1 + c_{32}\mathbf{e}_2 + c_{33}\mathbf{e}_3, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

получим снова ортогональный базис $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$; в самом деле, равенство единице скалярного квадрата каждой строки матрицы C означает, что каждый из векторов $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ есть орт, а требование равенства нулю скалярного произведения двух различных строк означает, что любые два из этих ортов перпендикулярны между собою.

Обратно: если C есть матрица перехода от ортогонального базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к ортогональному базису $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$, то строки матрицы C выражают векторы $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$; поэтому их скалярные квадраты равны 1, а скалярные произведения двух различных строк равны нулю — матрица C ортогональна (по строкам). Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Координаты c_{11}, c_{12}, c_{13} орта $\mathbf{e}_1'$ относительно репера $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ суть направляющие косинусы этого орта, т. е. его скалярные произведения с ортами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, так что

$$c_{11} = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_1), \quad c_{12} = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2), \quad c_{13} = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_3),$$

и аналогично

$$c_{21}=(\mathbf{e}_2', \mathbf{e}_1), \quad c_{22}=(\mathbf{e}_2', \mathbf{e}_2), \quad c_{23}=(\mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3),$$
$$c_{31}=(\mathbf{e}_3', \mathbf{e}_1), \quad c_{32}=(\mathbf{e}_3', \mathbf{e}_2), \quad c_{33}=(\mathbf{e}_3', \mathbf{e}_3).$$

Отсюда сразу следует, что столбцы матрицы C суть орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, записанные их координатами относительно базиса $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$.

Ортогональность по столбцам означает, таким образом, что орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ образуют ортогональный базис; транспонированная матрица C^* есть матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ к базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (поэтому она и совпадает с обратной!).

Итак, если в пространстве дан произвольный ортогональный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, то для всякой ортогональной матрицы C существует такой (однозначно определенный) ортогональный базис $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$, что элементы c_{ik} матрицы C суть косинусы углов между векторами $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_k'$ (i, $k=1$, 2, 3). В точности такое же утверждение (с заменой $n=3$ на $n=2$) верно, разумеется, и для плоскости, в чем легко убедиться, если записывать координаты x, y какого-нибудь орта $\mathbf{e}$ не в виде $x=\cos\alpha$, $y=\sin\alpha$, а в виде скалярных произведений $x=(\mathbf{e}, \mathbf{e}_1)=\cos\alpha$, $y=(\mathbf{e}, \mathbf{e}_2)=\cos\beta$ (где α, β — углы между ортом $\mathbf{e}$ и координатными ортами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$). Тогда рассуждения для плоскости будут дословно теми же, что и в случае пространства.

Однако для матриц второго порядка верна и следующая

Теорема 4. *Для всякой ортогональной матрицы C второго порядка можно найти такой угол α, что*

$$C=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}, \text{ если } \det C=1, \tag{I}$$

и

$$C=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}, \text{ если } \det C=-1. \tag{II}$$

В самом деле, матрица C есть матрица перехода от произвольного ортогонального репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ к некоторому ортогональному реперу $O\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$. Репер $O\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$ получается из репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ или поворотом на некоторый угол α (угол наклона вектора $\mathbf{e}_1'$ к вектору $\mathbf{e}_1$), или поворотом с последующим отражением относительно прямой, несущей вектор $\mathbf{e}_1'$.

Мы видели, что в первом случае матрица C имеет вид (I), во втором случае — вид (II).

Замечание 2. Пусть C — ортогональная матрица второго порядка, C^* — ее транспонированная. Она тоже ортогональна, поэтому, по доказанному, существует такой угол α, что C^* представима в одном из двух видов (I), (II). Но тогда C, как транспонированная

матрица к матрице C^*, имеет вид

$$C=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\quad \text{если } \det C=1, \tag{I*}$$

$$C=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix},\quad \text{если } \det C=-1. \tag{II*}$$

Итак, для всякой ортогональной матрицы C может быть найден такой угол α, что эта матрица примет вид (I), если $\det C=1$, и вид (II), если $\det C=-1$.

§ 4. Действия над матрицами в общем случае

Соберем еще раз вместе (не боясь повторений) те общие сведения о матрицах, которые были изложены в этой главе, и несколько дополним их.

Для квадратных матриц любого данного порядка n было определено действие умножения.

Если

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{pmatrix}, \tag{1}$$

то

$$AB=C,$$

где

$$C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn}\end{pmatrix}$$

и

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\dots+a_{in}b_{nk}.$$

Как читатель может проверить фактическим вычислением, это умножение ассоциативно, т. е. для любых трех матриц P, Q, R имеем $(PQ)R=P(QR)$.

С другой стороны, умножение матриц, вообще говоря, не коммутативно, однако имеет место равенство

$$\det AB=\det A\cdot\det B, \tag{2}$$

откуда следует, что произведение двух невырождающихся матриц (порядка n) есть невырождающаяся матрица (порядка n).

Среди невырождающихся матриц порядка n имеется единичная

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}; \tag{3}$$

она удовлетворяет равенству

$$AE=EA=A \tag{4}$$

для любой матрицы A (порядка n).

Для каждой невырождающейся квадратной матрицы A порядка n однозначно определена обратная матрица A^{-1} — ее элементы суть

$$a'_{ik}=\frac{A_{ki}}{\det A}, \tag{5}$$

где A_{ki} есть адъюнкта элемента a_{ki} в матрице A.

Обратная матрица A^{-1} удовлетворяет условию

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E \tag{6}$$

(в чем убеждаемся непосредственной проверкой вычислением[1])).

Из сказанного следует, что *невырождающиеся матрицы порядка n образуют группу*[2]) (*по отношению к операции умножения*); отсюда в свою очередь вытекает, что единичная матрица E порядка n, равно как и обратная матрица A^{-1} к данной, однозначно определяется равенствами (4) и соответственно каждым из равенств (6).

Непосредственно проверяется (для любых двух матриц A, B порядка n равенство

$$(AB)^*=B^*A^*, \tag{7}$$

где, как всегда, звездочкой обозначается переход к транспонированной матрице.

Далее, из ассоциативности умножения следует (для любых двух невырождающихся матриц A, B порядка n):

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E,$$

что означает, что матрица $B^{-1}A^{-1}$ есть матрица, обратная к AB:

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}, \tag{8}$$

— равенство, принадлежащее к простейшим предложениям теории групп.

---

[1]) Применить формулу (5) и предложения 9°, 10° из § 7 главы VII.

[2]) См. Прибавление.

Обозначим через δ_{ik} (при $i, k = 1, 2, \ldots, n$) число, равное 1, если $i = k$, и равное нулю, если $i \neq k$.

Назовем квадратную матрицу A ортогональной, если

$$A^* = A^{-1},$$

т. е. если выполнено любое (и, следовательно, оба) из двух эквивалентных условий:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj} = \delta_{ik} \quad (\text{«ортогональность по строкам»})$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}a_{jk} = \delta_{ik} \quad (\text{«ортогональность по столбцам»}),$$

из которых первое означает, что $AA^* = E$, а второе — что $A^*A = E$.

Задача. Доказать, что в группе всех невырождающихся матриц данного порядка n ортогональные матрицы образуют подгруппу.

Указание. Так как единичная матрица порядка n очевидно ортогональна, то достаточно доказать, что произведение AB двух ортогональных матриц и матрица A^{-1}, обратная к ортогональной, ортогональны. Второе утверждение сразу следует из равенства $A^{-1} = A^*$ (для ортогональной матрицы A), первое — из

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^*A^* = (AB)^*.$$

Квадратные матрицы являются частным случаем прямоугольных (гл. VII, § 6).

Прямоугольная матрица, имеющая m строк и n столбцов, кратко называется *матрицей вида* (m, n).

Для любых прямоугольных матриц произведение не определенно. Однако в случае, когда число столбцов n матрицы A равно числу строк матрицы B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nq} \end{pmatrix},$$

произведение AB при любых p и q определяется дословно, как и для квадратных матриц:

$$AB = C,$$

где

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pq} \end{pmatrix}, \quad c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\dots+a_{in}b_{nk}$$

для любых $i=1, 2, \dots, p$; $k=1, 2, \dots, q$.

В частности, заметим, что если матрица A состоит из одной строки

$$A=(a_1\ a_2\ \dots\ a_n),$$

а матрица B — из одного столбца

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то

$$AB=c_{11}=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$$

есть число (матрица первого порядка).

Любую прямоугольную матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

можно умножить на любое число λ: по определению

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Кроме того, любые две прямоугольные матрицы одного и того же вида (m, n) можно почленно сложить по правилу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Это сложение, очевидно, ассоциативно и коммутативно. Матрица вида (m, n), состоящая из одних нулей, называется *нулевой матрицей* O_{mn}. Очевидно, это есть единственная матрица, удовлетворяющая равенству

$$A + O_{mn} = A$$

для любой матрицы A вида (m, n).

Наконец, положим

$$-A = (-1)\,A$$

для любой матрицы A. Из этих определений следует, что матрицы данного вида (m, n) образуют коммутативную группу по отношению к операции сложения.

ГЛАВА IX

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ (ПРОДОЛЖЕНИЕ): ОРИЕНТАЦИЯ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА; УГЛЫ ЭЙЛЕРА; ОБЪЕМ ОРИЕНТИРОВАННОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА; ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

§ 1. Ориентация пространства (плоскости)

Назовем в пространстве (или на плоскости) два координатных базиса (два репера) *одноименными*, если матрица перехода от одного из них к другому имеет положительный детерминант; в противном случае (т. е. если детерминант матрицы перехода отрицателен) назовем базисы *разноименными*. В случае ортогональных базисов на плоскости это определение и его геометрический смысл нам уже известны из § 3 главы VIII [1]). Одноименность двух базисов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ будем иногда записывать так: $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \sim \mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$.

Покажем, что данное определение одноименности удовлетворяет так называемым *аксиомам равенства* [2]), т. е. требованиям *рефлексивности* $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \sim \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, *симметрии* (из $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \sim \mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ следует $\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3 \sim \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$) и *транзитивности* (из $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \sim \mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ и $\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3 \sim \mathbf{e}''_1\mathbf{e}''_2\mathbf{e}''_3$ следует $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \sim \mathbf{e}''_1\mathbf{e}''_2\mathbf{e}''_3$).

Рефлексивность вытекает из того, что матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к нему самому (т. е. матрица тождественного преобразования) есть единичная матрица, имеющая детерминант 1.

Симметрия вытекает из того, что детерминанты матрицы C и обратной к ней матрицы C^{-1} имеют один и тот же знак [3]). Для того чтобы убедиться в транзитивности, рассмотрим три базиса:

$$\text{I: } \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3; \qquad \text{II: } \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3; \qquad \text{III: } \mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3.$$

---

[1]) При рассмотрении прямоугольных реперов мы будем всегда считать, что в пространстве дан единый масштаб измерения длин, общий для всех рассматриваемых реперов.

[2]) См. Прибавление в конце книги, § 4. Уже упоминалось, что содержание этого Прибавления будет предполагаться известным и ссылки на него будут делаться лишь в редких случаях.

[3]) Гл. VIII, § 2, п. 2, стр. 195.

Если обозначить матрицы перехода от I к II, от II к III и от I к III соответственно через C^{I}_{II}, C^{II}_{III}, C^{I}_{III}, то $C^{I}_{III} = C^{II}_{III} C^{I}_{II}$, значит, и $\det C^{I}_{III} = \det C^{II}_{III} \det C^{I}_{II}$, откуда утверждение следует.

Из сказанного следует:

Множество всех базисов пространства (плоскости) распадается на попарно не пересекающиеся классы, обладающие тем свойством, что все базисы, принадлежащие одному какому-нибудь классу, одноименны, а всякие два базиса, принадлежащие различным классам, разноименны между собою.

Докажем, что *число этих классов равно двум.*

Для того чтобы убедиться, что имеется по крайней мере два класса, возьмем какой-нибудь базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и заметим, что матрица перехода от $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, (-\mathbf{e}_3)$ есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

ее детерминаит равен -1, значит, базисы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, (-\mathbf{e}_3)$ разноименны, они принадлежат к различным классам.

Теперь мы покажем, что всякий базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ принадлежит к одному из двух классов: либо к классу, содержащему базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, либо к классу, содержащему базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, (-\mathbf{e}_3)$. Другими словами, докажем, что всякий базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, не одноименный базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, одноименен базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, (-\mathbf{e}_3)$.

В самом деле, матрица перехода от $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ имеет (в силу разноименности этих базисов) отрицательный детерминант; матрица перехода от $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, (-\mathbf{e}_3)$ к $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ имеет детерминант -1; значит, матрица перехода от $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, (-\mathbf{e}_3)$ к $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ (будучи произведением двух названных матриц) имеет положительный детерминант. Утверждение доказано.

В каждом из двух классов базисов имеются ортогональные базисы. В самом деле, берем какой-нибудь ортогональный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Он содержится в одном из наших двух классов; ортогональный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, (-\mathbf{e}_3)$ содержится тогда во втором классе.

Два базиса, получающиеся один из другого одной транспозицией (т. е. перестановкой двух каких-либо из трех векторов, образующих данный базис), всегда разноименны. В самом деле, пусть базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ получается из базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ перестановкой двух каких-нибудь векторов этого последнего, например векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, так что

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \quad \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}'_3 &= \quad \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Тогда соответствующая матрица перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет детерминант -1.

Поэтому два базиса, получающиеся один из другого произвольной перестановкой их векторов, одноименны, если эта перестановка четная, и разноименны, если перестановка нечетная: базисы

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3; \quad \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$$

входят в один класс, а базисы

$$\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3; \quad \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2$$

— в другой.

Введем теперь следующее весьма важное определение.

Скажем, что базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ переходит в базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ посредством *непрерывной деформации,* если для каждого числа t, принадлежащего некоторому отрезку $a \leqslant t \leqslant b$, дан базис $\mathbf{e}^t_1, \mathbf{e}^t_2, \mathbf{e}^t_3$, а именно:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^t_1 &= c^t_{11}\mathbf{e}_1 + c^t_{12}\mathbf{e}_2 + c^t_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}^t_2 &= c^t_{21}\mathbf{e}_1 + c^t_{22}\mathbf{e}_2 + c^t_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}^t_3 &= c^t_{31}\mathbf{e}_1 + c^t_{32}\mathbf{e}_2 + c^t_{33}\mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

так что все координаты c^t_{11}, c^t_{12} и т. д. являются непрерывными функциями от t на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$, причем при $t = a$ мы получаем исходный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, т. е.

$$\begin{aligned} c^a_{11} &= 1, \quad c^a_{12} = 0, \quad c^a_{13} = 0, \\ c^a_{21} &= 0, \quad c^a_{22} = 1, \quad c^a_{23} = 0, \\ c^a_{31} &= 0, \quad c^a_{32} = 0, \quad c^a_{33} = 1, \end{aligned}$$

а при $t = b$ получаем базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= c^b_{11}\mathbf{e}_1 + c^b_{12}\mathbf{e}_2 + c^b_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= c^b_{21}\mathbf{e}_1 + c^b_{22}\mathbf{e}_2 + c^b_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= c^b_{31}\mathbf{e}_1 + c^b_{32}\mathbf{e}_2 + c^b_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Теперь предположим, кроме того, что базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}^t_2$, $\mathbf{e}^t_3$ приложен к точке $O_t = (x^t_0, y^t_0, z^t_0)$, где x^t_0, y^t_0, z^t_0 суть также непрерывные на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ функции от t, причем $x^a_0 = y^a_0 = z^a_0 = 0$, $x^b_0 = x_0$, $y^b_0 = y_0$, $z^b_0 = z_0$, $O' = (x_0, y_0, z_0)$. Тогда мы говорим, что репер $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ переходит в репер $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ посредством непрерывной деформации.

Наглядный смысл этих определений таков.

Считая параметр t временем, изменяющимся от начального момента $t = a$ до конечного $t = b$, мы имеем непрерывно меняющийся («деформирующийся») во времени репер $O_t\mathbf{e}^t_1\mathbf{e}^t_2\mathbf{e}^t_3$, начальное состояние

которого (при $t=a$) есть наш исходный репер $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, а конечное — репер $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ (в который превратился репер $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ в результате процесса деформации, длившегося отрезок времени $a\leqslant t\leqslant b$).

Имеет место следующее очевидное предложение.

Если базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ переходит в базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ посредством деформации, которая длится, положим, отрезок времени $a\leqslant t\leqslant b$, а базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ переходит в базис $\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3$ посредством деформации, которая длится в течение отрезка времени $b\leqslant t\leqslant c$, то базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ переходит в $\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3$ посредством деформации, которая длится в течение отрезка времени $a\leqslant t\leqslant c$.

Далее, если базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ переходит посредством непрерывной деформации ($a\leqslant t\leqslant b$) в базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, то и базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ переходит посредством непрерывной деформации в базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, достаточно положить $t'=(a+b)-t$ и

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1^{*t'}&=c_{11}^t\mathbf{e}_1+c_{12}^t\mathbf{e}_2+c_{13}^t\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}_2^{*t'}&=c_{21}^t\mathbf{e}_1+c_{22}^t\mathbf{e}_2+c_{23}^t\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}_3^{*t'}&=c_{31}^t\mathbf{e}_1+c_{32}^t\mathbf{e}_2+c_{33}^t\mathbf{e}_3;\end{aligned}$$

при $t'=a$ получаем $t=b$ и, следовательно, $\mathbf{e}_1^{*a}=\mathbf{e}_1^b$ и т. д., при $t'=b$ имеем $t=a$, значит, $\mathbf{e}_1^{*b}=\mathbf{e}_1^a$ и т. д.

Аналогичные предложения, разумеется, верны и для деформации реперов.

Замечание. Обычно за отрезок $a\leqslant t\leqslant b$ берут единичный отрезок $0\leqslant t\leqslant 1$.

Если рассматривать (как это привычно читателю из элементарного курса механики) движение твердого тела в пространстве как непрерывный процесс, происходящий в течение некоторого промежутка времени (положим, от $t=0$ до $t=1$), то становится очевидным, что частным случаем непрерывной деформации репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ является движение (перемещение) этого репера (рассматриваемого как твердое тело): в начальный момент времени $t=0$ наш репер занимает положение $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ (которое будем обозначать также через $O_0\mathbf{e}_1^0\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$), в конечный момент $t=1$ репер займет положение $O_1\mathbf{e}_1^1\mathbf{e}_2^1\mathbf{e}_3^1$, а в каждый промежуточный момент t репер (перемещаясь в пространстве как твердое тело) будет находиться в положении $O_t\mathbf{e}_1^t\mathbf{e}_2^t\mathbf{e}_3^t$. Обозначим координаты вектора $\mathbf{e}_1^t$ (относительно начального репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$) через $c_{11}^t, c_{12}^t, c_{13}^t$, так что

$$\mathbf{e}_1^t=c_{11}^t\mathbf{e}_1+c_{12}^t\mathbf{e}_2+c_{13}^t\mathbf{e}_3$$

и аналогично

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_2^t&=c_{21}^t\mathbf{e}_1+c_{22}^t\mathbf{e}_2+c_{23}^t\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}_3^t&=c_{31}^t\mathbf{e}_1+c_{32}^t\mathbf{e}_2+c_{33}^t\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Тогда непрерывность процесса перемещения и находит свое математическое выражение в том, что координаты c^t_{11}, c^t_{12}, c^t_{13}; c^t_{21}, c^t_{22}, c^t_{23}; c^t_{31}, c^t_{32}, c^t_{33} суть непрерывные функции времени t.

При этом (так как $\mathbf{e}^0_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}^0_2 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}^0_3 = \mathbf{e}_3$)

$$\begin{aligned} c^0_{11} &= 1, \quad c^0_{12} = 0, \quad c^0_{13} = 0, \\ c^0_{21} &= 0, \quad c^0_{22} = 1, \quad c^0_{23} = 0, \\ c^0_{31} &= 0, \quad c^0_{32} = 0, \quad c^0_{33} = 1. \end{aligned}$$

Докажем следующее основное предложение:

1а. *Если базис* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *переходит в базис* $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ *посредством непрерывной деформации, то оба базиса одноименны.*

В самом деле, положим

$$D(t) = \begin{vmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & c_{13}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & c_{23}(t) \\ c_{31}(t) & c_{32}(t) & c_{33}(t) \end{vmatrix}, \quad a \leqslant t \leqslant b;$$

надо доказать, что числа $D(a)$ и $D(b)$ — одного и того же знака. Но детерминант $D(t)$, будучи многочленом от своих элементов $c_{11}(t)$, $c_{12}(t)$, ..., являющихся непрерывными функциями от t, есть непрерывная функция от t на всем отрезке $a \leqslant t \leqslant b$. Если бы ее значения в концах этого отрезка имели разные знаки, то существовало бы промежуточное значение t_0, $a < t_0 < b$, для которого $D(t_0) = 0$. Но этого не может быть, так как $D(t_0)$, как детерминант матрицы перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}^{t_0}_1$, $\mathbf{e}^{t_0}_2$, $\mathbf{e}^{t_0}_3$, всегда отличен от нуля.

Теперь мы докажем обратное предложение:

1б. *Всякие два одноименных базиса (репера) могут быть переведены друг в друга непрерывной деформацией.*

План доказательства таков. Мы сначала доказываем, что всякий репер может быть непрерывной деформацией переведен в прямоугольный. После этого доказываем, что всякие два одноименных прямоугольных репера могут быть переведены друг в друга движением в пространстве, т. е. специальным видом непрерывной деформации.

Предположим, что мы доказали оба эти факта. Пусть $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ — два произвольных одноименных репера, $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \sim O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$; переводим их непрерывной деформацией соответственно в прямоугольные реперы $O\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_3$ и $O'\boldsymbol{\varepsilon}'_1\boldsymbol{\varepsilon}'_2\boldsymbol{\varepsilon}'_3$. Тогда $O\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_3 \sim O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \sim O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3 \sim O'\boldsymbol{\varepsilon}'_1\boldsymbol{\varepsilon}'_2\boldsymbol{\varepsilon}'_3$, следовательно (по свойству транзитивности), $O\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_3 \sim O'\boldsymbol{\varepsilon}'_1\boldsymbol{\varepsilon}'_2\boldsymbol{\varepsilon}'_3$. Но одноименные реперы $O\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_3$, $O'\boldsymbol{\varepsilon}'_1\boldsymbol{\varepsilon}'_2\boldsymbol{\varepsilon}'_3$ ортогональны; значит, по сделанному предположению они могут быть переведены друг в друга непрерывной деформацией. Переводим теперь

непрерывными деформациями последовательно

$$Oe_1e_2e_3 \text{ в } O\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3, \quad (А)$$

$$O\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \text{ в } O'\varepsilon_1'\varepsilon_2'\varepsilon_3', \quad (Б)$$

$$O'\varepsilon_1'\varepsilon_2'\varepsilon_3' \text{ в } O'e_1'e_2'e_3' \quad (В)$$

(последнее возможно: раз существует деформация, переводящая $O'e_1'e_2'e_3'$ в $O'\varepsilon_1'\varepsilon_2'\varepsilon_3'$, то существует, как мы видели, и деформация, переводящая $O'\varepsilon_1'\varepsilon_2'\varepsilon_3'$ в $O'e_1'e_2'e_3'$). В результате трех последовательных деформаций (А), (Б), (В) получаем искомую деформацию, переводящую $Oe_1e_2e_3$ в $O'e_1'e_2'e_3'$. Основное предложение доказано.

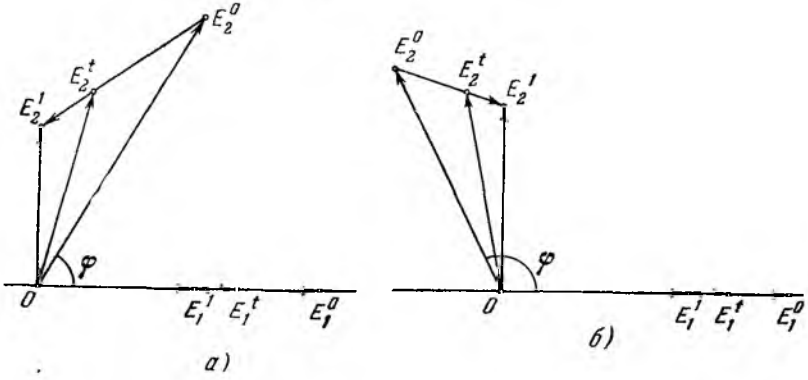


Рис. 104.

Переходим к выполнению намеченного плана.

Доказываем первое утверждение: всякий репер может быть непрерывной деформацией переведен в ортогональный.

Докажем это утверждение сначала для плоскости. Пусть $Oe_1^0e_2^0$ — данный репер, $e_1^0 = \overrightarrow{OE_1^0}$, $e_2^0 = \overrightarrow{OE_2^0}$. Построим ортогональный репер $Oe_1^1e_2^1$ так, чтобы орт $e_1^1 = \overrightarrow{OE_1^1}$ лежал на оси, несущей вектор $e_1^0 = \overrightarrow{OE_1^0}$, а орт $e_2^1 = \overrightarrow{OE_2^1}$ (перпендикулярный к e_1^0) лежал в той же полуплоскости (из двух полуплоскостей, определяемых прямой OE_1^0), в которой лежит вектор $e_2^0 = \overrightarrow{OE_2^0}$. Тогда, если угол φ, $0 < \varphi < \pi$, между векторами e_1^0 и e_2^0 острый (рис. 104, *а*), то он весь лежит внутри прямого угла между $\overrightarrow{OE_1^1}$ и $\overrightarrow{OE_2^1}$, а если угол φ тупой (рис. 104, *б*), то он, наоборот, содержит прямой угол между $\overrightarrow{OE_1^1}$ и $\overrightarrow{OE_2^1}$. Для каждого t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, обозначим через E_1^t, соответственно через E_2^t, точку отрезка $\overline{E_1^0E_1^1}$, соответственно $\overline{E_2^0E_2^1}$, делящую этот отрезок в отношении $t:(1-t)$. При любом t, $0 < t < 1$, вектор $e_1^t = \overrightarrow{OE_1^t}$ лежит на полупрямой $\overrightarrow{OE_1^0}$, несущей вектор e_1^0, а вектор e_2^t

лежит внутри треугольника $OE_2^0E_2^1$, имеющего с полупрямой $\overrightarrow{OE_1^0}$, единственную общую точку O.

Поэтому векторы $\overrightarrow{OE_1^t}$, $\overrightarrow{OE_2^t}$ при любом t не коллинеарны, т. е. образуют репер $Oe_1^te_2^t$, непрерывно меняющийся при изменении t от 0 до 1 и осуществляющий непрерывный переход (деформацию) от репера $Oe_1^0e_2^0$ к реперу $Oe_1^1e_2^1$.

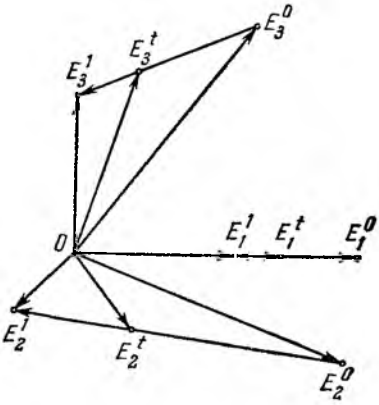


Рис. 105.

Переходим к случаю пространства. В плоскости $Oe_1^0e_2^0$ произведем те же построения, как и выше. Обозначим через $e_3^1 = \overrightarrow{OE_3^1}$ орт, перпендикулярный к плоскости $Oe_1^0e_2^0$ и направленный в ту же сторону от этой плоскости, что и вектор e_3^0 (рис. 105).

В полной аналогии с предыдущим случаем обозначаем через E_3^t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, точку отрезка $\overline{E_3^0E_3^1}$, делящую этот отрезок в отношении $t:(1-t)$; при любом t, $0 < t < 1$, определен, таким образом, вектор $\overrightarrow{OE_3^t} = e_3^t$ и репер $Oe_1^te_2^te_3^t$, непрерывно зависящий от t и осуществляющий при изменении t от 0 до 1 непрерывный переход от данного репера $Oe_1^0e_2^0e_3^0$ к прямоугольному реперу $Oe_1^1e_2^1e_3^1$. Первое утверждение доказано.

Переходим к доказательству второго утверждения. Всякий прямоугольный репер $Oe_1e_2e_3$ может быть посредством непрерывного движения, являющегося, как было сказано выше, частным случаем непрерывной деформации, переведен во всякий другой одноименный с ним прямоугольный репер $O'e_1'e_2'e_3'$.

Посредством сдвига на вектор $\overrightarrow{OO'}$ можно прежде всего совместить начала O и O' обоих реперов; поэтому можно ограничиться случаем, когда оба репера имеют общее начало O. Теперь начинаем с того, что совмещаем орты $e_3 = \overrightarrow{OE_3}$ и $e_3' = \overrightarrow{OE_3'}$. Для этого проведем через эти орты (имеющие общее начало O) плоскость OE_3E_3' (рис. 106) и восставим к этой плоскости в точке O перпендикуляр d. Совершим теперь поворот репера $Oe_1e_2e_3$ (как твердого тела) вокруг прямой d на угол θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, между ортами e_3 и e_3' в таком направлении, чтобы орт $e_3 = \overrightarrow{OE_3}$ совместился с ортом $e_3' = \overrightarrow{OE_3'}$. Этот поворот [1])

[1]) Который можно себе представить также как вращение всего пространства вокруг данной прямой (аналогично тому, как мы в главе VIII, § 3, рассматривали вращение плоскости вокруг одной из ее точек).

переведет орты $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ и $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ в какие-то взаимно перпендикулярные орты $\mathbf{e}_1^*$ и $\mathbf{e}_2^*$, лежащие в плоскости, перпендикулярной к орту $\overrightarrow{OE_3'}$ (и проходящей через точку O), т. е. в плоскости $OE_1'E_2'$. Теперь остается поворотом репера $O\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3'$ вокруг прямой, несущей орт $\mathbf{e}_3'$, совместить орт $\mathbf{e}_1^* = \overrightarrow{OE_1^*}$ с ортом $\overrightarrow{OE_1'}$. Этот поворот, оставляя пару ортов $\overrightarrow{OE_1^*}$ и $\overrightarrow{OE_2^*}$ в их плоскости (которая есть плоскость $OE_1'E_2'$) и совместив орт $\overrightarrow{OE_1^*}$ с ортом $\overrightarrow{OE_1'} = \mathbf{e}_1'$, переведет орт $\overrightarrow{OE_2^*}$ (с которым еще ранее был совмещен орт $\overrightarrow{OE_2}$) в орт, перпендикулярный к $\overrightarrow{OE_1'} = \mathbf{e}_1'$, т. е. либо в $\mathbf{e}_2'$, либо в $(-\mathbf{e}_2')$. Но вторая возможность исключена, так как реперы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O\mathbf{e}_1'(-\mathbf{e}_2')\mathbf{e}_3'$ разноименны и поэтому не могут быть совмещены движением в пространстве. Утверждение доказано.

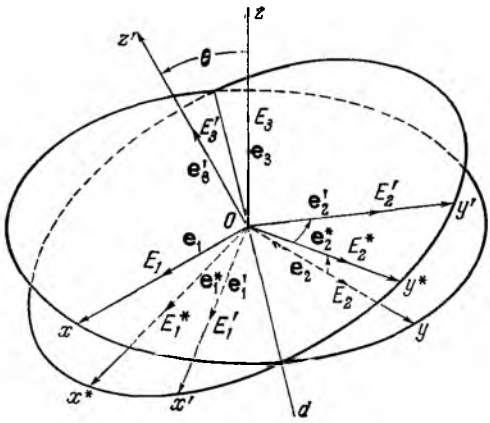


Рис. 106.

Вместе с ним завершено доказательство и следующего результата (верного как для плоскости, так и для пространства).

Теорема 1. *Для того чтобы два репера (два базиса) были одноименны, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было непрерывной деформацией перевести в другой. Если данные реперы прямоугольны, то их можно перевести друг в друга даже движением в пространстве. Если реперы разноименны, то их нельзя перевести друг в друга даже никакой деформацией, значит, и подавно никаким движением.*

Поэтому

Теорема 1′. *Два прямоугольных репера (на плоскости или в пространстве) тогда и только тогда одноименны, когда один из них может быть переведен в другой непрерывным движением (в плоскости, соответственно в пространстве).*

Пусть $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ — два прямоугольных разноименных репера. Тогда реперы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'(-\mathbf{e}_3')$ одноименны и, например, первый из них может быть движением переведен во второй. Но репер $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'(-\mathbf{e}_3')$ является зеркальным отражением репера $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ относительно плоскости $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$. Поэтому имеет место

Теорема 2. *Если ортогональные реперы* $Oe_1e_2e_3$ *и* $O'e'_1e'_2e'_3$ *разноименны, то один из них может быть переведен в другой посредством движения со следующим за ним (или предшествующим ему) зеркальным отражением.*

Доказательство следующего замечания можно в качестве упражнения предоставить читателю.

Замечание. 1. Беря зеркальные отражения относительно произвольной плоскости всех базисов (реперов) одного какого-нибудь класса в пространстве, получим все базисы (реперы) другого класса. Аналогичный результат, разумеется, имеет место и в плоскости.

Определение. *Ориентировать* плоскость или пространство — значит один из двух классов базисов (реперов) объявить положительным (а другой — отрицательным). Тогда и всякий базис (репер) называется положительным или отрицательным в зависимости от того, к какому классу он принадлежит.

Для того чтобы ориентировать (плоскость или пространство), достаточно задать один какой-нибудь базис и объявить положительными все с ним одноименные базисы.

Замечание 2. Если плоскость ориентирована, то в ней определяется и положительное направление вращения: это направление кратчайшего вращения $\left(\text{т. е. вращения на угол } \frac{\pi}{2}\right)$ из тех двух вращений $\left(\text{на } \frac{\pi}{2} \text{ и на } \frac{3\pi}{2}\right)$, посредством которых можно первый орт (т. е. орт e_1) положительного прямоугольного репера Oe_1e_2 перевести во второй (т. е. в орт e_2).

Обратно, если на плоскости задано положительное направление вращения, то определена и ориентация плоскости: репер Oe_1e_2 положителен, если кратчайший поворот на угол $\left(\text{т. е. поворот на угол } \frac{\pi}{2}\right)$, переводящий орт e_1 в орт e_2, происходит в положительном направлении.

Таким образом, ориентация плоскости фактически совпадает с выбором положительного направления вращения.

«Физическое», если так можно выразиться, осмысливание двух классов реперов на плоскости общеизвестно: назовем *правым* такой репер Oe_1e_2, где кратчайший поворот, переводящий орт e_1 в орт e_2, происходит против часовой стрелки (рис. 107, *а*), т. е. где e_1 и e_2 расположены, как большой и указательный пальцы правой руки, если смотреть на ее ладонь.

Левым назовем противоположно ориентированный репер (рис. 107, *б*) (в нем аналогичный поворот происходит по часовой стрелке).

В пространстве репер $Oe_1e_2e_3$ называется *правым*, если наблюдатель, стоящий вдоль вектора e_3 (ногами — в начале, головой —

в конце этого вектора), видит кратчайший поворот, переводящий вектор $\mathbf{e}_1$ в вектор $\mathbf{e}_2$ в плоскости $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, происходящим против часовой стрелки (рис. 108, *б*). Противоположно ориентированный репер называется *левым* (рис. 108, *а*) (см. далее по этому поводу замечание 4).

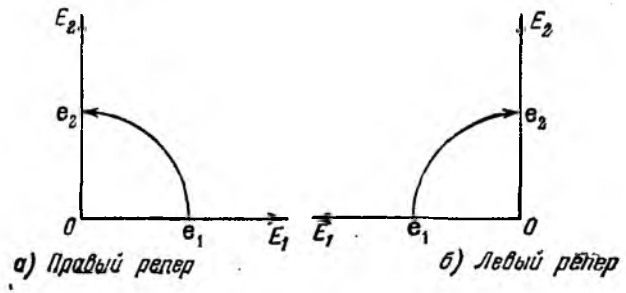


Рис. 107.

Мы ориентируем пространство, объявляя в нем в качестве положительных, например, все правые реперы.

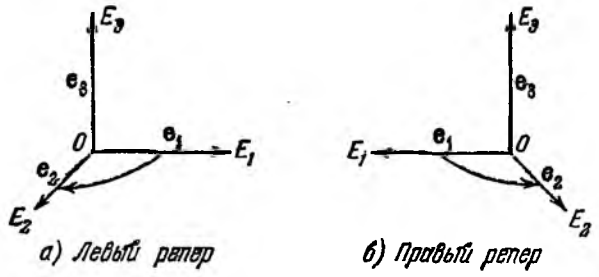


Рис. 108.

Замечание 3. Можно ориентировать пространство, выбрав в нем ориентированную плоскость π и ориентированную (т. е. направленную) прямую d, пересекающую плоскость π (в некоторой точке O) (рис. 109): берем на плоскости π положительный репер $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$; дополняя его ортом $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{OE}_3$, определяющим направление, выбранное на прямой d, получим репер $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, который и объявим положительным.

Очень важно следующее

Замечание 4. Если пространство ориентировано и в нем дана направленная прямая d, то из двух направлений вращения простран-

ства вокруг прямой d следующее направление объявляется положительным: берется положительный прямоугольный репер $Oe_1e_2e_3$, орт $e_3 = \overrightarrow{OE_3}$ которого лежит на прямой d и направлен в выбранном на этой прямой направлении; тогда положительным объявляется то вращение вокруг прямой d, которое переводит орт e_1 в орт e_2 посредством кратчайшего поворота $\left(\text{т. е. поворота на угол } \frac{\pi}{2}\right)$.

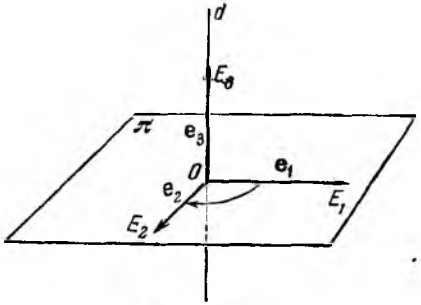
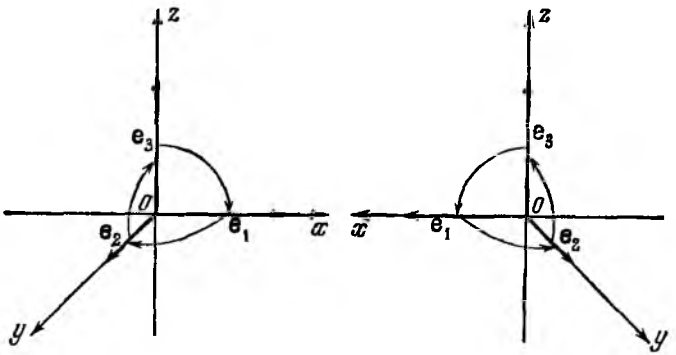


Рис. 109.

Имеет место и обратное предложение:

1) Можно ориентировать пространство, задав в нем направление вращения вокруг некоторой направленной прямой[1]).



а) Левый репер *б) Правый репер*

Рис. 110.

2) Можно ориентировать пространство, задав в нем ориентированную плоскость и одну (из двух) ее сторону (т. е. полупространство, на которые плоскость разбивает пространство[2])).

---

[1]) В самом деле, заданное направление вращения пространства вокруг прямой d определяет и направление вращения в плоскости, перпендикулярной к прямой d, значит, и ориентацию этой плоскости; так как прямая d направлена, то имеем случай, разобранный в замечании 3.

[2]) Задать одно из этих полупространств — значит, задать и орт, приложенный к какой-либо точке плоскости и направленный в это полупространство. Имеем снова ориентированную плоскость и направленный перпендикуляр к ней.

Замечание 5. Пусть в пространстве дан прямоугольный репер $Oe_1e_2e_3$; этим задана и ориентация пространства. Тогда определяется и соответствующее этой ориентации («положительное») направление вращения вокруг каждой из координатных осей; это направления кратчайших вращений $\left(\text{на угол } \frac{\pi}{2}\right)$ вокруг осей Ox, Oy, Oz (рис. 110) (несущих соответственно орты e_1, e_2, e_3), переводящих

вектор e_2 в вектор e_3,
вектор e_3 в вектор e_1,
вектор e_1 в вектор e_2.

Если выбранный репер правый, то каждое из названных вращений есть вращение против часовой стрелки (для зрителя, расположенного вдоль соответствующей оси ногами в начале, головой в конце орта этой оси).

§ 2. Углы Эйлера [1])

Вернемся к теореме 1; нас интересует утверждение этой теоремы, касающееся возможности перевести посредством движения данный прямоугольный репер в любой другой прямоугольный репер, одноименный с данным. Мы можем легко дополнить эту теорему установлением тех геометрических элементов (тех «параметров»), которые определяют положение второго репера $Oe_1'e_2'e_3'$ относительно первого $Oe_1e_2e_3$ (мы предполагаем сначала, что у обоих реперов одно и то же начало O).

Из рассуждений, проведенных на стр. 213—214, вытекает, что положение репера $Oe_1'e_2'e_3'$ вполне определено, если известны: прямая d (перпендикуляр, восставленный в точке O к плоскости Oe_3e_3') и два угла: угол θ, на который надо повернуть репер $Oe_1e_2e_3$ вокруг прямой d, чтобы совместить орт e_3 с ортом e_3', и угол того поворота, который после этого надо сделать, чтобы совместить вектор e_1^* (в который перешел вектор e_1 после первого поворота) с вектором e_1' (после этого второго поворота репер $Oe_1e_2e_3$, как мы видели (стр. 214), оказался полностью совмещенным с репером $Oe_1'e_2'e_3'$).

---

[1]) Леонард Эйлер (1707—1783), швейцарец родом, — один из величайших математиков после Ньютона. Эйлеру принадлежат фундаментальные результаты во всех областях математики его времени. В частности, основной запас фактов, составляющих содержание как аналитической геометрии, так и анализа бесконечно малых (дифференциальное и интегральное исчисление), в своих существенных чертах сложился именно в работах Эйлера. Исключительно важен и вклад Эйлера в механику и небесную механику. Значительную часть своей жизни (1727—1741 гг. и с 1766 г. до смерти в 1783 — всего 31 год) Эйлер прожил в С.-Петербурге, будучи одним из деятельнейших членов Российской Академии наук.

Рассмотрим ближе всю картину. Прежде всего, прямая d, проведенная через начало O перпендикулярно к плоскости Oe_3e_3', есть, очевидно, прямая пересечения плоскостей Oe_1e_2 и $Oe_1'e_2'$. Плоскость Oe_1e_2, в которой, таким образом, лежит прямая d, ориентирована самим данным в ней репером Oe_1e_2; поэтому положение прямой d определено наклоном какого-либо ее направляющего вектора к вектору e_1. За направляющий вектор прямой d примем такой ее орт e_1''

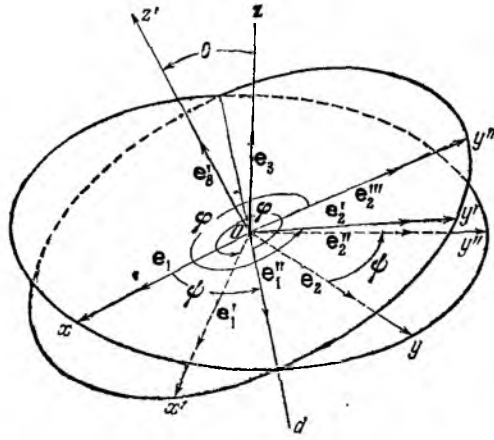


Рис. 111.

(рис. 111), что репер $Oe_3e_3'e_1''$ одноименен с репером $Oe_1e_2e_3$. Угол от орта e_1 до орта e_1'' (в ориентированной плоскости Oe_1e_2) мы обозначим через ψ, $0 \leqslant \psi < 2\pi$. Тогда поворотом репера Oe_1e_2 вокруг оси, несущей орт e_3 (ось аппликат координатной системы $Oe_1e_2e_3$), на угол ψ в положительном направлении вращения [1]) мы совместим орт e_1 с ортом e_1''. При этом повороте орт e_2 перейдет в какой-то орт e_2'', а орт e_3 останется на месте.

Теперь совмещаем вектор e_3 с вектором e_3' посредством кратчайшего поворота на некоторый угол θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, вокруг прямой d, несущей орт e_1''. Так как репер $Oe_3e_3'e_1''$ одноименен с репером $Oe_1e_2e_3$, то этот поворот происходит в положительном направлении. Он переводит репер $Oe_1''e_2''e_3$ в репер $Oe_1''e_2'''e_3'$, причем плоскость Oe_1e_2 совместилась с плоскостью $Oe_1'e_2'$. Нам остается только сделать

[1]) Под положительным направлением вращения вокруг какой-нибудь (направленной) оси мы в этом параграфе всегда понимаем направление вращения, определенное репером $Oe_1e_2e_3$ (см. замечание 4 к теореме 2 § 1). На нашем рисунке направление вращения — против часовой стрелки для зрителя, стоящего вдоль орта этой оси, ногами — в начале, головой — в конце орта.

поворот репера $Oe_1''e_2'''e_3$ вокруг оси Oz' (несущей орт e_3') на угол φ от вектора e_1'' до вектора e_1' (в ориентированной плоскости $Oe_1'e_2'$, в которой лежат оба вектора e_1'' и e_1'), тогда и вектор e_2''' совместится с вектором e_2'.

Три угла:

$$\begin{aligned}
&\psi, \quad 0 \leqslant \psi < 2\pi, \quad \text{от } e_1 \text{ до } e_1'' \text{ в плоскости } Oe_1e_2,\\
&\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad \text{от } e_3 \text{ до } e_3' \text{ в плоскости } Oe_3e_3',\\
&\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad \text{от } e_1'' \text{ до } e_1' \text{ в плоскости } Oe_1'e_2',
\end{aligned}$$

называются *эйлеровыми углами репера* $Oe_1'e_2'e_3'$ относительно репера $Oe_1e_2e_3$. Зная репер $Oe_1e_2e_3$ и эти углы ψ, θ, φ, мы сразу же можем определить единственный репер $Oe_1'e_2'e_3'$, имеющий эти углы своими эйлеровыми углами и одноименный с репером $Oe_1e_2e_3$. В самом деле, мы сначала совершаем поворот репера $Oe_1e_2e_3$ вокруг оси, несущей вектор e_3 (ось аппликат координатной системы $Oe_1e_2e_3$), на угол ψ в положительном направлении. Этот поворот переводит орт e_1 в орт e_1'', определяющий ось d (и весь репер $Oe_1e_2e_3$ — в $Oe_1''e_2''e_3$). После этого совершаем поворот репера $Oe_1''e_2''e_3$ вокруг оси d на угол θ в положительном направлении. При этом орт e_3 перейдет в некоторый орт e_3', орт e_1'' останется на месте, а орт e_2'' перейдет в новый орт e_2'''; репер $Oe_1''e_2''e_3$ перейдет в (прямоугольный) репер $Oe_1''e_2'''e_3'$. Наконец, делаем поворот на угол φ в положительном направлении вокруг оси орта e_3'. Этот поворот, оставляя орт e_3' на месте, переведет орты e_1'', e_2''' в некоторые орты e_1', e_2', а весь репер $Oe_1''e_2'''e_3'$ (значит, и $Oe_1e_2e_3$) — в однозначно определенный предыдущим построением прямоугольный репер $Oe_1'e_2'e_3'$ (одноименный с $Oe_1e_2e_3$).

Замечание 1. Таким образом, переход от одного прямоугольного репера к другому, одноименному с ним и имеющему то же начало, осуществляется тремя поворотами, соответственно на углы ψ, θ и φ, вокруг трех осей (e_3, d, e_3'), которые (как и направления вращения вокруг них) определены исходным репером $Oe_1e_2e_3$ и углами ψ, θ, φ.

Замечание 2. Углы Эйлера определяют репер $Oe_1'e_2'e_3'$ лишь в предположении, что он одноименен с репером $Oe_1e_2e_3$: для получения противоположно ориентированного репера с теми же углами Эйлера нам достаточно заменить орт e_3' ортом — e_3' (сохраняя полученные ранее орты e_1' и e_2').

Для репера $Oe_1'e_2'e_3'$ его углы Эйлера (относительно исходного репера $Oe_1e_2e_3$, остающегося фиксированным) являются независимыми параметрами (определяющими этот репер); «независимость» означает, что этим параметрам мы можем давать совершенно произвольные значения (в пределах изменения $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ каждого из них); каждому набору значений параметров соответствует вполне определенный репер $Oe_1'e_2'e_3'$.

Предположим теперь, что дано произвольное твердое тело с закрепленной точкой O в нем. Предположим, что в это тело ввинчен твердо связанный с ним прямоугольный репер $Oe_1'e_2'e_3'$. Тогда различные возможные положения тела взаимно однозначно соответствуют различным положениям неразрывно связанного с этим телом репера $Oe_1'e_2'e_3'$ и, следовательно, вполне определяются углами Эйлера этого репера (относительно исходного данного в пространстве неподвижного репера $Oe_1e_2e_3$).

Таким образом, всевозможные положения твердого тела с одной закрепленной точкой вполне определяются тремя независимыми параметрами.

В механике этот факт выражают, говоря, что тело с одной закрепленной точкой имеет *три степени свободы*.

Если отказаться от неподвижности точки O, т. е. допустить свободное перемещение тела в пространстве, то к трем рассмотренным параметрам присоединятся еще три координаты произвольной точки O', в которую можно перенести точку O,— твердое тело, способное свободно перемещаться в пространстве, имеет *шесть степеней свободы* (его положение определяется шестью независимыми параметрами).

§ 3. Объем ориентированного параллелепипеда

1. Некоторые частные случаи определения ориентации пространства. Пусть два аффинных репера $Oe_1e_2e_3$ и $Oe_1e_2e_3'$ имеют два общих вектора e_1, e_2 и общее начало O. Эти реперы одноименны тогда и только тогда, когда третьи векторы e_3 и e_3' направлены в одну и ту же сторону от плоскости Oe_1e_2.

В самом деле, если векторы $e_3 = \overrightarrow{OE_3}$ и $e_3' = \overrightarrow{OE_3'}$ (рис. 112) лежат по одну сторону от плоскости Oe_1e_2, то по ту же сторону лежит и весь отрезок $\overline{E_3E_3'}$. Тогда для каждого значения t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, обозначаем через E_3^t точку, делящую отрезок $\overrightarrow{E_3E_3'}$ в отношении $t:(1-t)$, и, полагая, $e_3^t = \overrightarrow{OE_3^t}$, получим переменный репер $Oe_1e_2e_3^t$, осуществляющий деформацию, переводящую репер $Oe_1e_2e_3$ в $Oe_1e_2e_3'$[1]).

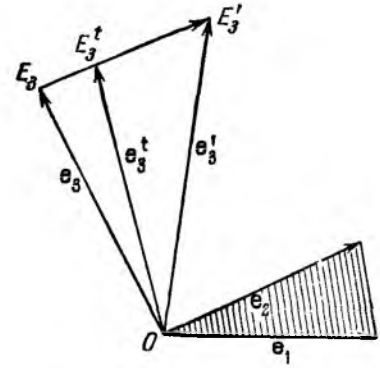


Рис. 112.

[1]) При этом $e_3^t = (1-t)\,e_3 + te_3'$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Если $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_3$ расположены по разные стороны от плоскости $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ (рис. 113), то векторы $-\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_3$ расположены по одну сторону, значит, по только что доказанному, реперы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2(-\mathbf{e}_3)$ и $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}'_3$ одноименны, значит, реперы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}'_3$ разноименны.

Рассмотрим частный случай последней теоремы, когда вектор $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}$ перпендикулярен к плоскости $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$; тогда векторы $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_3$ направлены в одну и ту же или в разные стороны от плоскости $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ (рис. 114) в зависимости от того, будет ли угол между ними острым или тупым.

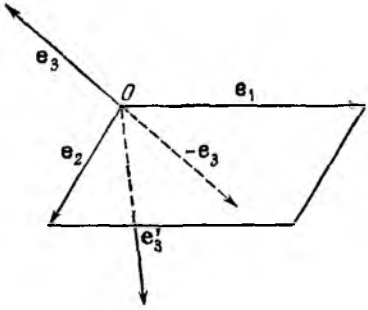


Рис. 113.

Заметим, что в первом случае будет

$$\text{аз пр}_{\mathbf{e}_3}\mathbf{e}'_3 > 0,$$

во втором

$$\text{аз пр}_{\mathbf{e}_3}\mathbf{e}'_3 < 0.$$

Мы доказали следующее предложение:

Если $\mathbf{n}$ *— какой-нибудь вектор, перпендикулярный к двум неколлинеарным векторам* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, *и* $\mathbf{w}$ *— какой-нибудь вектор, не компланарный*

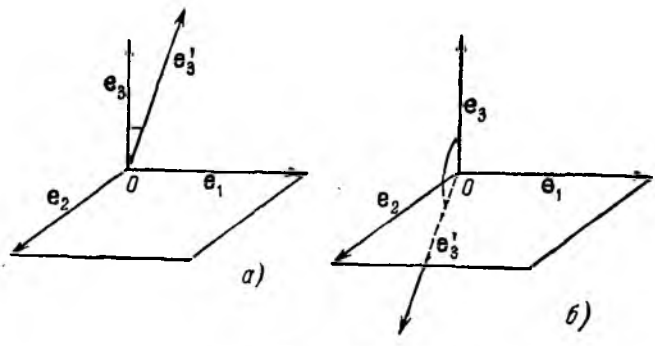


Рис. 114.

векторам $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$, *то реперы* $O\mathbf{uvn}$ *и* $O\mathbf{uvw}$ *тогда и только тогда одноименны, когда* $\text{аз пр}_{\mathbf{n}}\mathbf{w} > 0$.

Мы сейчас воспользуемся этим предложением.

2. Объем ориентированного параллелепипеда. Пусть пространство ориентировано. Пусть $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ — тройка некомпланарных векторов, данных в определенном порядке (в том, в каком они написаны).

Приложим их к какой-нибудь точке O:

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OA},\ \mathbf{v} = \overrightarrow{OB},\ \mathbf{w} = \overrightarrow{OC},$$

и построим на них параллелепипед. Объем этого параллелепипеда, снабженный знаком $+$, если репер $O\mathbf{uvw}$ положительный, и знаком $-$, если этот репер отрицательный, называется *объемом ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, и обозначается через $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$.

Замечание. Если векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ компланарны, то полагаем $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0$.

Рассматривая число $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ как функцию трех векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, заметим, что из ее определения непосредственно следует нечетность функции $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$, т. е.

Предложение 1. *Функция* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ *при перестановке двух каких-нибудь из ее аргументов* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *изменяет знак, не меняя абсолютной величины.*

При умножении какого-либо из трех векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ на число λ знак тройки векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ при $\lambda > 0$ остается неизменным, а при $\lambda < 0$ меняется на противоположный; что же касается элементарно определенного (т. е. положительного) объема параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, то он, очевидно, умножается на $|\lambda|$. Поэтому

Предложение 2. *При умножении одного из векторов* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *на какое-нибудь число* λ *на это же число* λ *умножается и* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$.

Обозначим через $\mathbf{n}$ орт, перпендикулярный к плоскости $O\mathbf{uv}$ и направленный так, чтобы репер $O\mathbf{uvn}$ был положительным (рис. 115).

Тогда знак репера $O\mathbf{uvw}$, как мы видели, совпадает со знаком числа $\operatorname{as}\operatorname{пр}_{\mathbf{n}}\mathbf{w}$.

Будем считать (неориентированный) параллелограмм $OADB$, построенный на векторах

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OA},\ \mathbf{v} = \overrightarrow{OB},$$

основанием нашего параллелепипеда; площадь этого параллелограмма (положительную) обозначим через Δ.

Высотой параллелепипеда, соответствующей выбранному нами основанию, будет число

$$h = |\operatorname{as}\operatorname{пр}_{\mathbf{n}}\mathbf{w}|,$$

так что число $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ имеет модуль, равный $\Delta\,|\operatorname{as}\operatorname{пр}_{\mathbf{n}}\mathbf{w}|$, и знак, совпадающий со знаком $\operatorname{as}\operatorname{пр}_{\mathbf{n}}\mathbf{w}$. Другими словами,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \Delta \cdot \operatorname{as}\operatorname{пр}_{\mathbf{n}}\mathbf{w}. \tag{1}$$

Отсюда сразу получим (подставляя в последнем равенстве $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$

и помня, что $\text{ас пр}_n(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \text{ас пр}_n \mathbf{w}_1 + \text{ас пр}_n \mathbf{w}_2$):

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle. \qquad (2_3)$$

Так как каждый из векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ может быть (согласно предложению 1) поставлен на третье место, то наряду с (2_3) имеем

$$\langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \qquad (2_1)$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle. \qquad (2_2)$$

Предложение 2 и формулы (2_1), (2_2) (2_3) означают, что функция $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ линейна по каждому из своих аргументов.

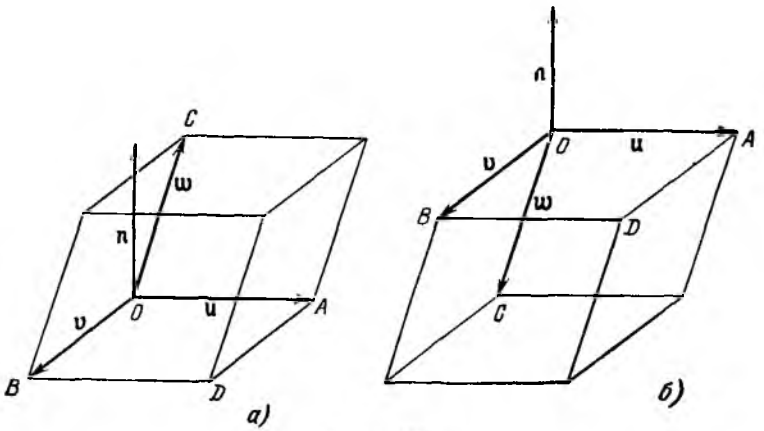


Рис. 115.

Пусть в пространстве дан положительный прямоугольный репер $Oe_1e_2e_3$. Векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ получают теперь координатную запись:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u} &= \{x_1, y_1, z_1\}, \\ \mathbf{v} &= \{x_2, y_2, z_2\}, \\ \mathbf{w} &= \{x_3, y_3, z_3\}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Кроме того, $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, 0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{0, 1, 0\}$, $\mathbf{e}_3 = \{0, 0, 1\}$. Так как базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ положителен, то

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = 1. \qquad (4)$$

Итак, функция $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ линейна по трем своим аргументам, она нечетна и нормирована в смысле равенства (4). Поэтому на основании

теоремы 9 § 11 главы VII функция $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ есть не что иное, как

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = D(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

— ориентированный объем параллелепипеда, построенного на трех векторах $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, данных своею координатной записью (3), есть детерминант третьего порядка (5).

Мы получили не только обобщение на случай трех измерений теоремы о площади ориентированного параллелограмма, но и геометрическое истолкование детерминантов, которое является основой и для понятия объема в n-мерном пространстве.

§ 4. Векторное произведение двух векторов

1. Бивекторы. Пару векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, данных в определенном порядке и приложенных к одной какой-нибудь точке пространства, назовем (*«приложенным»*) *бивектором*.

Бивектор считается равным *нулю*, если составляющие его векторы коллинеарны, и только в этом случае. *Модулем* ненулевого бивектора называется положительное число, равное площади параллелограмма, построенного на составляющих его векторах. Модуль нулевого бивектора, естественно, полагается равным нулю.

Каждый ненулевой бивектор $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, приложенный к какой-нибудь точке O, определяет несущую его ориентированную плоскость, а именно плоскость, в которой базис $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ объявлен положительным.

Мы будем говорить, что два бивектора $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ *одноименны* или *одинаково ориентированы*, если они, будучи приложены к одной и той же точке O, определяют одну и ту же плоскость π и одну и ту же ориентацию в ней (т. е. если базисы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ суть одноименные базисы в плоскости π).

Два бивектора считаются равными, если они одинаково ориентированы и имеют один и тот же модуль (следует, разумеется, помнить, что из равенства бивекторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ вовсе не следует, что составляющие их векторы соответственно равны).

Аналогично тому, как, объединяя в один класс все векторы, равные одному какому-нибудь среди них, мы получали новый геометрический объект — свободный вектор, так и разбивая множество всех бивекторов трехмерного пространства на классы равных между собою бивекторов, мы каждый такой класс назовем *«свободным бивектором»*. Впрочем, мы сейчас покажем, что это понятие, при всем его изяществе, излишне: *в трехмерном пространстве понятие бивектора оказывается возможным свести к понятию вектора*. В самом деле, пусть наше пространство ориентировано. Тогда каждый ненулевой бивектор

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ однозначно определяет (свободный) вектор $\mathbf{n}=\mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, длина которого равна модулю бивектора, а направление перпендикулярно к плоскости, несущей векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, и таково, что тройка векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$ образует положительный базис нашего ориентированного пространства. Для нулевого бивектора $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ вектор $\mathbf{n}$ есть нулевой вектор. Легко видеть, что два бивектора $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ тогда и только тогда равны между собою, когда равны построенные для них векторы: $\mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})=\mathbf{n}(\mathbf{u}', \mathbf{v}')$.

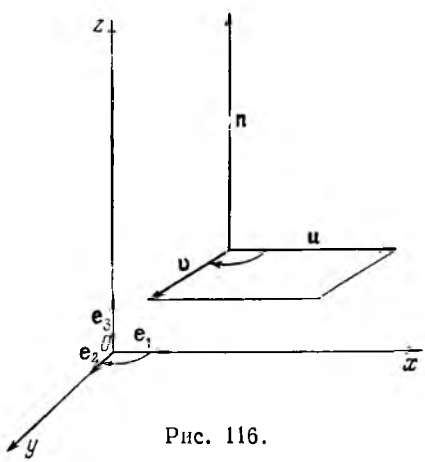


Рис. 116.

С другой стороны, каждый свободный вектор $\mathbf{w}$ пространства является вектором $\mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ для некоторого бивектора $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, а именно для любого бивектора $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, построенного следующим образом: берется плоскость π, перпендикулярная к вектору $\mathbf{w}$, и в ней выбираются два вектора $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ так, чтобы площадь построенного на них параллелограмма равнялась длине $|\mathbf{w}|$ вектора[1]) $\mathbf{w}$; векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ берутся в таком порядке, чтобы, присоединив к ним третий вектор $\mathbf{w}$, получить положительный базис $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ пространства; тогда, очевидно, $\mathbf{w}=\mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Таким образом, сопоставляя с каждым бивектором $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ построенный для него вектор $\mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, мы получаем взаимно однозначное соответствие между всеми свободными бивекторами $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, с одной стороны, и всеми свободными векторами $\mathbf{w}$ трехмерного пространства — с другой. Получается, что в трехмерном пространстве[2]) понятие свободного бивектора сводится к понятию свободного вектора и, следовательно, излишне.

2. Векторное произведение. Определение. *Векторным произведением вектора* $\mathbf{u}$ *на вектор* $\mathbf{v}$ *называется вектор* $\mathbf{n}$, *модуль которого равен произведению модулей векторов* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$ *на синус угла* φ *между ними*: $|\mathbf{n}|=|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\sin\varphi$; *этот вектор перпендикулярен к плоскости* π, *в которой лежат векторы* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$, *если их отложить от одной точки; он направлен так, что упорядоченная тройка век-*

[1]) Это можно сделать бесконечным числом способов, например, взяв за один из двух векторов какой-нибудь орт $\mathbf{e}$, лежащий в плоскости π, а за другой — вектор, лежащий в плоскости π, перпендикулярный орту $\mathbf{e}$ и имеющий длину $|\mathbf{w}|$.

[2]) И только в трехмерном — наше построение вектора $\mathbf{n}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ на пространство более чем трех измерений не обобщается; не имеет оно места и на плоскости.

торов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$ *имеет положительную ориентацию* (рис. 116)[1]. *Векторное произведение вектора* $\mathbf{u}$ *на вектор* $\mathbf{v}$ *обозначается через* $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$.

Установим некоторые свойства векторного произведения.

I. *Векторное произведение* $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ *равно нулю тогда и только тогда, когда векторы* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$ *коллинеарны.*

II (Антикоммутативность). $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$.

III. *При умножении какого-либо из векторов* $\mathbf{u}$ *или* $\mathbf{v}$ *на произвольное вещественное число* λ *на это же число* λ *умножается и векторное произведение*: $[\lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}] = [\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v}] = \lambda[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$.

Эти свойства являются непосредственными следствиями определения вектора $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$.

Имеет место и

IV (Дистрибутивность).

$$\left.\begin{aligned}[(\mathbf{u}'+\mathbf{u}''), \mathbf{v}] &= [\mathbf{u}', \mathbf{v}] + [\mathbf{u}'', \mathbf{v}],\\ [\mathbf{u}, (\mathbf{v}'+\mathbf{v}'')] &= [\mathbf{u}, \mathbf{v}'] + [\mathbf{u}, \mathbf{v}''].\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Вследствие свойства II достаточно доказать одну какую-нибудь из формул (1), например первую. Прежде чем делать это, вычислим (в какой-нибудь прямоугольной системе координат) координаты вектора $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ по координатам векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Для этого в свою очередь докажем следующее очень важное предложение.

V. *Скалярное произведение вектора* $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ *на какой-нибудь вектор* $\mathbf{w}$ *равняется объему ориентированного параллелепипеда, натянутого на векторы* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$:

$$([\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbf{w}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle. \quad (2)$$

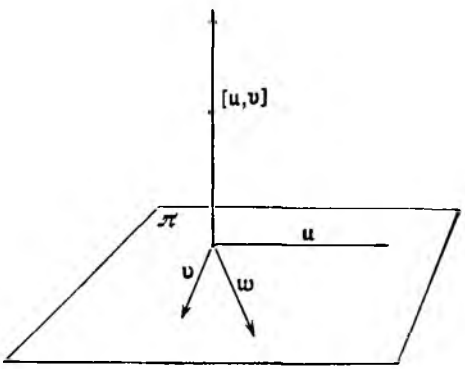


Рис. 117.

Предположим сначала, что векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ компланарны. Тогда правая часть равенства (2) обращается в нуль. Докажем, что и левая равна нулю. Это очевидно, если векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ коллинеарны — тогда $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 0$, значит, и $([\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbf{w}) = 0$. Пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ неколлинеарны, и пусть π — несущая их плоскость. Так как векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ компланарны (рис. 117), то и $\mathbf{w}$ лежит

[1]) Таким образом, вектор $\mathbf{n}$ $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ есть векторное произведение вектора $\mathbf{u}$ на вектор $\mathbf{v}$.

в плоскости π. Но вектор $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ перпендикулярен к плоскости π, значит, $([\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbf{w}) = 0$. Итак, в случае компланарности векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ равенство (2) верно — обе его части равны нулю.

Пусть теперь векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ не компланарны. Положим $\mathbf{n} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ и будем считать параллелограмм, построенный на векторах $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, основанием параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ (рис. 118); положительное число, выражающее (элементарно определенную) площадь этого параллелограмма, есть $\Lambda = |\mathbf{n}|$, так что формула (2) переписывается в виде

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = |\mathbf{n}| \cdot \text{ас пр}_{\mathbf{n}} \mathbf{w}.$$

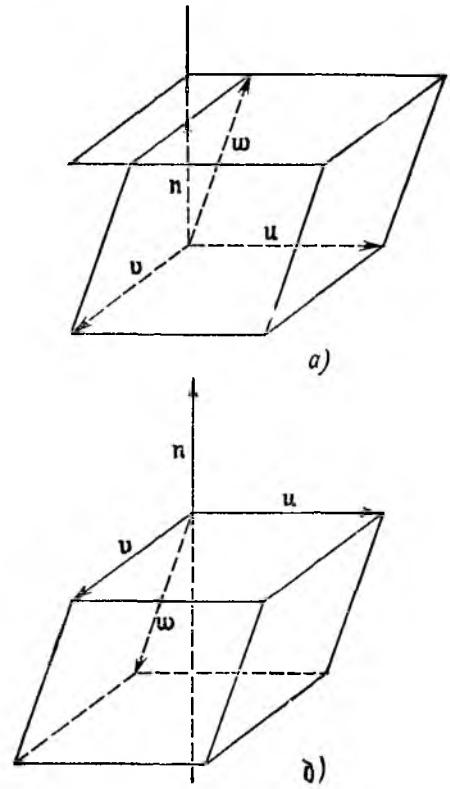


Рис. 118.

С другой стороны, скалярное произведение $([\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbf{w})$ может быть записано в виде

$$([\mathbf{u} \times \mathbf{v}], \mathbf{w}) = (\mathbf{n}, \mathbf{w}) = \\ = |\mathbf{n}| \cdot \text{ас пр}_{\mathbf{n}} \mathbf{w},$$

что и требовалось доказать.

Формула (2) (если ее читать справа налево) может служить определением функции $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, которая при таком подходе к ней называется *смешанным произведением*[1]) трех векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

Пусть теперь — в какой-нибудь прямоугольной системе координат $Oe_1e_2e_3$ — имеем

$$\mathbf{u} = \{x_1, y_1, z_1\},$$
$$\mathbf{v} = \{x_2, y_2, z_2\}.$$

Найдем координаты X, Y, Z вектора $\mathbf{n} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$. Так как система координат прямоугольная, то

$$X = (\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) = ([\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbf{e}_1) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle$$

и аналогично

$$Y = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle, \quad Z = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{e}_3 \rangle.$$

[1]) Этот термин хотя и представляется совершенно излишним, тем не менее очень распространен, и студентам рекомендуется его знать.

Но $\mathbf{e}_1=\{1, 0, 0\}$, $\mathbf{e}_2=\{0, 1, 0\}$, $\mathbf{e}_3=\{0, 0, 1\}$; поэтому

$$X=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

и аналогично

$$Y=\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \qquad Z=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Другими словами, если в прямоугольной системе координат $Oe_1e_2e_3$ векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ даны в виде $\mathbf{u}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\mathbf{v}=\{x_2, y_2, z_2\}$, то вектор $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ может быть записан в виде разложенного по элементам третьей строки детерминанта:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}]=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Выведем отсюда формулы дистрибутивности IV.

Пусть $\mathbf{u}'=\{x', y', z'\}$, $\mathbf{u}''=\{x'', y'', z''\}$, $\mathbf{v}=\{x, y, z\}$; тогда $\mathbf{u}'+\mathbf{u}''=\{x'+x'', y'+y'', z'+z''\}$, и мы имеем

$$[(\mathbf{u}'+\mathbf{u}''), \mathbf{v}]=\begin{vmatrix} x'+x'' & y'+y'' & z'+z'' \\ x & y & z \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x & y & z \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x & y & z \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}=[\mathbf{u}', \mathbf{v}]+[\mathbf{u}'', \mathbf{v}],$$

что и требовалось доказать.

ГЛАВА X

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Уравнения плоскости

1. Параметрическое и общее уравнения плоскости. Всякую плоскость в пространстве можно задать, указав какую-нибудь ее точку $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ и два произвольных приложенных к этой точке неколлинеарных вектора (рис. 119) $\mathbf{u}_1=\{a_1, b_1, c_1\}=\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\mathbf{u}_2=\{a_2, b_2, c_2\}=\overrightarrow{M_0M_2}$. Эти векторы определяют двумерное векторное многообразие, состоящее из всех векторов $\mathbf{u}$, являющихся линейными комбинациями векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$; прилагая векторы $\mathbf{u}$ к точке M_0, получим всевозможные закрепленные векторы вида

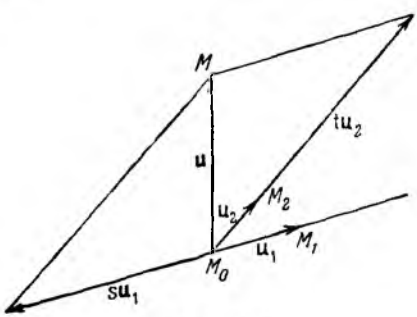


Рис. 119.

$$\overrightarrow{M_0M}=s\mathbf{u}_1+t\mathbf{u}_2, \qquad (1)$$

где s и t — произвольные вещественные числа; концы M этих векторов и заполняют плоскость, проходящую через точку M_0 и два приложенных к ней вектора $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$.

В координатной форме уравнение (1) переписывается так:

$$\left.\begin{aligned} x-x_0&=sa_1+ta_2,\\ y-y_0&=sb_1+tb_2,\\ z-z_0&=sc_1+tc_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Давая в этих уравнениях переменным s и t всевозможные числовые значения, получим все точки нашей плоскости и только точки этой плоскости. Поэтому векторное уравнение (1) или равносильная ему

тройка числовых уравнений (1) называется *параметрическим уравнением плоскости*.

Уравнения (1) выражают линейную зависимость столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} x-x_0 & a_1 & a_2 \\ y-y_0 & b_1 & b_2 \\ z-z_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix},$$

что в свою очередь эквивалентно равенству

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

или уравнению

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \tag{3}$$

где

$$A=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad C=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Таким образом, уравнение (3) представляет собою необходимое и достаточное условие, чтобы точка $M=(x, y, z)$ принадлежала плоскости, определяемой уравнением (1), т. е. уравнение (3) есть уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ и через пару неколлинеарных векторов $\mathbf{u}_1=\{a_1, b_1, c_1\}$, $\mathbf{u}_2=\{a_2, b_2, c_2\}$.

Задача. Найти уравнение плоскости, проходящей через три данные неколлинеарные точки

$$M_0=(x_0, y_0, z_0), \quad M_1=(x_1, y_1, z_1), \quad M_2=(x_2, y_2, z_2).$$

Искомая плоскость содержит точку M_0 и неколлинеарные векторы $\overrightarrow{M_0M_1}=\{x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0\}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}=\{x_2-x_0, y_2-y_0, z_2-z_0\}$; ее уравнение, следовательно, есть (2), т. е.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

что может быть переписано и в виде

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(в чем убеждаемся непосредственным вычислением, вычитая вторую строку последнего детерминанта из остальных трех его строк).

2. Уравнение двумерного векторного многообразия. Мы доказали, что всякая плоскость есть множество всех точек $M=(x, y, z)$, являющихся решениями некоторого уравнения первой степени с тремя неизвестными, а именно уравнения (3). Переходим к доказательству обратного предложения: множество всех точек $M=(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют некоторому уравнению первой степени, есть плоскость. Для этого рассмотрим однородное уравнение

$$A\xi+B\eta+C\zeta=0; \tag{5}$$

всякое решение ξ, η, ζ однородного уравнения (5) мы будем рассматривать как вектор $\mathbf{u}=\{\xi, \eta, \zeta\}$ в пространстве, снабженном раз навсегда заданной аффинной системой координат.

Прежде всего докажем, что *множество всех векторов-решений* $\mathbf{u}=\{\xi, \eta, \zeta\}$ *уравнения* (5) *есть векторное многообразие.*

Для этого достаточно доказать два утверждения:

1. Если векторы $\mathbf{u}_1=\{\xi_1, \eta_1, \zeta_1\}$ и $\mathbf{u}_2=\{\xi_2, \eta_2, \zeta_2\}$ являются решениями уравнения (5), то и вектор $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2=\{\xi_1+\xi_2, \eta_1+\eta_2, \zeta_1+\zeta_2\}$ является решением этого уравнения.

2. Если вектор $\mathbf{u}=\{\xi, \eta, \zeta\}$ есть решение уравнения (5), то при любом λ вектор $\lambda\mathbf{u}=\{\lambda\xi, \lambda\eta, \lambda\zeta\}$ есть решение этого уравнения.

Оба этих утверждения доказываются совершенно автоматически, подстановкой в уравнение (5) координат соответственно вектора $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2$ и вектора $\lambda\mathbf{u}$:

$$A(\xi_1+\xi_2)+B(\eta_1+\eta_2)+C(\zeta_1+\zeta_2)=$$
$$=(A\xi_1+B\eta_1+C\zeta_1)+(A\xi_2+B\eta_2+C\zeta_2)=0,$$
$$A\lambda\xi+B\lambda\eta+C\lambda\zeta=\lambda(A\xi+B\eta+C\zeta)=0.$$

Замечание. Если дано не одно однородное уравнение (5), а система таких уравнений и если векторы $\mathbf{u}_1=\{\xi_1, \eta_1, \zeta_1\}$ и $\mathbf{u}_2=\{\xi_2, \eta_2, \zeta_2\}$ удовлетворяют всем уравнениям этой системы, то вектор $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2=\{\xi_1+\xi_2, \eta_1+\eta_2, \zeta_1+\zeta_2\}$ будет удовлетворять всем уравнениям этой системы.

Аналогично, если вектор $\mathbf{u}=\{\xi, \eta, \zeta\}$ есть решение системы однородных уравнений вида (5), то и вектор $\lambda\mathbf{u}$ будет решением этой системы. Таким образом, имеет место совершенно общая

Теорема 1. *Множество всех векторов* $\mathbf{u}=\{\xi, \eta, \zeta\}$, *являющихся решениями произвольной системы однородных линейных уравнений, есть векторное многообразие.*

Вернемся к одному уравнению

$$A\xi+B\eta+C\zeta=0. \tag{5}$$

Предполагаем, что не все коэффициенты в этом уравнении равны нулю. Докажем, что многообразие V всех решений $\mathbf{u}=\{\xi, \eta, \zeta\}$ уравнения (5) имеет размерность $d=2$. Для того чтобы доказать, что $d<3$, достаточно найти какой-нибудь вектор $\mathbf{w}$, не содержащийся в многообразии V. По крайней мере один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля; пусть, например, $C\neq 0$. Тогда вектор $\mathbf{w}=\{0, 0, 1\}$ заведомо не содержится в многообразии V. Итак, $d\leqslant 2$. Для того чтобы доказать равенство $d=2$, остается найти в многообразии V два линейно независимых вектора $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$. Для этого (предполагая все время, что $C\neq 0$) положим

$$\mathbf{u}_1=\left\{1, 0, -\frac{A}{C}\right\}, \quad \mathbf{u}_2=\left\{0, 1, -\frac{B}{C}\right\}.$$

Векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ линейно независимы (они, очевидно, не коллинеарны); они удовлетворяют уравнению (5)[1]). Утверждение доказано.

Докажем обратное утверждение: всякое двумерное векторное многообразие V есть многообразие решений некоторого линейного однородного уравнения (5).

В самом деле, все векторы $\mathbf{u}$ данного многообразия V и только они суть линейные комбинации двух произвольно выбранных в V неколлинеарных векторов $\mathbf{u}_1=\{a_1, b_1, c_1\}$, $\mathbf{u}_2=\{a_2, b_2, c_2\}$. Поэтому условие, необходимое и достаточное для того, чтобы вектор $\mathbf{u}=\{\xi, \eta, \zeta\}$ принадлежал многообразию V, состоит в том, чтобы при некоторых s и t было

$$\mathbf{u}=s\mathbf{u}_1+t\mathbf{u}_2$$

или, в координатной записи,

$$\begin{aligned}\xi&=sa_1+ta_2,\\ \eta&=sb_1+tb_2,\\ \zeta&=sc_1+tc_2.\end{aligned}$$

Но это условие выражает линейную зависимость векторов-столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix}\xi & a_1 & a_2\\ \eta & b_1 & b_2\\ \zeta & c_1 & c_2\end{pmatrix},$$

[1]) Читатель, вероятно, сообразил, что для получения векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ мы подставили в уравнение (5) сначала $\xi=1$, $\eta=0$, потом, наоборот, $\xi=0$, $\eta=1$ и решили полученное уравнение относительно ζ.

что в свою очередь равносильно уравнению

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

или уравнению

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0, \tag{5}$$

где

$$A = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

(при этом не все три коэффициента A, B, C равны нулю: это следует из того, что векторы $\mathbf{u}_1 = \{a_1, b_1, c_1\}$ и $\mathbf{u}_2 = \{a_2, b_2, c_2\}$ не коллинеарны). Мы доказали, что векторное многообразие V есть многообразие всех решений уравнения (5).

Итак, доказана

Теорема 2. *Множество всех решений однородного линейного уравнения* (5) (*не вырождающегося в тождество* $0 = 0$) *есть векторное многообразие размерности* 2; *обратно, всякое двумерное векторное многообразие есть множество решений некоторого однородного линейного уравнения* (5).

3. Первая основная теорема о плоскости. Возьмем теперь общее линейное уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{6}$$

в котором хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля. Пусть $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — какое-нибудь решение этого уравнения [1]).

На основании теоремы 4 (гл. VII) мы получим все решения $M = (x, y, z)$ уравнения (3) и только решения этого уравнения, если положим

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta,$$

где $\{\xi, \eta, \zeta\}$ пробегает многообразие V всех решений однородного уравнения $A\xi + B\eta + C\zeta = 0$. Но точка $M = (x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0 + \zeta)$ есть конец вектора $\mathbf{u} = \{\xi, \eta, \zeta\}$, приложенного к точке M_0. Когда вектор $\mathbf{u} = \{\xi, \eta, \zeta\} = \overrightarrow{M_0M}$ пробегает двумерное векторное многообразие V, а оно состоит из всех линейных комбинаций двух каких-

---

[1]) Его нетрудно получить: в предположении, что, например, $C \neq 0$, дадим произвольные значения x_0, y_0 неизвестным x и y; подставив их в (6), определим уже однозначно $z_0 = \dfrac{D - Ax_0 - By_0}{C}$.

нибудь лежащих в нем неколлинеарных векторов $\mathbf{u}_1 = \{a_1, b_1, c_1\}$ и $\mathbf{u}_2 = \{a_2, b_2, c_2\}$, то его конец M зачерчивает плоскость, проходящую через точку M_0 и приложенные к ней векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$. Мы доказали, что множество всех точек $M = (x, y, z)$, являющихся решениями уравнения (6), есть плоскость. Вместе с тем доказана и

Теорема 3 (первая основная теорема о плоскости). *Всякая плоскость в пространстве, снабженном аффинной системой координат, есть множество всех точек, удовлетворяющих некоторому линейному уравнению*

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{6}$$

Обратно, множество всех точек $M = (x, y, z)$, являющихся решениями произвольного уравнения вида (6), *есть плоскость.*

Определение. Всякое уравнение (6), которому удовлетворяют все точки данной плоскости (и только они), называется *уравнением* этой *плоскости.*

Замечание. Добавление «и только они» является в последней фразе излишним: если известно, что все точки данной плоскости π удовлетворяют уравнению (6), то можно быть уверенным в том, что ни одна точка, не принадлежащая плоскости π, этому уравнению не удовлетворяет.

В самом деле, ведь множество всех точек $M = (x, y, z)$, являющихся решениями уравнения (6), образует некоторую плоскость, которую на мгновение обозначим через π'; так как все точки плоскости π уравнению (6) тоже удовлетворяют, то вся плоскость π содержится в плоскости π', но тогда обе плоскости π и π' непременно совпадают.

4. Условие компланарности вектора плоскости. Связь между уравнением плоскости (6) и соответствующим однородным уравнением (5) дается следующим (в сущности, совершенно очевидным) предложением.

Теорема 4. *Для того чтобы вектор $\mathbf{u} = \{\xi, \eta, \zeta\}$ был компланарен плоскости*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{6}$$

необходимо и достаточно, чтобы было

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0. \tag{5}$$

Другими словами: *уравнение* (5) *есть уравнение двумерного многообразия векторов, компланарных плоскости* (6).

Доказательство. 1° Пусть вектор $\mathbf{u} = \{\xi, \eta, \zeta\}$ компланарен плоскости (6). Берем какую-нибудь точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ этой плоскости и прилагаем к ней вектор $\mathbf{u}$; получаем вектор с началом в M_0 и концом $M = (x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0 + \zeta)$, лежащим в плоскости (6); значит,

$$\begin{gathered} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \qquad (6_0) \\ A(x_0 + \xi) + B(y_0 + \eta) + C(z_0 + \zeta) + D = 0. \end{gathered}$$

Вычитая, получим

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0. \tag{5}$$

2° Пусть $\mathbf{u} = \{\xi, \eta, \zeta\}$ удовлетворяет уравнению (5). Прилагаем вектор $\mathbf{u}$ к какой-нибудь точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ плоскости (6). Получим вектор $\overrightarrow{M_0M}$, конец $M = (x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0 + \zeta)$ которого в силу (5) и (6_0) лежит в плоскости (6). Так как и начало M_0 этого вектора лежит в плоскости (6), то и весь вектор лежит в этой плоскости. Теорема доказана.

Следствие. *Прямая*

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{7}$$

тогда и только тогда параллельна (в широком смысле[1]) плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{6}$$

когда

$$\boxed{Aa + Bb + Cc = 0.} \tag{8}$$

Если, кроме того, выполнено условие

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \tag{6_0}$$

то (и только в этом случае) прямая (7) лежит в плоскости.

В самом деле, условие (8) означает, что направляющий вектор $\{a, b, c\}$ прямой (7) компланарен плоскости (6), а условие (6_0) означает, что точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ прямой (7) лежит в этой плоскости.

5. Частные случаи уравнения плоскости. 1° В уравнении плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{6}$$

свободный член D обращается в нуль тогда и только тогда, когда плоскость (6) проходит через начало координат. Доказательство предоставляется читателю.

2° Обращение в 0 коэффициента C означает, что плоскость (6) параллельна оси Oz (в широком смысле слова). В самом деле, равенство $C = 0$ выражает необходимое и достаточное условие для того, чтобы вектор $\{0, 0, 1\}$ (являющийся направляющим вектором оси Oz) удовлет-

[1]) То есть параллельна в узком смысле (не имеет общих точек с плоскостью) или лежит в данной плоскости.

ворял уравнению (5), т. е. был компланарен плоскости (6). Аналогично $B=0$ есть признак параллельности оси Oy, а $A=0$ — признак параллельности оси Ox.

3° Если в уравнении (6) обращаются в нуль два коэффициента при координатах, то уравнение (6) определяет плоскость, параллельную одной из координатных плоскостей. В самом деле, если, например, $A=B=0$, то уравнение (6) превращается в $Cz+D=0$, т. е. $z=-\frac{D}{C}$, и определяет плоскость, параллельную плоскости Oxy. Все три коэффициента A, B, C не могут обратиться в нуль: тогда (6) перестало бы быть уравнением, а превратилось бы в (верное или неверное) тождество.

4° Если все коэффициенты в уравнении (6) отличны от нуля, то это значит, что плоскость (6) не проходит через начало координат и пересекается с каждой координатной осью. Тогда уравнение (6) можно представить в виде

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$$

или, полагая

$$-\frac{D}{A}=a,\quad -\frac{D}{B}=b,\quad -\frac{D}{C}=c,$$

в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (9)$$

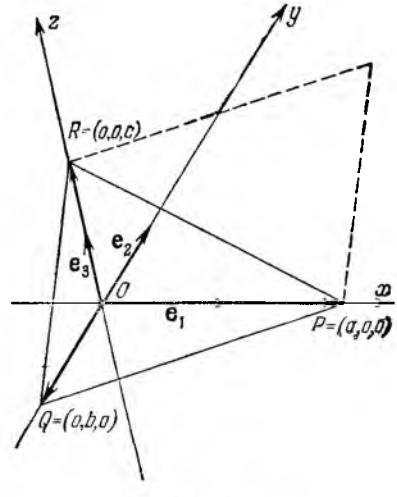


Рис. 120.

Нетрудно доказать, что геометрический смысл чисел a, b, c таков: точки пересечения P, Q, R нашей плоскости с осями Ox, Oy, Oz суть соответственно (рис. 120)

$$P=(a,\ 0,\ 0),\qquad Q=(0,\ b,\ 0),\qquad R=(0,\ 0,\ c).$$

Другими словами, числа a, b, c суть алгебраические значения отрезков — векторов $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, отсеченных плоскостью (6) на осях координат. Поэтому уравнение (9) называется «*уравнением плоскости в отрезках*».

§ 2. Множество решений системы двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными

Теорема 5. *Пусть система уравнений*

$$\left.\begin{aligned} A\xi + B\eta + C\zeta = 0, \\ A'\xi + B'\eta + C'\zeta = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

независима, т. е. тройки коэффициентов в обоих уравнениях не пропорциональны между собою, так что по крайней мере один из детерминантов

$$a = \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Тогда множество всех решений системы (1) *есть одномерное векторное многообразие, состоящее из всех векторов* $\mathbf{u} = \{\xi, \eta, \zeta\}$, *коллинеарных вектору* $\mathbf{u}_0 = \{a, b, c\}$.

Доказательство. Пусть, например, $c = \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \neq 0$. Дадим неизвестному ζ произвольное значение $\zeta = \zeta_0$. Тогда значения ξ_0, η_0 двух других неизвестных однозначно определяются из системы (1), переписанной в виде

$$A\xi + B\eta = -C\zeta_0, \qquad A'\xi + B'\eta = -C'\zeta_0,$$

по правилу Крамера:

$$\xi_0 = \zeta_0 \frac{a}{c}, \qquad \eta_0 = \zeta_0 \frac{b}{c} \tag{2}$$

и мы получаем решение $\{\xi_0, \eta_0, \zeta_0\}$.

В частности, если положить $\zeta_0 = 1$, то получаем решение

$$\mathbf{u}_1 = \left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right\}.$$

Значит,

$$\mathbf{u}_0 = c\mathbf{u}_1 = \{a, b, c\}$$

также есть решение системы (1).

Так как всякое решение $\{\xi_0, \eta_0, \zeta_0\}$ определяется значением неизвестного $\zeta = \zeta_0$ по формулам (2), то в силу этих формул всякое (отличное от нулевого) решение ξ_0, η_0, ζ_0 удовлетворяет пропорции

$$\xi_0 : \eta_0 : \zeta_0 = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} : 1 = a : b : c$$

— теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть даны два неколлинеарных* ***вектора***

$$\mathbf{u}_1 = \{\xi_1, \eta_1, \zeta_1\}, \qquad \mathbf{u}_2 = \{\xi_2, \eta_2, \zeta_2\},$$

являющиеся решениями уравнения

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0. \tag{3}$$

Тогда коэффициенты уравнения (3) *определены с точностью до общего множителя, а именно*:

$$A:B:C = \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \zeta_2 & \xi_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

В самом деле, имеем равенства

$$A\xi_1 + B\eta_1 + C\zeta_1 = 0,$$
$$A\xi_2 + B\eta_2 + C\zeta_2 = 0.$$

Рассматривая эти равенства как уравнения относительно неизвестных A, B, C с коэффициентами ξ_1, η_1, ζ_1 и соответственно ξ_2, η_2, ζ_2 и имея в виду, что векторы $\{\xi_1, \eta_1, \zeta_1\}$ и $\{\xi_2, \eta_2, \zeta_2\}$ не коллинеарны и, значит, $\xi_1:\eta_1:\zeta_1 \neq \xi_2:\eta_2:\zeta_2$, мы видим, что находимся в условиях теоремы 5, откуда и следует пропорция (4).

Из доказанного следствия 1 сразу вытекает

Следствие 2. *Два однородных уравнения*

$$\left.\begin{aligned} A\xi + B\eta + C\zeta &= 0, \\ A'\xi + B'\eta + C'\zeta &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

тогда и только тогда имеют одно и то же множество решений, когда их коэффициенты пропорциональны.

В самом деле, множество решений каждого из уравнений (1) есть двумерное векторное многообразие. Если множество решений обоих уравнений (1) есть одно и то же двумерное многообразие, то, беря в нем два неколлинеарных вектора $\{\xi_1, \eta_1, \zeta_1\}$ и $\{\xi_2, \eta_2, \zeta_2\}$, заключаем из следствия 1, что обе тройки коэффициентов A, B, C и A', B', C' пропорциональны тройке

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \zeta_2 & \xi_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix},$$

т. е.

$$A':B':C' = A:B:C$$

или

$$A':A = B':B = C':C. \tag{5}$$

Обратно, если пропорция (5) имеет место, то одно из уравнений (1) получается из другого умножением обеих его частей на одно и то же λ, так что оба уравнения имеют одно и то же множество решений.

§ 3. Взаимное расположение двух плоскостей

Если две плоскости параллельны (в широком смысле), то всякий вектор, компланарный одной из них, будет компланарен и другой плоскости. Две параллельные в широком смысле плоскости имеют одно и то же множество компланарных им векторов. Обратно, если у двух плоскостей π_1 и π_2 одно и то же многообразие компланарных им векторов V, то они параллельны в широком смысле слова, если кроме того эти плоскости различны, то они не имеют ни одной общей точки (т. е. параллельны в узком смысле слова): если бы плоскости π_1 и π_2 имели общую точку M_0, то, прилагая к этой точке все векторы многообразия V, мы бы получили все точки каждой из плоскостей π_1 и π_2 и эти плоскости были бы тождественны.

Итак, две плоскости, определяемые соответственно уравнениями

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

и

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \tag{1'}$$

параллельны в широком смысле слова тогда и только тогда, когда они определяют одно и то же многообразие компланарных им векторов, т. е. когда уравнения

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0 \tag{2}$$

и

$$A'\xi + B'\eta + C'\zeta = 0 \tag{2'}$$

имеют одно и то же множество решений. А это, как мы видели, бывает тогда и только тогда, когда

$$\boxed{A' : A = B' : B = C' : C.} \tag{3}$$

Если, более того,

$$\boxed{A' : A = B' : B = C' : C = D' : D,} \tag{4}$$

то уравнения (1) и (1') равносильны, определяемые ими плоскости совпадают. Обратно, если плоскости (1) и (1') совпадают, то совпадают многообразия компланарных им векторов, т. е. выполнено (3), и, следовательно, при некотором λ

$$A' = \lambda A, \quad B' = \lambda B, \quad C' = \lambda C.$$

Докажем, что тогда и $D' = \lambda D$, т. е. имеет место пропорция (4). В самом деле, если $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — какая-нибудь точка совпадающих между собой плоскостей (1) и (1'), то имеем тождества

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D, \quad A'x_0 + B'y_0 + C'z_0 = -D',$$

в которых $A' = \lambda A$, $B' = \lambda B$, $C' = \lambda C$, а следовательно, и $D' = \lambda D$. Утверждение доказано.

Итак, пропорция (4) является необходимым и достаточным условием для совпадения плоскостей (1) и (1′).

Наконец, параллельность плоскостей (1) и (1′) в собственном смысле означает, что имеет место параллельность в широком смысле, но нет совпадения плоскостей. Другими словами, верна пропорция (3), но неверна пропорция (4), а это значит, что

$$A' : A = B' : B = C' : C \neq D' : D. \tag{5}$$

Итогом всему доказательству является

Теорема 6 (вторая основная теорема о плоскости). *Два уравнения первой степени* (1) и (1′)

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

тогда и только тогда определяют одну и ту же плоскость, когда выполнено условие

$$A' : A = B' : B = C' : C = D' : D. \tag{4}$$

Уравнения (1) *и* (1′) *тогда и только тогда определяют две плоскости, параллельные в широком смысле слова, когда выполнено условие* (3).

Наконец, эти уравнения тогда и только тогда определяют две плоскости, параллельные в собственном смысле, когда имеет место (5).

§ 4. Прямая как пересечение двух плоскостей

Пусть две плоскости, заданные уравнениями

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \tag{1′}$$

не параллельны, т. е. $A : B : C \neq A' : B' : C'$.

Тогда по крайней мере один из трех детерминантов

$$a = \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \tag{2}$$

отличен от нуля, и уравнения (1) и (1′) совместны; чтобы найти их совместное решение, т. е. точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, принадлежащую обеим плоскостям (1) и (1′), достаточно в предположении, что, например, $c = \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \neq 0$, взять произвольное значение $z = z_0$ и решить

по правилу Крамера систему уравнений

$$Ax+By=-D-Cz_0,$$
$$A'x+B'y=-D'-C'z_0.$$

Итак, пусть $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ есть какая-нибудь точка, принадлежащая обеим плоскостям (1) и (1′). Все остальные точки M, общие двум нашим плоскостям, найдутся, если приложить к точке M_0 всевозможные векторы

$$\mathbf{u}=\overrightarrow{M_0M}=\{\xi, \eta, \zeta\},$$

лежащие одновременно как в одной, так и в другой плоскости, или, что то же самое, всевозможные векторы-решения системы однородных уравнений

$$\left.\begin{aligned} A\xi+B\eta+C\zeta=0,\\ A'\xi+B'\eta+C'\zeta=0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Так как $A:B:C\neq A':B':C'$, то по теореме 5 все эти векторы коллинеарны одному из них, например вектору

$$\mathbf{u}_0=\{a, b, c\}.$$

Все общие точки наших двух плоскостей суть точки M, определяемые векторным уравнением

$$\overrightarrow{M_0M}=t\mathbf{u}_0;$$

они образуют прямую, проходящую через точку M_0 и имеющую вектор $\mathbf{u}_0=\{a, b, c\}$ своим направляющим вектором. Каноническое уравнение этой прямой есть

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \tag{4}$$

(где a, b, c даны равенствами (2)).

Пример. Даны плоскости

$$x+y+2z-1=0 \quad \text{и} \quad x-z=0.$$

Требуется написать каноническое уравнение прямой пересечения этих плоскостей. Находим точку M_0, лежащую в обеих плоскостях. Полагаем, например, $z=0$, тогда $x=0$, $y=1$; итак, $M_0=(0, 1, 0)$. Находим направляющий вектор прямой пересечения. Этот вектор имеет координаты

$$a=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1, \quad b=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3, \quad c=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1.$$

Каноническое уравнение искомой прямой записывается в виде

$$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{-1}.$$

Задание прямой какой-нибудь парой уравнений (1), (1′) иногда называется *общим заданием*, а сама система уравнений (1), (1′) — *«общим уравнением» прямой*.

Задание прямой каноническим уравнением есть частный случай общего задания, так как каноническое уравнение есть система двух уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{x-x_0}{a}&=\frac{z-z_0}{c},\\ \frac{y-y_0}{b}&=\frac{z-z_0}{c},\end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

каждое из которых определяет плоскость, параллельную одной из координатных осей (первое из уравнений (4′) определяет плоскость, параллельную оси Oy, а второе — параллельную оси Ox) (рис. 121).

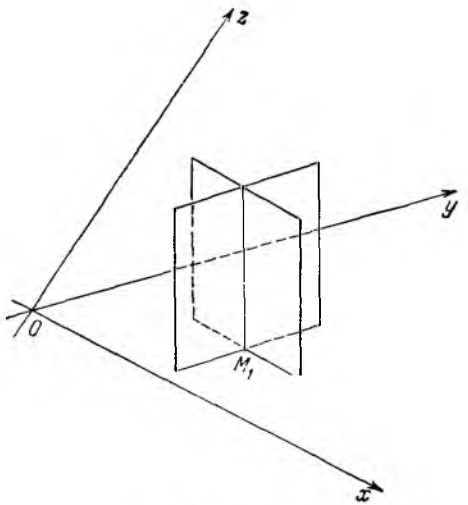


Рис. 121.

Никакая прямая не может быть параллельной всем трем координатным плоскостям. Пусть, например, прямая (4) пересекает плоскость Oxy в точке $M_1=(x_1, y_1, 0)$; так как прямая (4) и, следовательно, ее направляющий вектор $\{a, b, c\}$ не параллельны плоскости Oxy, то $c\neq 0$; поэтому вектор $\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right\}$ также является направляющим вектором нашей прямой.

Проходя через точку $M_1=(x_1, y_1, 0)$ и имея направляющий вектор $\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right\}$, наша прямая имеет уравнение

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=z$$

$\left(\text{в котором } m=\frac{a}{c},\ n=\frac{b}{c}\right)$, т. е.

$$\left.\begin{aligned}x&=mz+x_1,\\ y&=nz+y_1.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Эта система уравнений называется «*приведенным уравнением прямой*».

§ 5. Пучок плоскостей

Содержание этого параграфа вполне аналогично содержанию § 5 главы V: мы введем здесь понятие пучка плоскостей, которое, в частности, позволит решить задачу о нахождении всех плоскостей, проходящих через прямую пересечения двух данных плоскостей.

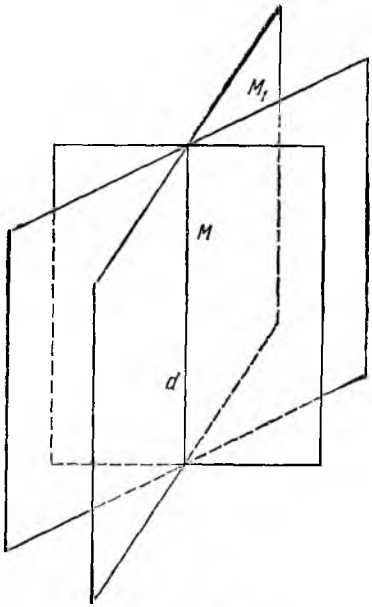


Рис. 122.

Прежде всего мы скажем, что плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

есть линейная комбинация плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad (2)$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \qquad (3)$$

если уравнение (1) есть линейная комбинация уравнений (2) и (3), т. е. если найдутся такие λ_1 и λ_2, что имеет место тождество

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D = \\ = \lambda_1 (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \\ + \lambda_2 (A_2x + B_2y + C_2z + D_2). \end{aligned} \qquad (4)$$

Из тождества (4) следует, что всякая точка $M = (x, y, z)$, удовлетворяющая обоим уравнениям (2) и (3), удовлетворяет и уравнению (1) — всякая точка, принадлежащая обеим плоскостям (2) и (3), принадлежит и плоскости (1). Другими словами:

Плоскость, являющаяся линейной комбинацией двух данных пересекающихся плоскостей (2) и (3), проходит через прямую пересечения этих плоскостей. Докажем, что и, обратно, всякая плоскость (1), проходящая через прямую пересечения d двух данных плоскостей (2) и (3), является линейной комбинацией этих плоскостей.

Без ограничения общности можем предположить, что плоскость (1) не совпадает ни с одной из плоскостей (2) и (3). Доказательство совершенно такое же, как в случае прямых (гл. V, § 5).

Плоскость, проходящая через прямую d, будет полностью определена, если мы укажем какую-нибудь ее точку $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ (рис. 122), не лежащую на прямой d. Возьмем же такую точку $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ на нашей плоскости (1) и напишем уравнение с двумя

неизвестными λ_1 и λ_2:

$$\lambda_1 (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) + \lambda_2 (A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2) = 0. \quad (5)$$

Так как по предположению точка M_1 не лежит на прямой d, то хотя бы одна из скобок в левой части уравнения (5) отлична от нуля; из этого уравнения (5) однозначно определяется отношение

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2}{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1}. \quad (6)$$

Пусть теперь λ_1 и λ_2 — какие-нибудь числа, удовлетворяющие пропорции (6). Тогда выполнено и равенство (5), означающее, что точка M_1 лежит на плоскости

$$\lambda_1 (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2 (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \quad (7)$$

Но эта плоскость, будучи линейной комбинацией плоскостей (2) и (3), проходит через прямую d и содержит точку M_1, принадлежащую плоскости (1), — значит, плоскость (1) совпадает с плоскостью (7) и является линейной комбинацией плоскостей (2) и (3). Утверждение доказано.

Итак, *для того чтобы плоскость* (1) *проходила через прямую пересечения двух плоскостей* (2) *и* (3), *необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (1) *было линейной комбинацией уравнений* (2) *и* (3).

Пусть теперь плоскости (2) и (3) параллельны. Совершенно так же как и в § 5 главы V, мы убеждаемся в том, что всякая плоскость, являющаяся линейной комбинацией плоскостей (2) и (3), будет им параллельна и что, обратно, всякая плоскость, параллельная двум (параллельным между собою) плоскостям (2) и (3), является их линейной комбинацией.

Назовем совокупность всех плоскостей, проходящих через данную прямую d, *собственным пучком плоскостей с осью* d; назовем *несобственным пучком плоскостей* совокупность всех плоскостей, параллельных (в широком смысле слова) одной какой-нибудь плоскости. Наконец, назовем множество всех плоскостей, являющихся линейными комбинациями двух каких-нибудь плоскостей δ_1 и δ_2, *одномерным многообразием плоскостей, порожденным двумя своими элементами* δ_1 *и* δ_2. Мы доказали, что всякий пучок плоскостей (собственный или несобственный) является одномерным многообразием, порожденным любыми двумя своими элементами.

Обратно, всякое одномерное многообразие плоскостей (порожденное какими-нибудь двумя плоскостями δ_1 и δ_2) есть пучок плоскостей — собственный, если плоскости δ_1 и δ_2 пересекаются, несобственный, если они параллельны.

В главе XXIII этих «Лекций» мы построим проективное пространство, пополнив обычное пространство бесконечно удаленными (несобственными) точками таким образом, что совокупность этих бесконечно удаленных точек

образует бесконечно удаленную (несобственную) плоскость; все прямые, лежащие в этой плоскости, также будут называться бесконечно удаленными или несобственными. Каждая «собственная» (т. е. обыкновенная) плоскость пространства пересекается с несобственной плоскостью по несобственной прямой — по единственной несобственной прямой данной собственной плоскости. При этом оказывается, что две собственные плоскости тогда и только тогда параллельны, когда они пересекаются по (своей общей) бесконечно удаленной прямой. Таким образом, в проективном пространстве различие между собственными и несобственными пучками плоскостей исчезает: несобственный пучок — это пучок плоскостей, осью которого является одна из несобственных прямых проективного пространства.

§ 6. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Две прямые

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \tag{1}$$

и

$$\frac{x-x_0'}{a'}=\frac{y-y_0'}{b'}=\frac{z-z_0'}{c'} \tag{1'}$$

могут лежать или не лежать в одной плоскости (быть или не быть компланарными).

Положим

$$M_0=(x_0,\ y_0,\ z_0),\qquad M_0'=(x_0',\ y_0',\ z_0').$$

Для компланарности прямых (1) и (1′) необходимым и достаточным условием является компланарность трех векторов (рис. 123):

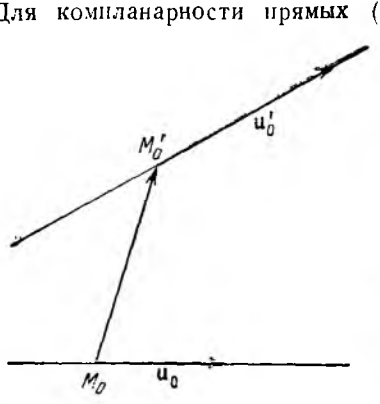


Рис. 123.

$$\overrightarrow{M_0M_0'}=\{x_0'-x_0,\ y_0'-y_0,\ z_0'-z_0\},$$
$$\mathbf{u}_0=\{a,\ b,\ c\},$$
$$\mathbf{u}_0'=\{a',\ b',\ c'\},$$

т. е. равенство

$$\begin{vmatrix} x_0'-x_0 & y_0'-y_0 & z_0'-z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

Следовательно, прямые *скрещиваются* (т. е. не лежат в одной плоскости) тогда и только тогда, когда равенство (2) не имеет места.

Найдем уравнение плоскости, содержащей две компланарные прямые (1) и (1′). Предположим сначала, что прямые (1) и (1′) пересекаются и что $M_0=(x_0,\ y_0,\ z_0)$ — их точка пересечения. Тогда плоскость, в которой лежат обе наши прямые, есть плоскость, прохо-

дящая через точку $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ и два приложенных к ней неколлинеарных вектора $\mathbf{u}_0=\{a, b, c\}$ и $\mathbf{u}_0'=\{a', b', c'\}$. Уравнением этой плоскости является, как мы знаем (§ 1), уравнение

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}=0; \tag{3}$$

оно и дает ответ на поставленный вопрос.

Пусть теперь прямые (1) и (1′) параллельны. Тогда векторы $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}_0'$ коллинеарны, следовательно, уравнение (3) обращается в тождество и ничего нам не даст. Чтобы определить уравнение плоскости, содержащей две данные параллельные прямые (1) и (1′), заметим, что эта плоскость содержит точку $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ одной из наших прямых, ее направляющий вектор $\mathbf{u}_0=\{a, b, c\}$ и вектор $\overrightarrow{M_0M_0'}=\{x_0'-x_0, y_0'-y_0, z_0'-z_0\}$.

Поэтому уравнение искомой плоскости есть

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_0'-x_0 & y_0'-y_0 & z_0'-z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

Замечание. Если прямые (1) и (1′) скрещиваются, то уравнение (3) есть уравнение плоскости, проходящей через прямую (1) параллельно прямой (1′). Доказательство предоставляется читателю.

§ 7. О двух полупространствах, определяемых данной плоскостью

Этот вопрос совершенно аналогичен вопросу о двух полуплоскостях, определяемых данной прямой на плоскости (гл. V, § 6)[1]).

Пусть плоскость π задана уравнением

$$F(x, y, z)\equiv Ax+By+Cz+D=0. \tag{1}$$

Плоскость π разбивает пространство на два полупространства, одно из которых состоит из всех точек $M=(x, y, z)$, для которых $F(x, y, z)>0$, другое — из всех точек $M=(x, y, z)$, для которых $F(x, y, z)<0$. Первое полупространство называется *положительным*, второе — *отрицательным по отношению к данному уравнению* (1) *плоскости* π. При переходе к какому-нибудь другому уравнению той же плоскости оба полупространства могут или остаться неизменными, или поменяться местами: положительное полупространство для одного уравнения сделается отрицательным для другого. Первый или

[1]) Читатель должен прежде всего восстановить в памяти все содержание § 6 главы V.

второй случай наступает в зависимости от знака того множителя, на который надо почленно помножить одно уравнение, чтобы получить другое.

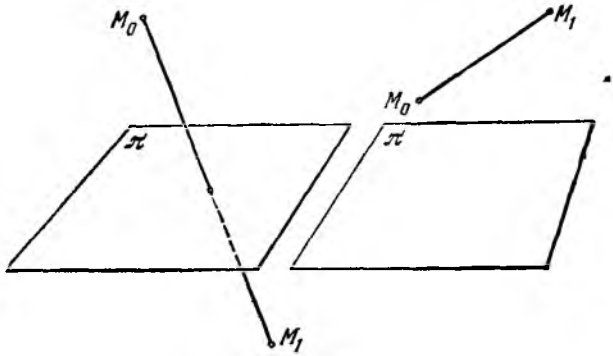


Рис. 124.

Совершенно так же, как в § 6 главы V, доказывается

Теорема 7. *Если точки* $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ *и* $M_1=(x_1, y_1, z_1)$ *лежат в разных полупространствах, определяемых плоскостью* (1), *то отрезок* $\overline{M_0M_1}$ *пересекает плоскость; если же точки* M_0 *и* M_1 *лежат в одном и том же полупространстве, то в этом же полупространстве лежит и весь отрезок* $\overline{M_0M_1}$ (рис. 124).

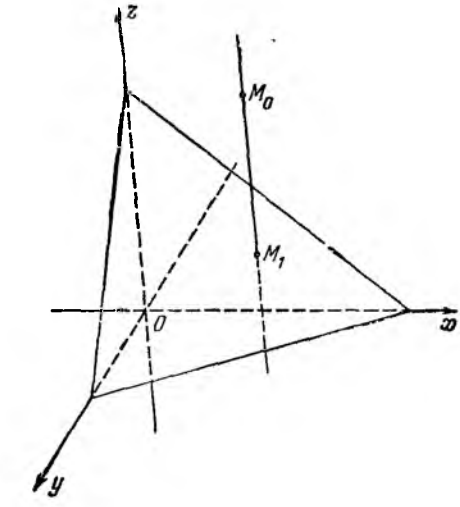


Рис. 125.

Наглядный смысл этой теоремы таков же, как в случае аналогичной теоремы о двух полуплоскостях, определяемых на плоскости данной прямой. Плоскость (1) не может быть параллельна сразу всем трем координатным осям. Пусть, например, она не параллельна оси Oz. Тогда каждая точка $M_0=(x_0, y_0, z_0)$, не лежащая на плоскости (1), лежит «*выше*» или «*ниже*» этой плоскости — в следующем смысле. Через точку $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ проходит единственная прямая, параллельная оси Oz; она пересекает плоскость (1) в некоторой точке $M_1=(x_0, y_0, z_1)$ (рис. 125). Если

$z_0 > z_1$, то говорим, что точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ лежит выше плоскости (1); если же $z_0 < z_1$, то говорим, что точка M_0 лежит ниже плоскости (1). Совершенно так же, как в § 6 главы V, доказывается

Теорема 8. *Все точки пространства, лежащие выше плоскости* (1), *образуют одно из двух полупространств, на которые эта плоскость разбивает пространство; все точки, лежащие ниже плоскости* (1), *образуют второе полупространство.*

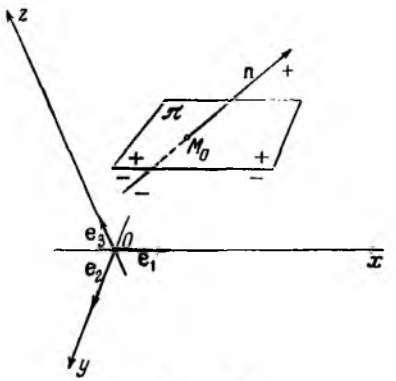


Рис. 126.

Наконец, имеет место и теорема, аналогичная теореме 4 главы V и доказываемая совершенно так же, как эта последняя.

Теорема 9. *Если плоскость* π *задана уравнением* (1), *то вектор* $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$, *приложенный к какой-либо точке* $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *этой плоскости* (рис. 126), *направлен в положительное полупространство относительно уравнения* (1).

§ 8. Плоскость в прямоугольной системе координат; нормальное уравнение плоскости; расстояние от точки до плоскости

Предполагаем до конца главы, что система координат прямоугольная.

Теорема 10. *Пусть плоскость* π *задана* (*в прямоугольной системе координат*) *своим уравнением*

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1}$$

Тогда вектор $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ *перпендикулярен к плоскости* π.

В самом деле, если $\mathbf{u} = \{\xi, \eta, \zeta\}$ — произвольный вектор, лежащий в плоскости π, то

$$(\mathbf{n}, \mathbf{u}) = A\xi + B\eta + C\zeta = 0,$$

что означает, что вектор $\mathbf{n}$ перпендикулярен ко всякому вектору, лежащему в плоскости π, т. е. перпендикулярен к плоскости π, что и требовалось доказать.

Проведем теперь через начало координат O перпендикуляр («*нормаль*») $\overrightarrow{ON}$ к данной плоскости π (рис. 127); через N обозначаем точку пересечения плоскости π с этой нормалью. Если плоскость π

проходит через начало координат (т. е. $O=N$), то положительное направление на нормали выбираем произвольно; в противном случае считаем положительным направление вектора $\overrightarrow{ON}$ (т. е. направление от начала координат к плоскости π). Орт этого направления обозначаем через $\mathbf{e}$, его направляющие косинусы — через $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, так что

$$\mathbf{e}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}.$$

На оси $\overrightarrow{ON}$ алгебраическое значение вектора $\overrightarrow{ON}$ есть число $p\geqslant 0$, равное расстоянию плоскости π от начала координат. Пусть $M=(x, y, z)$ — какая-нибудь точка пространства. В том и только в том случае, когда она лежит в плоскости π, ее ортогональная проекция на ось орта $\mathbf{e}$ есть точка N, а проекция вектора $\overrightarrow{OM}$ есть вектор $\overrightarrow{ON}$. Следовательно, для всех точек $M=(x, y, z)$ плоскости π и только для них имеем

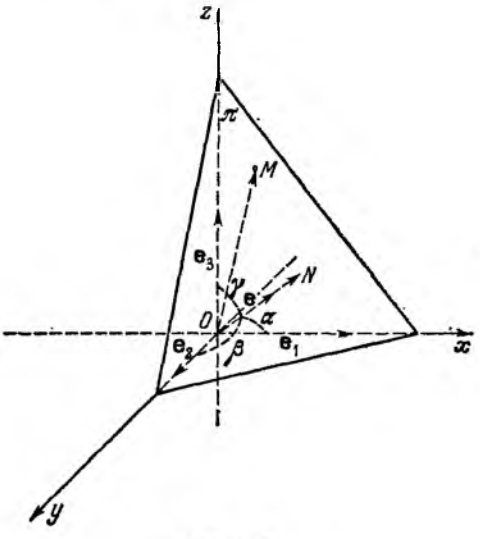


Рис. 127.

$$\text{ав пр}_{\mathbf{e}}\overrightarrow{OM}=p.$$

Но левая часть этого равенства есть

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$$

(см. гл. IV, § 2), так что точки $M=(x, y, z)$ плоскости π и только они удовлетворяют уравнению

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \tag{2}$$

которое есть, следовательно, уравнение плоскости π; оно называется *нормальным уравнением этой плоскости.*

Пусть теперь дано какое-нибудь уравнение

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

плоскости π. Как, отправляясь от этого уравнения, получить нормальное уравнение той же плоскости?

Так как уравнения (1) и (2) определяют одну и ту же плоскость π, то их соответствующие коэффициенты пропорциональны,

т. е.

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \lambda A,\\ \cos\beta &= \lambda B,\\ \cos\gamma &= \lambda C,\\ -p &= \lambda D\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

при некотором λ. Из равенств (3) определяем λ, а именно: из первых трех равенств (3) имеем

$$\lambda^2 (A^2 + B^2 + C^2) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

откуда

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{4}$$

Знак λ определяем лишь в случае $D \neq 0$ из четвертого равенства (3): так как $p > 0$, то $\lambda D < 0$, и, следовательно, λ имеет знак, противоположный знаку D.

О п р е д е л е н и е. Число λ, имеющее модуль $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ и знак, противоположный знаку коэффициента D, называется *нормирующим множителем уравнения* (1). При $D = 0$ можно знак λ выбрать произвольно.

Мы доказали: *для того чтобы из произвольного* («общего») *уравнения плоскости* (1) *получить нормальное уравнение плоскости* (2), *надо обе части уравнения* (1) *помножить на нормирующий множитель этого уравнения.*

Аналогично случаю прямой на плоскости, нормальное уравнение плоскости позволяет определить расстояние любой точки пространства до этой плоскости.

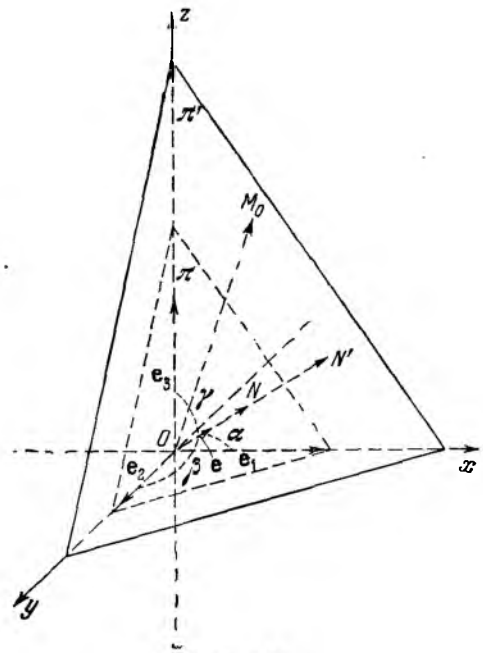


Рис. 128.

Т е о р е м а 11. *Расстояние* $\rho(M_0, \pi)$ *от точки* $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *до плоскости* π, *данной своим нормальным уравнением* (2), *равно модулю числа, получаемого, если в левую часть уравнения* (2)

подставить $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, т. е.

$$\rho(M_0, \pi)=|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|.$$

Доказательство. Через точку M_0 проводим плоскость π' параллельно плоскости π (рис. 128) и рассмотрим ось, определенную ортом

$$\mathbf{e}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\},$$

перпендикулярным к обеим плоскостям π и π' и приложенным (как раньше) к началу координат. Эта ось пересечет плоскости π и π' соответственно в точках N и N'. Искомое расстояние $\rho(M_0, \pi)$ равно длине вектора $\overrightarrow{NN'}$, т. е. модулю его алгебраического значения (NN') на только что определенной оси. Но (по лемме Шаля) имеем (все на той же оси)

$$(ON')=(ON)+(NN'), \tag{5}$$

причем

$$(ON')=\text{ав пр}_{\mathbf{e}}\overrightarrow{OM_0},\quad \overrightarrow{OM_0}=\{x_0, y_0, z_0\}.$$

Поэтому

$$(ON')=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma,$$

тогда как $(ON)=p$. Внося эти значения в (5), получаем

$$(NN')=(ON')-(ON)=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p,$$
$$\rho(M_0, \pi)=|(NN')|=|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|,$$

что и требовалось доказать.

Если плоскость π задана общим уравнением (1), то расстояние от точки $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ до этой плоскости находится по формуле

$$\rho(M_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

§ 9. Угол между прямой и плоскостью; угол между двумя плоскостями

Угол между прямой d и плоскостью π есть, по определению, угол φ между этой прямой и ее проекцией на плоскость π. Это определение дает не один, а два угла (острый и тупой), дополняющие друг друга до π (рис. 129); каждый из этих углов заключен между 0 и π.

В зависимости от выбора направляющего вектора прямой d и нормального вектора к плоскости π имеем всего четыре угла (рис. 130),

образующие две пары вертикальных углов. Обозначим через φ угол между любым направляющим вектором $\mathbf{u}$ прямой d и любым вектором $\mathbf{n}$, нормальным к плоскости. Так как угол ψ заключен между 0 и π, то его синус неотрицателен, причем, как легко видеть, всегда

$$\sin\psi = |\cos\varphi|.$$

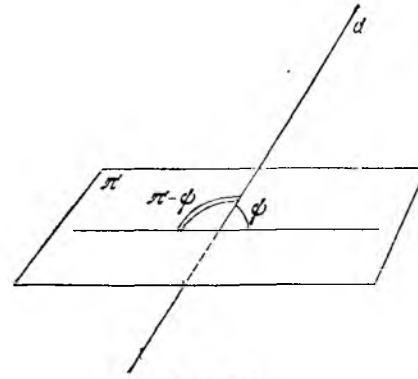


Рис. 129.

Если прямая d дана уравнением

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}, \quad (1)$$

а плоскость π — уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2)$$

то угол φ между векторами $\mathbf{u}_0 = \{a, b, c\}$ и $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{Aa+Bb+Cc}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

значит,

$$\sin\psi = \frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Условие перпендикулярности прямой (1) *и плоскости* (2) есть условие параллельности векторов $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{n}$, т. е.

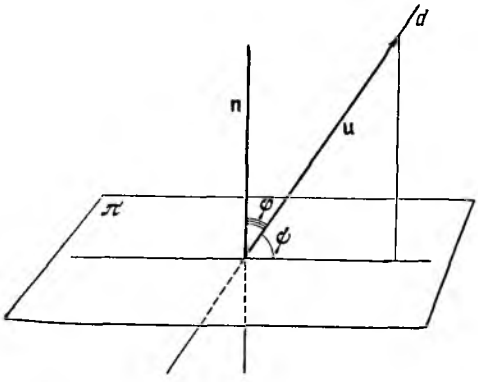


Рис. 130.

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}.$$

За *угол между двумя плоскостями*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$$

и

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0 \quad (2')$$

принимаем угол φ между любыми двумя перпендикулярными к ним векторами (что опять дает два угла, острый и тупой, дополняющие друг друга до π), например между

$$\mathbf{n} = \{A, B, C\}, \ \mathbf{n}' = \{A', B', C'\}.$$

Получаем

$$\cos\varphi = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Условием перпендикулярности двух плоскостей (2) и (2′) является

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Здесь может быть сделано замечание, аналогичное тому, которое было сделано в § 9 главы V, а именно: угол между векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ равен тому из двугранных углов, образуемых плоскостями (2) и (2′), в котором лежат точки, принадлежащие разноименным полупространствам, определяемым этими плоскостями. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству соответствующего утверждения из § 9 главы V (рис. 131).

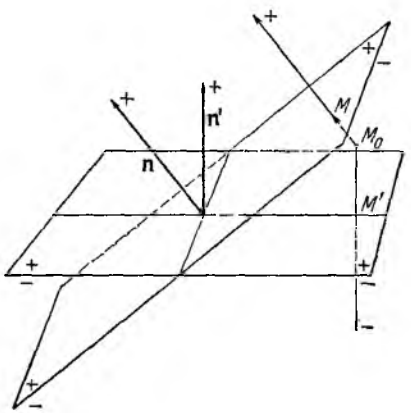


Рис. 131.

§ 10. Две задачи

Рассмотрим в заключение две задачи.

Задача 1. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из данной точки $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ на прямую d (не проходящую через точку M_1), данную уравнением

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}, \qquad (1)$$

и найти его длину. При этом под *перпендикуляром*, опущенным из данной точки M_1 на прямую d, понимается прямая, проходящая через точку M_1 и пересекающая прямую d в некоторой ее точке M_2 под прямым углом. Длина отрезка $\overline{M_1M_2}$ называется *длиной перпендикуляра*. Для решения поставленной задачи, во-первых, проводим плоскость через точку M_1 и прямую d (рис. 132). Эта плоскость, неся на себе векторы

$$\mathbf{u}_0 = \{a, b, c\}, \qquad \overrightarrow{M_0M_1} = \mathbf{u}_1 = \{x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0\}$$

и содержа точку M_0, имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Во-вторых, проводим плоскость через точку $M_1=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ перпендикулярно к прямой d. Уравнение этой плоскости есть

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0.$$

Пересечение этих двух плоскостей дает искомую прямую, проходящую через точку M_1, пересекающую прямую d и перпендикулярную к ней.

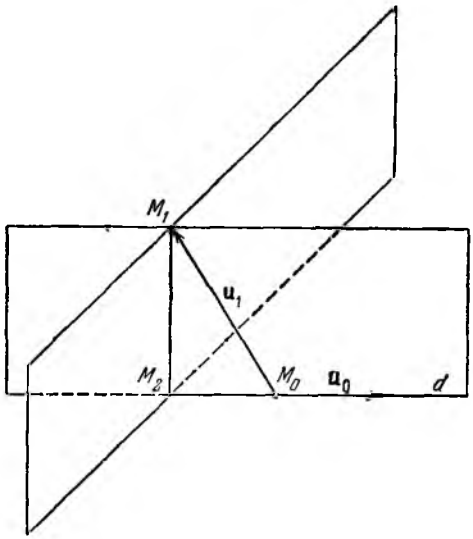


Рис. 132.

Длину перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на прямую d, найдем как высоту параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\mathbf{u}_0$, отложенных от точки M_0, считая основанием сторону $\mathbf{u}_0$ (рис. 133). Площадь S этого параллелограмма есть абсолютная величина векторного произведения вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ на вектор $\mathbf{u}_0$, а длина его основания есть $|\mathbf{u}_0|$; поэтому для расстояния $\rho(M_1,\ d)$ имеем

$$\rho(M_1,\ d)=\frac{|[\overrightarrow{M_0M_1},\mathbf{u}_0]|}{|\mathbf{u}_0|}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left|\begin{matrix}y_1-y_0 & z_1-z_0\\ b & c\end{matrix}\right|^2+\left|\begin{matrix}z_1-z_0 & x_1-x_0\\ c & a\end{matrix}\right|^2+\left|\begin{matrix}x_1-x_0 & y_1-y_0\\ a & b\end{matrix}\right|^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Задача 2. Написать уравнение общего перпендикуляра к двум непараллельным прямым d и d'

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \qquad (1)$$

и

$$\frac{x-x_0'}{a'}=\frac{y-y_0'}{b'}=\frac{z-z_0'}{c'} \qquad (1')$$

и найти его длину.

Под *общим перпендикуляром к двум прямым* (в пространстве) понимается прямая, пересекающая каждую из двух данных прямых в некоторых точках M и M' под прямым углом.

Решение. Берем векторное произведение $\mathbf{w}=\{A, B, C\}$ векторов $\mathbf{u}_0=\{a, b, c\}$ и $\mathbf{u}_0'=\{a', b', c'\}$ и рассмотрим плоскости α и α'

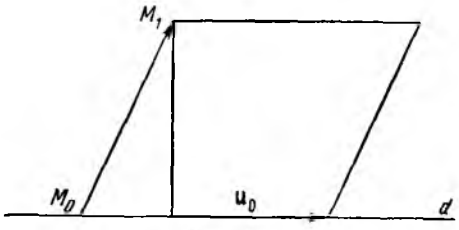


Рис. 133.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix}=0 \quad (2)$$

и

$$\begin{vmatrix} x-x_0' & y-y_0' & z-z_0' \\ a' & b' & c' \\ A & B & C \end{vmatrix}=0. \quad (2')$$

Докажем, что плоскости (2) и (2′) пересекаются по некоторой прямой l, которая и является (единственным) общим перпендикуляром к прямым (1) и (1′).

Плоскость (2) содержит прямую (1) и вектор $\mathbf{w}$, перпендикулярный к обеим прямым (1) и (1′).

Плоскость (2′) также содержит вектор $\mathbf{w}$, перпендикулярный к обеим прямым (1) и (1′), и, кроме того, прямую (1′).

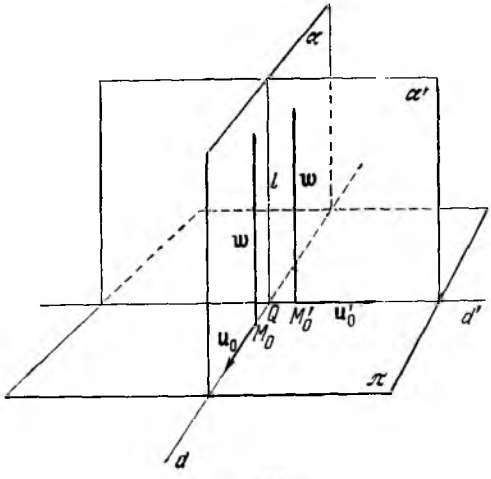


Рис. 134.

Предположим сначала, что прямые (1) и (1′) лежат в одной плоскости π (но не параллельны между собою); тогда вектор $\mathbf{w}$ перпендикулярен к плоскости π; плоскость (2), неся на себе вектор $\mathbf{w}$, перпендикулярный к плоскости π, сама перпендикулярна к плоскости π и содержит прямую (1). Точно так же плоскость (2′) перпендикулярна к плоскости π и содержит прямую (1′). Отсюда сле-

дует, что плоскости (2) и (2′) не совпадают. Точка пересечения Q прямых (1) и (1′) лежит в пересечении плоскостей (2) и (2′); это пересечение есть прямая l, проходящая через точку Q перпендикулярно к плоскости π и, значит, к прямым (1) и (1′) (рис. 134). Она и является искомым общим перпендикуляром к этим прямым.

Пусть теперь прямые (1) и (1′) скрещиваются (рис. 135). Тогда плоскость (2) содержит прямую (1), но не содержит вектора $\mathbf{u}_0'$: если бы она его содержала, то вектор $\mathbf{w}$, будучи перпендикулярным к $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}_0'$, был бы перпендикулярен ко всей плоскости (2), тогда как он лежит в ней.

По той же причине плоскость (2′) не содержит вектора $\mathbf{u}_0$.

Итак, плоскость (2) содержит прямую (1) и не параллельна прямой (1′), значит, пересекается с ней.

Плоскость (2′) содержит прямую (1′) и пересекается с прямой (1).

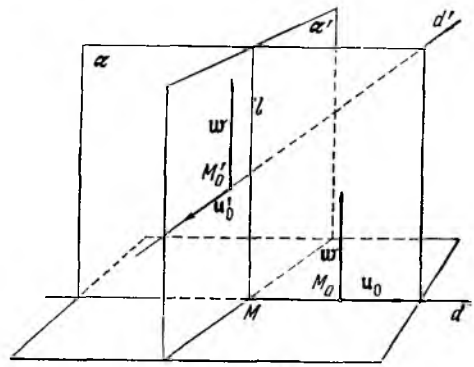


Рис. 135.

Поэтому плоскости (2) и (2′) не могут быть параллельны (в широком смысле слова), они пересекаются по некоторой прямой l. Прямая l содержит вектор $\mathbf{w}$ (содержащийся в обеих плоскостях (2) и (2′)); значит, прямая l перпендикулярна к обеим прямым (1) и (1′).

Далее, точка пересечения M плоскости (2′) и прямой (1) содержится в плоскости (2′) и в плоскости (2) (содержащей всю прямую (1)), значит, и в их пересечении, т. е. в прямой l (и в прямой (1)).

Итак, прямая l пересекается с прямой (1). Аналогично убеждаемся и в том, что прямая l пересекается с прямой (1′); отсюда следует, что прямая l есть общий перпендикуляр к прямым (1) и (1′). Такая прямая единственная (в предположении, что прямые (1) и (1′) не параллельны).

В самом деле, направление прямой l определено тем, что она перпендикулярна к плоскости, натянутой на два направляющих вектора $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}_0'$ прямых (1) и (1′). Поэтому, если существовало бы два общих перпендикуляра к прямым (1) и (1′), то они были бы параллельны, значит, лежали бы в одной плоскости. Но тогда прямые (1) и (1′), как перпендикуляры к этим компланарным прямым, были бы параллельны — случай, который мы исключили (и в котором прямые в самом деле имеют бесконечно много общих перпендикуляров).

Длину общего перпендикуляра к прямым d и d' найдем как высоту параллелепипеда, ребрами которого служат векторы $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_0'$ и $\overrightarrow{M_0M_0'}$,

считая основанием параллелограмм, построенный на векторах $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}_0'$ (рис. 136). Объем V этого параллелепипеда есть модуль детерминанта

$$\begin{vmatrix} x_0'-x_0 & y_0'-y_0 & z_0'-z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix},$$

а площадь S его основания равна абсолютной величине векторного

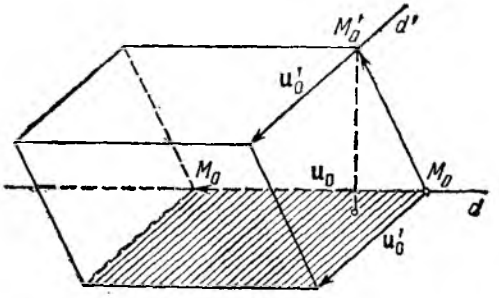


Рис. 136.

произведения $[\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0']$. Поэтому расстояние между прямыми d и d' будет

$$\rho(d, d') = \frac{V}{S} = \frac{|\langle \overrightarrow{M_0M_0'}, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0' \rangle|}{|[\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0']|} = \frac{\begin{Vmatrix} x_0'-x_0 & y_0'-y_0 & z_0'-z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{Vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}^2}}.$$

ГЛАВА XI

ДВИЖЕНИЯ И АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Определение движений и аффинных преобразований

Мы уже имели дело с движениями, а именно со сдвигами и поворотами реперов, воспринимавшихся при этом как твердые тела, прочно сваренные из составляющих их стержней — векторов. Однако, наряду с этим, привычным из начального курса механики восприятием движения, мы иногда говорили о движении и в более абстрактном, собственно геометрическом смысле слова: так, еще в главе II шла речь о сдвиге всего пространства на некоторый вектор $\mathbf{u}$ как о преобразовании пространства, при котором каждой точке M пространства ставится в соответствие точка M' — конец приложенного к точке M вектора

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{MM'}.$$

В главе VIII мы упоминали о повороте всей плоскости (в себе) вокруг данной ее точки O на некоторый угол; в главе IX мы в аналогичном смысле говорили и о вращении пространства вокруг данной прямой. Читателю, несомненно, известны также и простейшие несобственные движения плоскости и пространства — это зеркальные отражения, или симметрии плоскости (соответственно пространства), относительно какой-нибудь прямой (соответственно какой-нибудь плоскости) — преобразования, заключающиеся в том, что каждой точке M ставится в соответствие точка M', симметричная к точке M относительно данной прямой на плоскости (или данной плоскости в пространстве).

Теперь мы даем строгое

Определение. *Движением плоскости* (*пространства*) *называется всякое преобразование, которое может быть задано следующим образом. Берется некоторый* (*произвольный*) *«исходный» прямоугольный репер* Oe_1e_2 *на плоскости* (*соответственно прямоугольный репер* $Oe_1e_2e_3$ *в пространстве*); *наряду с ним задается «новый» прямоугольный репер* $O'e_1'e_2'$ (*соответственно* $O'e_1'e_2'e_3'$) *с тем же масштабом, что и первый. Этими данными определяется преобразование плоскости* (*пространства*), *состоящее в том, что каждой точке* M *ставится*

в соответствие точка M', имеющая относительно второго репера те же самые координаты, которые точка M имела относительно исходного репера (рис. 137).

Если первый репер одноименен со старым, исходным, то движение называется *собственным* (рис. 137, *а*); в противном случае движение называется *несобственным* (рис. 137, *б*).

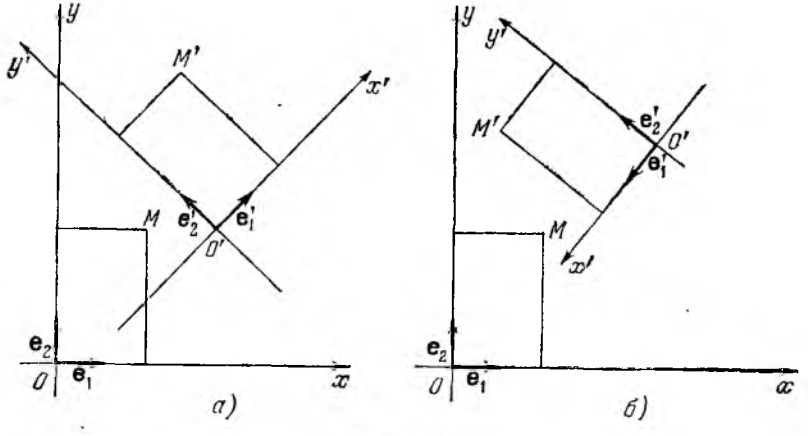


Рис. 137.

Замечание 1. Всякое фактическое перемещение репера как твердого тела в пространстве, происходящее, как этому учит механика, в течение некоторого промежутка времени (например, промежутка времени $0 \leqslant t \leqslant 1$), является частным случаем деформаций, рассмотренных нами в § 1 главы IX; мы видели, что посредством деформации данный репер можно перевести лишь в репер, одноименный с ним. Отсюда следует, что посредством непрерывного процесса осуществимы лишь собственные движения пространства. То же, конечно, относится и к движениям плоскости, если их понимать как перемещения плоскости по ней самой: для того чтобы осуществить простейшее несобственное движение плоскости — симметрию относительно прямой, надо повернуть плоскость в пространстве на угол π вокруг оси симметрии, т. е. выйти за пределы самой плоскости.

Из определения движения сразу следует, что при движении сохраняется расстояние между любыми двумя точками. В самом деле, пусть даны какие-нибудь две точки M_1 и M_2 своими координатами в исходной системе координат Oe_1e_2: $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$. Расстояние между ними есть число

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

При данном движении точки M_1 и M_2 переходят в точки M_1', M_2', имеющие те же координаты x_1, y_1, соответственно x_2, y_2, но только в новой системе координат $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$. Так как эта новая система тоже прямоугольна и имеет тот же масштаб, что и старая, то расстояние между точками M_1' и M_2' выражается (в той же единице длины) тем же числом

$$\rho(M_1', M_2') = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

что и расстояние между точками M_1 и M_2.

В § 6 этой главы будет показано, что всякое преобразование плоскости (и пространства), сохраняющее расстояние между любыми двумя точками, есть движение, а в § 8 мы увидим, что никаких движений плоскости (собственных или несобственных), кроме упомянутых выше, не существует.

На неизбежно возникающий вопрос:

Что получится с нашим определением движений, если отказаться от требования прямоугольности систем координат, в это определение входящих? —

отвечаем:

получится определение *аффинных преобразований.*

Итак, *пусть снова в плоскости (в пространстве) задана — на этот раз совершенно произвольная аффинная — система координат* $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$

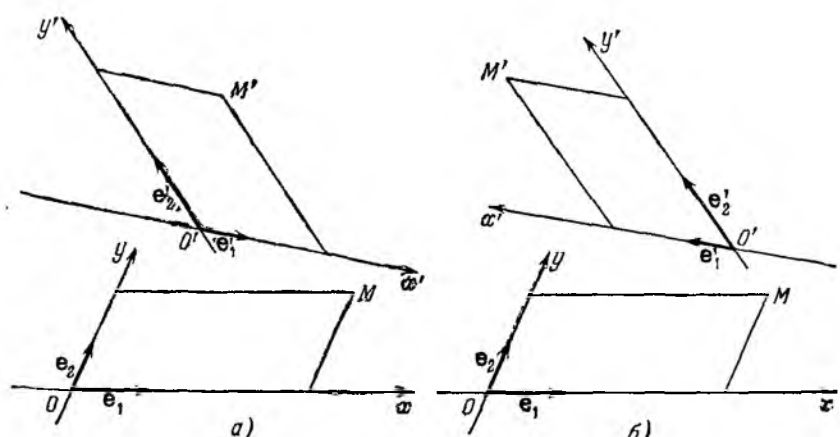


Рис. 138.

(соответственно $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$). *Если, наряду с этой («старой», или «исходной») системой координат, задать также совершенно произвольную «новую» аффинную координатную систему* $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$ (соответственно $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$), *то определится преобразование, состоящее в том, что каждой*

точке M плоскости (соответственно пространства) ставится в соответствие точка M', которая в новой координатной системе имеет те самые координаты, какие точка M имела в старой системе (рис. 138 и 139). *Преобразование, которое может быть задано этим способом, называется аффинным. Очевидно, движения являются частным случаем аффинных преобразований.*

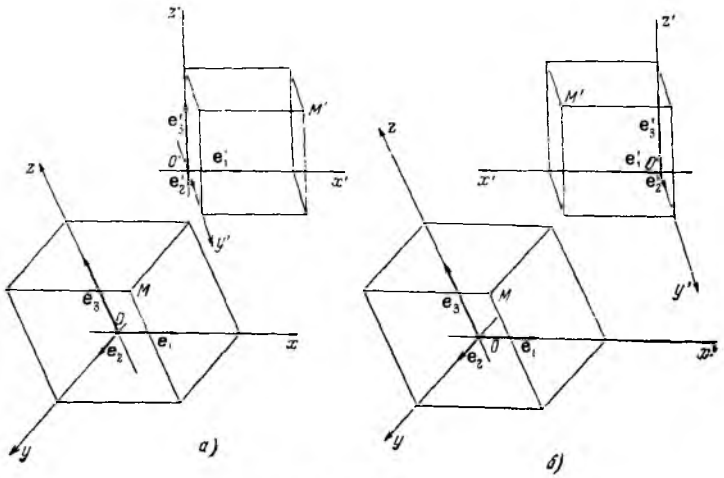


Рис. 139.

Рисунки 138 и 139, а также сделанный на их основе рис. 140 помогут читателю составить себе наглядное представление о том, что может происходить при аффинном преобразовании.

Замечание 2. Если исходный репер считать раз навсегда данным, то возможные аффинные преобразования плоскости (пространства) взаимно однозначно соответствуют различным реперам $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$ (соответственно $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$), которые можно выбрать на плоскости (соответственно в пространстве). Тем из этих реперов, которые одноименны с исходным, соответствуют аффинные преобразования, называемые *собственными;* реперы, не одноименные с исходным репером, определяют *несобственные* аффинные преобразования. Мы увидим в § 5, что вопрос о том, является ли данное аффинное преобразование собственным или несобственным не зависит от выбора исходного репера (и, следовательно, выражает свойство самого преобразования).

Следующее замечание при всей своей очевидности имеет некоторую принципиальную важность.

Замечание 3. Совершенно так же, как мы определяли аффинное преобразование плоскости (т. е. аффинное взаимно однозначное

отображение плоскости на себя), мы можем определить *взаимно однозначное аффинное отображение одной плоскости* π *на другую плоскость* π': для того чтобы задать такое отображение, надо взять два репера: репер Oe_1e_2 в плоскости π и репер $O'e_1'e_2'$ в плоскости π' (рис. 141).

Определяемое этими данными отображение — *аффинное отображение плоскости* π *на плоскость* π' — *состоит в том, что каждой точке* M *плоскости* π *ставится в соответствие та точка* M' *плоскости* π', *которая относительно репера* $O'e_1'e_2'$ *имеет те же самые координаты, которые точка* M *имела относительно репера* Oe_1e_2.

Иногда приходится рассматривать и два экземпляра трехмерного

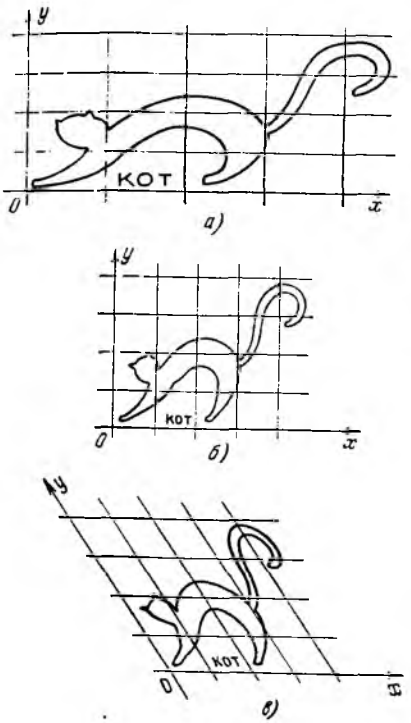


Рис. 140.

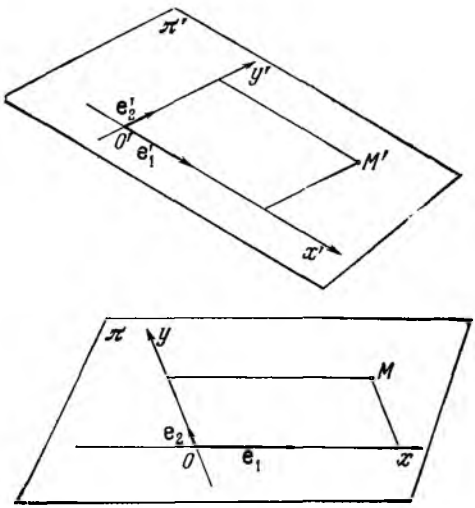


Рис. 141.

пространства (например, два трехмерных подпространства n-мерного арифметического пространства), и тогда необходимо определять аффинное отображение одного из них на другое совершенно так же, как мы только что определили аффинное отображение одной плоскости на другую. Все эти рассуждения получат полную стройность, когда мы в главе XIV займемся во всей общности n-мерным аффинным пространством.

§ 2. Преобразование векторов при аффинном преобразовании плоскости и пространства. Основные свойства аффинных преобразований

Возьмем на плоскости (или в пространстве) какой-нибудь вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ (рис. 142). При аффинном преобразовании точки M_0, M_1 переходят соответственно в точки M_0', M_1', имеющие относительно нового репера те же координаты, которые точки M_0, M_1 имели относительно старого. Так как координаты вектора получаются вычитанием координат его начальной точки из координат его конца, то координаты вектора $\overrightarrow{M_0'M_1'}$ относительно нового репера те же, что и координаты вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ относительно старого репера. Итак:

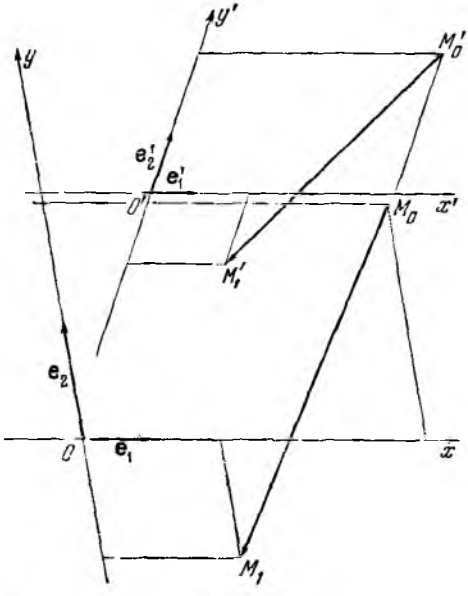


Рис. 142.

1° *При аффинном преобразовании вектору* $\mathbf{u} = \overrightarrow{M_0M_1}$ *ставится в соответствие вектор* $\mathbf{u}' = \overrightarrow{M_0'M_1'}$, *имеющий относительно нового репера те же координаты, которые вектор* $\mathbf{u}$ *имел относительно старого.*

Отсюда сразу следует, что при аффинном преобразовании равным векторам соответствуют равные, так что:

2° *Аффинное преобразование плоскости (пространства) порождает взаимно однозначное отображение на себя (преобразование) многообразия V всех свободных векторов плоскости (соответственно пространства).*

Это преобразование обладает следующим *свойством линейности*: *если при данном преобразовании векторам* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *соответствуют векторы* $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, *то вектору* $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ *будет соответствовать вектор* $\mathbf{u}'+\mathbf{v}'$, *а вектору* $\lambda\mathbf{u}$ *— вектор* $\lambda\mathbf{u}'$ (доказывается сразу переходом к координатам).

Из свойства линейности вытекает, далее:

3° *Если при данном аффинном преобразовании векторам* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *соответствуют векторы* $\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n'$, *то всякой линейной комбинации*

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n$$

векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *соответствует линейная комбинация*

$$\lambda_1\mathbf{u}'_1 + \lambda_2\mathbf{u}'_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}'_n$$

векторов $\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n$ (*с теми же коэффициентами* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$).

Так как при аффинном преобразовании нулевому вектору очевидно соответствует нулевой, то из доказанного следует:

4° *При аффинном преобразовании линейная зависимость векторов сохраняется* (*и, значит, всякие два коллинеарных вектора переходят в коллинеарные, всякие три компланарных вектора переходят в компланарные*).

5° *Обратное преобразование к аффинному преобразованию есть аффинное преобразование.*

В самом деле, если данное аффинное преобразование $\mathcal{A}$ плоскости задается переходом от репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ к реперу $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$, то аффинное преобразование, задаваемое переходом от репера $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$ к реперу $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, есть, как легко видеть, преобразование, обратное к преобразованию $\mathcal{A}$.

То же и для пространства.

Мы видели, что при аффинном преобразовании линейная зависимость векторов сохраняется. Сохраняется и линейная независимость векторов:

6° *При аффинном преобразовании* $\mathcal{A}$ *всякая линейно независимая система векторов* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots$ *переходит в линейно независимую* — в противном случае при аффинном преобразовании $\mathcal{A}^{-1}$, обратном к $\mathcal{A}$, линейно зависимая система $\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots$ перешла бы в линейно независимую, что, как мы знаем, невозможно.

Так как репер есть система линейно независимых векторов (двух на плоскости, трех в пространстве), приложенных к данной точке O, то при аффинном преобразовании всякий репер переходит в репер. Более того, имеет место предложение

7° *При аффинном отображении* (*заданном переходом от репера* I *к реперу* I′) *всякий репер* II *переходит в репер* II′ *и всякая точка* M (*всякий вектор* $\mathbf{u}$) *переходит в точку* M' (*в вектор* $\mathbf{u}'$) *с теми же координатами относительно репера* II′, *какие точка* M *и вектор* $\mathbf{u}$ *имели относительно репера* II.

Доказательство в случае плоскости и в случае пространства одно и то же. Ограничимся случаем плоскости. Пусть II есть репер $o\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2$ (рис. 143), а II′ — репер $o'\boldsymbol{\varepsilon}'_1\boldsymbol{\varepsilon}'_2$. Докажем сначала утверждение, касающееся векторов. Если вектор $\mathbf{u}$ имеет относительно репера $o\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2$ координаты ξ, η, то $\mathbf{u} = \xi\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \eta\boldsymbol{\varepsilon}_2$. Но тогда образ вектора $\mathbf{u}$ есть, по свойству 3°, вектор

$$\mathbf{u}' = \xi\boldsymbol{\varepsilon}'_1 + \eta\boldsymbol{\varepsilon}'_2,$$

имеющий координаты ξ, η относительно репера $o'\boldsymbol{\varepsilon}'_1\boldsymbol{\varepsilon}'_2$. Пусть точка M имеет координаты ξ, η относительно репера $o\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2$. Тогда

$\overrightarrow{oM} = \xi\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \eta\boldsymbol{\varepsilon}_2$, так что, по предыдущему, относительно репера $o'\boldsymbol{\varepsilon}'_1\boldsymbol{\varepsilon}'_2$ вектор $\overrightarrow{o'M'}$, а значит, и точка M' имеют координаты ξ, η. Утверждение доказано.

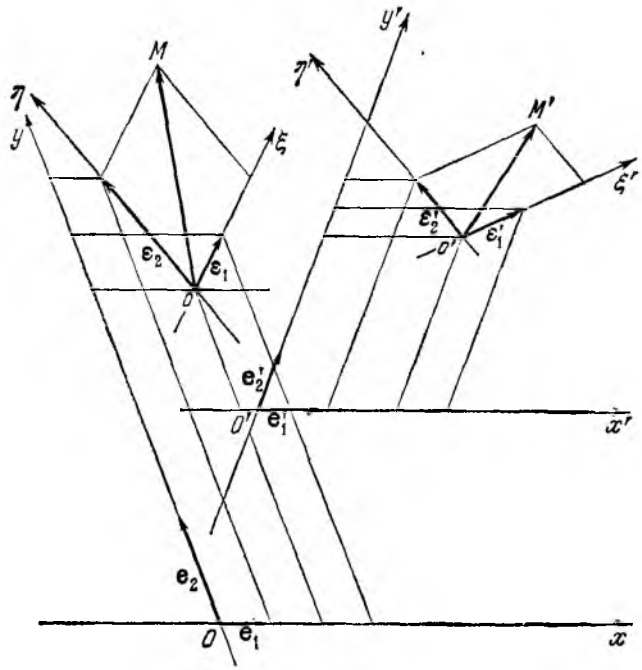


Рис. 143.

Доказанное утверждение является существенным: из него следует, что, *задав аффинное преобразование переходом от какого-нибудь репера* $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ *к реперу* $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$, *мы можем задать его, взяв в качестве исходного любой репер* $o\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2$ *и указав тот репер* $o'\boldsymbol{\varepsilon}'_1\boldsymbol{\varepsilon}'_2$, *в который он должен перейти.*

В качестве приложения только что сделанного замечания докажем, что произведение двух аффинных преобразований $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ есть аффинное преобразование.

В самом деле, пусть аффинное преобразование $\mathcal{A}_1$ задается переходом от репера I к реперу II. Аффинное преобразование $\mathcal{A}_2$ мы можем, по только что доказанному, задать переходом от репера II к какому-то реперу III. Тогда аффинное преобразование, задаваемое переходом от репера I к реперу III, есть, очевидно, произведение $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1$ преобразования $\mathcal{A}_1$ на преобразование $\mathcal{A}_2$.

Замечание 1. Только что доказанные свойства 1°—7° аффинных преобразований, очевидно, имеют место и для аффинных отображений одной плоскости на другую (одного экземпляра трехмерного пространства на другой).

Тождественное преобразование плоскости, соответственно пространства, есть, очевидно, аффинное преобразование. Вспомним, что преобразование, обратное к аффинному, есть аффинное. Наконец, как мы только что доказали, произведение двух аффинных преобразований есть аффинное преобразование. Отсюда — на основании условия, данного в § 6, п. 6, Прибавления, — сразу вытекает следующая основная

Теорема 1. *В группе всех преобразований плоскости (пространства) аффинные преобразования образуют подгруппу.*

Среди аффинных преобразований движения выделяются тем, что они могут быть заданы переходом от одной прямоугольной системы координат к другой, тоже прямоугольной и имеющей тот же масштаб. Обратное преобразование к движению есть движение, и произведение двух движений есть движение. Так как тождественное преобразование есть частный случай движения, то (в полной аналогии с теоремой 1) имеет место и

Теорема 1′. *В группе всех аффинных преобразований движения образуют подгруппу.*

Продолжаем перечисление простейших свойств аффинных преобразований и отображений.

Три точки M_1, M_2, M_3 тогда и только тогда коллинеарны (т. е. лежат на одной прямой), когда векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_2M_3}$ коллинеарны. А так как коллинеарность векторов при аффинном преобразовании сохраняется, то сохраняется и коллинеарность точек. Отсюда вытекает:

8° *При аффинном отображении (плоскости или пространства) прямая переходит в прямую.*

Мы сейчас дадим второе доказательство этого факта.

Пусть дано аффинное отображение. Оно состоит в том, что каждая точка M с координатами x, y (в координатной системе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$) переходит в точку M', имеющую те же координаты во второй системе $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$. Отсюда следует:

9° *При данном аффинном отображении (определенном переходом от репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ к реперу $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$) множество всех точек, координаты которых (в координатной системе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$) удовлетворяют некоторому уравнению, переходит в множество точек, координаты которых в системе $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$ удовлетворяют тому же уравнению.*

В частности, прямая с уравнением

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

(в системе Oe_1e_2) перейдет в прямую, имеющую то же уравнение, но только в системе координат $O'e'_1e'_2$.

Точно так же при аффинном преобразовании пространства (определенном переходом от репера $Oe_1e_2e_3$ к реперу $O'e'_1e'_2e'_3$) плоскость, имеющая в системе $Oe_1e_2e_3$ уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2}$$

переходит в плоскость, имеющую то же уравнение (2), но только в системе координат $Oe'_1e'_2e'_3$.

Прямая, заданная в пространстве своим «общим уравнением»

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

или той или иной его специальной разновидностью, например каноническим уравнением

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c},$$

при данном аффинном преобразовании перейдет в прямую, имеющую те же уравнения, но только в системе координат $O'e'_1e'_2e'_3$. Итак, доказана

Теорема 2. *При аффинном преобразовании плоскости, соответственно пространства, прямые переходят в прямые, плоскости переходят в плоскости.*

При этом сохраняется параллельность.

В самом деле, если две прямые (или две плоскости, или прямая и плоскость) параллельны, то их уравнения относительно репера $Oe_1e_2e_3$ удовлетворяют известным условиям параллельности; но образы этих прямых (плоскостей) имеют те же уравнения относительно репера $O'e'_1e'_2e'_3$ и, значит, удовлетворяют тем же условиям параллельности.

Замечание 2. Сохранение параллельности при аффинном преобразовании можно вывести и пользуясь тем, что аффинное преобразование взаимно однозначно.

Действительно, при всяком взаимно однозначном отображении (например, пространства на себя) образ пересечения двух (любых) множеств есть пересечение образов этих множеств.

Значит, два пересекающихся множества при всяком взаимно однозначном отображении переходят в пересекающиеся.

Отсюда следует, что при аффинном преобразовании плоскости две параллельные прямые, а при аффинном отображении пространства две параллельные плоскости переходят в параллельные; сохраняется и свойство параллельности между прямой и плоскостью.

Пусть в пространстве даны две параллельные прямые; они лежат в одной плоскости и не пересекаются. При аффинном преобразовании пространства эти две прямые перейдут в две прямые, также лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся, т. е. в две параллельные прямые.

Теорема 3. *При аффинном преобразовании плоскости (пространства), переводящем прямую d в прямую d', отрезок $\overline{M_0M_1}$ прямой d переходит в отрезок $\overline{M_0'M_1'}$ прямой d', а точка M прямой d, делящая отрезок $\overline{M_0M_1}$ в данном отношении λ, переходит в точку M' прямой d', делящую отрезок $\overline{M_0'M_1'}$ в том же отношении λ* (рис. 144).

Доказательство. Так как при положительном λ мы получаем точки, лежащие внутри отрезка $\overline{M_0M_1}$ (соответственно $\overline{M_0'M_1'}$), а при отрицательном — вне этого отрезка, то из второго утверждения теоремы 3 следует первое. Доказываем второе утверждение теоремы 3, ограничиваясь случаем плоскости. Пусть (в системе координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$) имеем

$$M_0=(x_0,\ y_0),\ M_1=(x_1,\ y_1),$$
$$M=(x,\ y).$$

Так как точка M делит отрезок M_0M_1 в отношении λ, то

$$x=\frac{x_0+\lambda x_1}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_0+\lambda y_1}{1+\lambda} \tag{3}$$

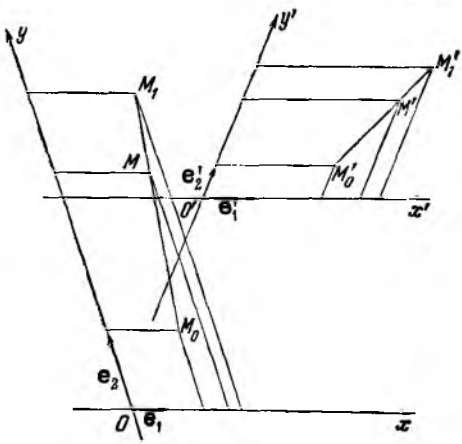


Рис. 144.

(в пространстве к этим равенствам присоединится еще равенство $z=\frac{z_0+\lambda z_1}{1+\lambda}$). При данном аффинном преобразовании точки M_0, M_1, M перейдут в точки M_0', M_1', M' с теми же координатами, что и у точек M_0, M_1, M, но только в координатной системе $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$. Эти координаты связаны по-прежнему соотношениями (3), из которых следует, что M' делит отрезок $\overrightarrow{M_0'M_1'}$ в отношении λ. Этим теорема 3 доказана.

Пусть при аффинном преобразовании $\mathcal{A}$ пространства плоскость π отображается на плоскость π'. Возьмем в плоскости π какой-нибудь репер $o\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, т. е. пару неколлинеарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, приложенных к какой-нибудь точке o (рис. 145). При преобразовании $\mathcal{A}$ точка o плоскости π перейдет в точку o' плоскости π', неколлинеарные векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ перейдут в неколлинеарные векторы $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, т. е. репер $o\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ плоскости π перейдет в репер $o'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$ плоскости π'. Всякий лежащий в плоскости π вектор $a=\xi\mathbf{e}_1+\eta\mathbf{e}_2$ при

этом перейдет в лежащий в плоскости π' вектор $\mathbf{u}' = \xi\boldsymbol{\varepsilon}_1' + \eta\boldsymbol{\varepsilon}_2'$ с теми же координатами относительно репера $o'\boldsymbol{\varepsilon}_1'\boldsymbol{\varepsilon}_2'$, какие вектор $\mathbf{u}$ имел относительно репера $o\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2$. Отсюда следует, что и всякая точка M плоскости π перейдет в точку M' плоскости π', имеющую относительно репера $o'\boldsymbol{\varepsilon}_1'\boldsymbol{\varepsilon}_2'$ те же самые координаты, какие точка M имела в плоскости π относительно репера $o\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2$. Другими словами, имеет место

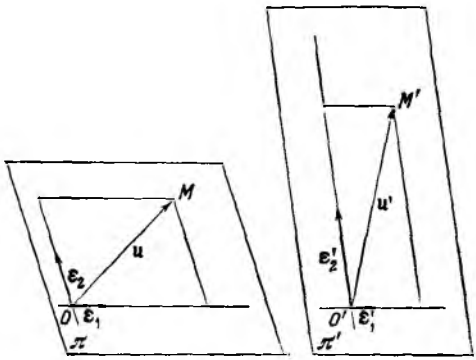


Рис. 145.

Теорема 4. *Пусть при аффинном преобразовании пространства плоскость π переходит в плоскость π'. Тогда преобразование $\mathcal{A}$ отображает произвольный репер $o\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2$ плоскости π на некоторый репер $o'\boldsymbol{\varepsilon}_1'\boldsymbol{\varepsilon}_2'$ плоскости π' и ставит в соответствие каждой точке M плоскости π точку M' плоскости π', имеющую относительно репера $o'\boldsymbol{\varepsilon}_1'\boldsymbol{\varepsilon}_2'$ те самые координаты, которые точка M имела относительно репера $o\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2$. Другими словами: преобразование $\mathcal{A}$ порождает аффинное отображение плоскости π на плоскость π'.*

Докажем в заключение этого параграфа следующее предложение.

Теорема 5. *Существует одно и только одно аффинное преобразование плоскости, переводящее данную тройку неколлинеарных точек*

$$O,\ A,\ B$$

этой плоскости в (произвольную вторую) тройку неколлинеарных точек

$$O',\ A',\ B'$$

той же плоскости.

Аналогично существует одно и только одно аффинное преобразование пространства, переводящее данную четверку некомпланарных точек

$$O,\ A,\ B,\ C$$

в (произвольную) вторую четверку некомпланарных точек

$$O',\ A',\ B',\ C'.$$

Доказательство в обоих случаях, плоскости и пространства, одно и то же. Ограничимся случаем плоскости.

Берем координатную систему с началом O и единичными векторами (рис. 146)

$$\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OA}, \quad \mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OB},$$

а также координатную систему с началом O' и единичными векторами

$$\mathbf{e}'_1 = \overrightarrow{O'A'}, \quad \mathbf{e}'_2 = \overrightarrow{O'B'}.$$

Этим определено аффинное преобразование $\mathcal{A}$, переводящее каждую точку M, имеющую в системе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ координаты x, y, в точку M' с теми же координатами, но в системе $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$. В частности, точка

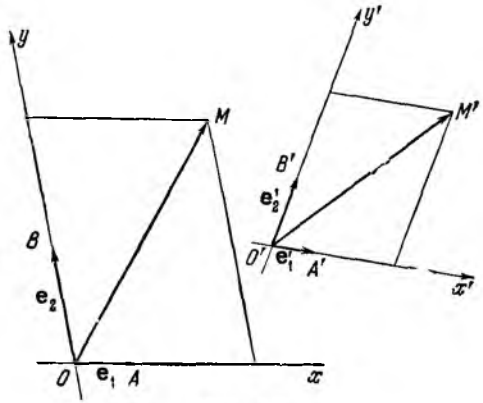


Рис. 146.

$O = (0, 0)$ перейдет в O', точка $A = (1, 0)$ — в точку A', точка B — в точку B', а векторы $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OB}$ перейдут соответственно в $\mathbf{e}'_1 = \overrightarrow{O'A'}$, $\mathbf{e}'_2 = \overrightarrow{O'B'}$.

Таким образом, преобразование $\mathcal{A}$ удовлетворяет требованиям теоремы. Оно есть единственное аффинное преобразование, удовлетворяющее этим требованиям. В самом деле, всякое аффинное преобразование, переводящее точки O, A, B соответственно в O', A', B', переводит векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ соответственно в $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, значит, совпадает с преобразованием $\mathcal{A}$.

§ 3. Аналитическое выражение аффинных преобразований

Пусть аффинное преобразование плоскости задается переходом от репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ к реперу $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$.

Покажем, как вычислить в исходной системе координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ координаты преобразованной точки M' по координатам данной точки M (рис. 147).

Векторы $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ даны своими координатами относительно старого репера:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{21}\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_2' &= c_{12}\mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2, \end{aligned}\right| \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Кроме того, известны координаты a, b нового начала O'. Тогда координаты x', y' любой точки M' относительно старого репера связаны с координатами ξ', η' той же точки M' относительно нового репера соотношениями

$$\left.\begin{aligned} x' &= c_{11}\xi' + c_{12}\eta' + a, \\ y' &= c_{21}\xi' + c_{22}\eta' + b. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

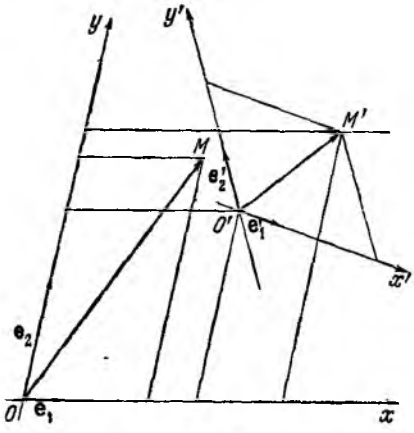


Рис. 147.

Нам даны: произвольная точка M с координатами x и y относительно старого репера и ее образ M', имеющий относительно нового репера те же координаты x, y, которые точка M имела относительно старого репера. Требуется найти координаты точки M' относительно старого репера. Решение этой задачи дается формулами (2), в которые вместо ξ', η' надо подставить координаты точки M' в новой системе, т. е. x и y; тогда в левой части будут искомые координаты x', y' точки M' (в старой системе), и мы получим

$$\left.\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + a, \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + b, \end{aligned}\right| \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

Это и есть формулы, дающие координаты преобразованной точки M' по координатам точки M (те и другие координаты берутся при этом относительно одного и того же «старого» репера [1]).

Обратно, если дана невырождающаяся матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

[1]) Сравнивая эти формулы с формулами (4_2) § 1 главы VIII (и помня значения коэффициентов c_{ik}), видим, что формулы (3) тождественны с формулами преобразования координат, т. е. с формулами, выражающими координаты какой-либо точки M плоскости в старой координатной системе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ через координаты той же точки в новой системе $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$.

и два числа a, b, то, ставя в соответствие каждой точке $M=(x, y)$ точку $M'=(x', y')$, где x' и y' определены по формулам (3), мы получим аффинное преобразование плоскости — оно определено переходом от исходного репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ к реперу $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$, где $O'=(a, b)$,

$$\mathbf{e}'_1=c_{11}\mathbf{e}_1+c_{21}\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{e}'_2=c_{12}\mathbf{e}_1+c_{22}\mathbf{e}_2.$$

Итак, *мы можем определить аффинное преобразование плоскости как такое преобразование, которое ставит в соответствие каждой точке $M=(x, y)$ точку $M'=(x', y')$, координаты x', y' которой находятся из координат x, y точки M по формулам* (3); *система координат — одна и та же. Аффинное преобразование вполне определяется системой координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, матрицей коэффициентов C и числами a, b в формулах* (3).

Так же доказывается и аналогичный результат для пространства:

Аффинное преобразование пространства вполне определено, если в пространстве даны аффинная система координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, невырождающаяся матрица

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

называемая матрицей аффинного преобразования, и три числа a, b, c; определенное этими данными преобразование состоит в том, что каждой точке $M=(x, y, z)$ ставится в соответствие точка $M'=(x', y', z')$, где

$$\left.\begin{aligned} x' &= c_{11}x+c_{12}y+c_{13}z+a, \\ y' &= c_{21}x+c_{22}y+c_{23}z+b, \\ z' &= c_{31}x+c_{32}y+c_{33}z+c. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Система координат — одна и та же.

Замечание 1. Матрица аффинного преобразования, очевидно, является транспонированной к матрице перехода от исходного репера к реперу, задающему данное аффинное преобразование. Поэтому аффинное преобразование будет собственным или несобственным в зависимости от того, имеет ли матрица этого преобразования положительный или отрицательный детерминант.

Среди всех вообще аффинных преобразований их частный случай — движения выделяются тем, что и первоначальный исходный репер $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ (соответственно $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$), и новый репер $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$ (соответственно $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$) предполагаются прямоугольными с одним и тем же масштабом, так что матрица перехода от одного репера к другому, а значит, и матрица C самого преобразования являются ортогональными.

Итак, движение плоскости (пространства) полностью определено по формулам (3), соответственно (4), если даны исходная прямоугольная система координат, ортогональная матрица C и числа a, b, (c).

В случае плоскости имеем формулы [1]):

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + a,\\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \end{aligned}\right\}\ \text{для собственных движений,} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + a,\\ y' &= x\sin\alpha - y\cos\alpha + b \end{aligned}\right\}\ \text{для несобственных движений.} \qquad (5')$$

Если аффинное преобразование (в частности, движение) задано равенствами (4), то соответствующее преобразование многообразия всех векторов задается однородными формулами, получающимися из формул (4) вычеркиванием в их правых частях свободных членов a, b, c. Другими словами, вектор $\mathbf{u} = \{x, y, z\}$ переходит при преобразовании (4) в вектор $\mathbf{u}' = \{x', y', z'\}$, где

$$\left.\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z,\\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z,\\ z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Для доказательства этого утверждения достаточно приложить вектор $\mathbf{u}$ к началу координат O так, что $\mathbf{u} = \overrightarrow{OM}$, где $M = (x, y, z)$; тогда $\mathbf{u}' = \overrightarrow{O'M'}$, где координаты точки M' даются формулами (4) и $O' = (a, b, c)$. Вычитая из координат точки M' координаты точки O', мы получим для координат вектора $\overrightarrow{O'M'}$ формулы (6).

Аналогичное утверждение имеет место и для плоскости.

§ 4. Сохранение отношений площадей и объемов при аффинных преобразованиях

Выведем из только что доказанного одно важное следствие (сначала для плоскости).

Пусть на плоскости с выбранной на ней прямоугольной системой координат даны два вектора: $\mathbf{u}_1 = \{x_1, y_1\}$, $\mathbf{u}_2 = \{x_2, y_2\}$. Мы знаем (гл. VII, § 1), что площадь ориентированного параллелограмма, натянутого на эти векторы, есть

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

[1]) См. гл. VIII, § 3, теорема 4 и замечание к ней.

При аффинном преобразовании $\mathscr{C}$ плоскости с матрицей C векторы $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ переходят соответственно в $\mathbf{u}_1' = \{x_1', y_1'\}$, $\mathbf{u}_2' = \{x_2', y_2'\}$, где имеем

$$\begin{aligned} x_h' &= c_{11}x_h + c_{12}y_h, \\ y_h' &= c_{21}x_h + c_{22}y_h \end{aligned} \qquad (h = 1,\ 2),$$

так что

$$\langle \mathbf{u}_1',\ \mathbf{u}_2' \rangle = \begin{vmatrix} c_{11}x_1 + c_{12}y_1 & c_{21}x_1 + c_{22}y_1 \\ c_{11}x_2 + c_{12}y_2 & c_{21}x_2 + c_{22}y_2 \end{vmatrix}.$$

Но справа стоит (см. гл. VII, § 10) произведение детерминантов

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

так что

$$\langle \mathbf{u}_1',\ \mathbf{u}_2' \rangle = \det C \cdot \langle \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2 \rangle.$$

Пусть в пространстве дана прямоугольная система координат. Тогда для любых трех векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ и аффинного преобразования $\mathscr{C}$, переводящего эти векторы соответственно в $\mathbf{u}_1'$, $\mathbf{u}_2'$, $\mathbf{u}_3'$, доказывается формула

$$\langle \mathbf{u}_1',\ \mathbf{u}_2',\ \mathbf{u}_3' \rangle = \det C \cdot \langle \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3 \rangle.$$

Итак, имеет место

Теорема 6. *При аффинном преобразовании плоскости (соответственно пространства) площадь ориентированного параллелограмма, построенного (в данной плоскости) на двух каких-либо векторах (соответственно объем ориентированного параллелепипеда, построенного на трех векторах), умножается на детерминант преобразования.*

Следствие. *При аффинном преобразовании плоскости (соответственно пространства) отношение площадей параллелограммов (соответственно объемов параллелепипедов) сохраняется.*

Уже из элементарной геометрии известно, что площади любых многоугольников посредством триангуляции, т. е. разбиения этих фигур на треугольники, сводятся к площадям треугольников, и, следовательно, параллелограммов. В интегральном исчислении показывается, что посредством предельного перехода площади и объемы любых фигур сводятся к элементарным, т. е. в конечном счете к площади параллелограмма, соответственно к объему параллелепипеда. Поэтому *при аффинном преобразовании площади и объемы любых фигур умножаются на детерминант преобразования, а отношения площадей (объемов) сохраняются.*

§ 5. Получение собственных аффинных преобразований посредством деформации тождественного преобразования. Следствия

Предположим, что аффинное преобразование является собственным, т. е. задается переходом от исходного репера Oe_1e_2 к одноименному с ним реперу $O'e_1'e_2'$ [1]). Репер Oe_1e_2 переходит в репер $O'e_1'e_2'$ посредством непрерывной деформации. Это значит, что для переменного t, пробегающего некоторый отрезок числовой прямой, например отрезок $0 \leqslant t \leqslant 1$, имеем репер $O^{(t)}e_1^{(t)}e_2^{(t)}$, непрерывно зависящий от t в том смысле, что коэффициенты матрицы перехода от базиса e_1, e_2 к базису $e_1^{(t)}$, $e_2^{(t)}$ и координаты точки $O^{(t)}$ суть непрерывные функции от t, причем при $t=0$ репер $O^{(t)}e_1^{(t)}e_2^{(t)}$ совпадает с Oe_1e_2, а при $t=1$ — с $O'e_1'e_2'$. Обозначим через $\mathscr{C}^{(t)}$ аффинное преобразование, заданное переходом от репера Oe_1e_2 к реперу $O^{(t)}e_1^{(t)}e_2^{(t)}$. Оно записывается (в исходной системе координат Oe_1e_2) в виде

$$\left.\begin{aligned} x^{(t)} &= c_{11}^{(t)}x + c_{12}^{(t)}y + c_1^{(t)}, \\ y^{(t)} &= c_{21}^{(t)}x + c_{22}^{(t)}y + c_2^{(t)} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

и ставит в соответствие каждой точке $M=(x, y)$ точку $M^{(t)}=(x^{(t)}, y^{(t)})$. При этом для $t=0$ имеем тождественное преобразование, а при $t=1$ имеем данное преобразование $\mathscr{C}$; коэффициенты $c_{ik}^{(t)}$, $c_1^{(t)}$, $c_2^{(t)}$ суть непрерывные функции от t на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$. Это положение вещей выражают, говоря, что всякое собственное аффинное преобразование получается непрерывным видоизменением (непрерывной деформацией) тождественного преобразования — совершенно в том же смысле, в котором мы говорили, что всякий репер $O'e_1'e_2'$, одноименный с исходным репером Oe_1e_2, получается из него непрерывной деформацией. Так как разноименные реперы не могут быть переведены друг в друга непрерывной деформацией, то несобственные аффинные преобразования не могут быть получены из тождественного преобразования его непрерывной деформацией [2]).

Полученная только что характеристика собственных аффинных преобразований как аффинных преобразований, получающихся из тождественного преобразования непрерывной деформацией, не зависит от выбора исходной системы координат.

В самом деле, возьмем за исходный репер какой-нибудь репер $\tilde{O}\tilde{e}_1\tilde{e}_2$ и напишем формулы, выражающие координаты x, y какой-нибудь точки

---

[1]) Мы снова ограничиваемся преобразованиями плоскости; случай пространства трактуется точно так же.

[2]) Частный случай этого предложения, относящийся к собственным и несобственным движениям, уже был упомянут на стр. 260 (замечание 1).

относительно репера Oe_1e_2 через координаты той же точки относительно репера $\tilde{O}\tilde{e}_1\tilde{e}_2$:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_{11}\tilde{x} + \alpha_{12}\tilde{y} + \alpha, \\ y &= \alpha_{21}\tilde{x} + \alpha_{22}\tilde{y} + \beta, \end{aligned}\right| \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Подставив в формулы (1) эти выражения для x, y и аналогичные для $x^{(t)}$, $y^{(t)}$, получим

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}\tilde{x}^{(t)} + \alpha_{12}\tilde{y}^{(t)} + \alpha &= c_{11}^{(t)}(\alpha_{11}\tilde{x} + \alpha_{12}\tilde{y} + \alpha) + c_{12}^{(t)}(\alpha_{21}\tilde{x} + \alpha_{22}\tilde{y} + \beta) + c_1^{(t)}, \\ \alpha_{21}\tilde{x}^{(t)} + \alpha_{22}\tilde{y}^{(t)} + \beta &= c_{21}^{(t)}(\alpha_{11}\tilde{x} + \alpha_{12}\tilde{y} + \alpha) + c_{22}^{(t)}(\alpha_{21}\tilde{x} + \alpha_{22}\tilde{y} + \beta) + c_2^{(t)}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Эту систему уравнений можно решить относительно $\tilde{x}^{(t)}$, $\tilde{y}^{(t)}$ по правилу Крамера и получить запись

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}^{(t)} &= \tilde{c}_{11}^{(t)}\tilde{x} + \tilde{c}_{12}^{(t)}\tilde{y} + \tilde{c}_1^{(t)}, \\ \tilde{y}^{(t)} &= \tilde{c}_{21}^{(t)}\tilde{x} + \tilde{c}_{22}^{(t)}\tilde{y} + \tilde{c}_2^{(t)} \end{aligned}\right\}$$

преобразования $\mathscr{C}^{(t)}$ уже в координатной системе $\tilde{O}\tilde{e}_1\tilde{e}_2$. Здесь величины $\tilde{c}_{ik}^{(t)}$ $(i, k = 1, 2)$, $\tilde{c}_1^{(t)}$, $\tilde{c}_2^{(t)}$ суть линейные комбинации величин $c_{11}^{(t)}$, $c_{12}^{(t)}$, $c_{21}^{(t)}$, $c_{22}^{(t)}$, $c_1^{(t)}$, $c_2^{(t)}$ с постоянными коэффициентами (выражающимися через α_{ik}, α, β) и поэтому, так же как и $c_{ik}^{(t)}$, являются непрерывными функциями от t.

Итак, свойство семейства преобразований $\mathscr{C}^{(t)}$ осуществлять непрерывную деформацию тождественного преобразования в преобразование $\mathscr{C}$ не зависит от выбора системы координат.

Из доказанного вытекает

Теорема 7. *Во всякой аффинной системе координат собственные аффинные преобразования имеют матрицу с положительным детерминантом, а несобственные — с отрицательным.*

Замечание. Детерминант матрицы аффинного преобразования (относительно данного репера) называют кратко *детерминантом преобразования* (относительно этого репера), а знак этого детерминанта — *знаком аффинного преобразования*. Так как этот знак не зависит от репера, относительно которого берется матрица данного аффинного преобразования, то собственные аффинные преобразования иногда называются *положительными*, а несобственные — *отрицательными*.

При перемножении аффинных отображений их матрицы и детерминанты перемножаются, поэтому произведение двух собственных аффинных преобразований есть собственное преобразование. По той же причине преобразование, обратное к собственному, есть собственное. Так как тождественное преобразование является собственным, то:

Теорема 8. *Собственные аффинные преобразования образуют группу (подгруппу группы всех аффинных преобразований).*

Группу образуют и собственные движения.

Очевидно, имеет место и

Теорема 9. *Группа собственных движений является в группе всех аффинных преобразований пересечением подгруппы всех движений с подгруппой собственных аффинных преобразований.*

§ 6. Движения как изометрические преобразования

Пусть $\mathcal{A}$ — преобразование плоскости (пространства), образ произвольной точки M при преобразовании $\mathcal{A}$ будем обозначать через M'.

Образом направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ при преобразовании $\mathcal{A}$ будем считать направленный отрезок $\overrightarrow{A'B'}$.

Преобразование $\mathcal{A}$ называется *изометрическим*, если для любых точек M_1, M_2 расстояние между M_1' и M_2' равно расстоянию между M_1 и M_2:

$$\rho(M_1', M_2') = \rho(M_1, M_2).$$

Мы знаем, что всякое движение есть изометрическое преобразование; в этом параграфе мы докажем обратное предложение.

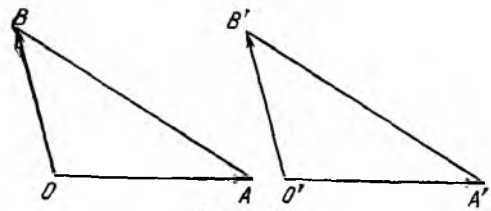


Рис. 148.

Теорема 10. *Всякое изометрическое преобразование (плоскости или пространства) есть движение.*

В основе доказательства лежит

Лемма. *Пусть $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ — два вектора, приложенные к одной и той же точке O* (рис. 148), *а $\overrightarrow{O'A'}$, $\overrightarrow{O'B'}$ — их образы при данном изометрическом преобразовании; тогда скалярные произведения $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ и $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$ равны*[1]).

Доказательство леммы. Имеем

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}.$$

Так как равны векторы, то равны и их скалярные квадраты:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) =$$
$$= (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO}) + 2(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB}),$$

т. е.

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AO}|^2 + 2(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OB}) + |\overrightarrow{OB}|^2,$$

[1]) Мы пока еще не знаем, что при изометрическом преобразовании равные векторы переходят в равные, поэтому нам приходится принимать во внимание точку приложения каждого вектора.

или, помня, что $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{OA}|$ и $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$,

$$2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2. \quad (1)$$

Эта формула верна для любых трех точек O, A, B, так что имеем

$$2(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}) = |\overrightarrow{O'A'}|^2 + |\overrightarrow{O'B'}|^2 - |\overrightarrow{A'B'}|^2. \quad (1')$$

Но правые части равенств (1) и (1′) равны (так как наше преобразование изометрично), поэтому равны и левые части, т. е.

$$(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}), \quad (2)$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{OC}$, — какой-нибудь прямоугольный репер (рис. 149). При нашем изометрическом

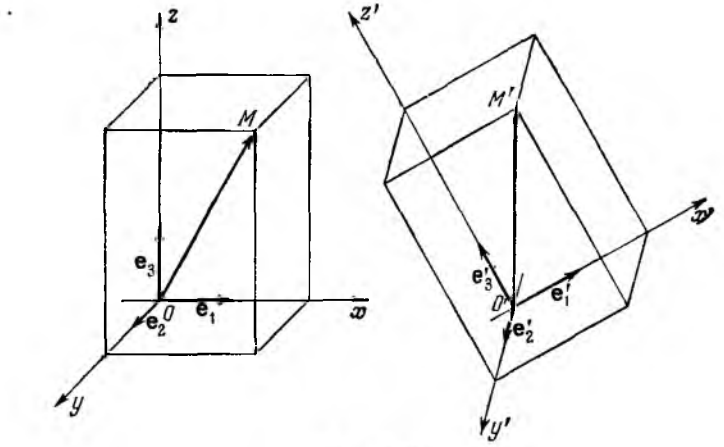


Рис. 149.

отображении точка O переходит в O', а орты $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ переходят соответственно в орты $\overrightarrow{O'A'}$, $\overrightarrow{O'B'}$, $\overrightarrow{O'C'}$; орты $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ попарно перпендикулярны, т. е. их попарные скалярные произведения равны нулю; то же, по лемме, будет иметь место и для ортов $\overrightarrow{O'A'}$, $\overrightarrow{O'B'}$, $\overrightarrow{O'C'}$. Итак, прямоугольный репер $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ переходит при нашем преобразовании в прямоугольный репер $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$, где $\mathbf{e}'_1 = \overrightarrow{O'A'}$, $\mathbf{e}'_2 = \overrightarrow{O'B'}$, $\mathbf{e}'_3 = \overrightarrow{O'C'}$. Координаты x, y, z произвольной точки M в координатной системе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ суть скалярные

произведения

$$x=(\overrightarrow{OM},\ \overrightarrow{OA}),\quad y=(\overrightarrow{OM},\ \overrightarrow{OB}),\quad z=(\overrightarrow{OM},\ \overrightarrow{OC}).$$

Координаты точки M' в системе $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ суть скалярные произведения

$$x'=(\overrightarrow{O'M'},\ \overrightarrow{O'A'}),\quad y'=(\overrightarrow{O'M'},\ \overrightarrow{O'B'}),\quad z'=(\overrightarrow{O'M'},\ \overrightarrow{O'C'}).$$

Поэтому в силу леммы

$$x'=x,\quad y'=y,\quad z'=z,$$

т. е. точка M' — образ точки M при преобразовании $\mathcal{A}$ — имеет в новой прямоугольной координатной системе $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ те же координаты, которые точка M имела в старой; а это и значит, что наше преобразование есть движение.

Итак, изометрические отображения и движения (плоскости и пространства) — это одно и то же.

§ 7. Преобразования подобия

1. Определение преобразования подобия. Непосредственным обобщением движений являются преобразования подобия. Преобразование $\mathcal{A}$ называется *преобразованием подобия*, если для этого преобразования существует такое положительное число k — «*коэффициент подобия*», что каковы бы ни были две точки M_1 и M_2, всегда

$$\rho(M'_1,M'_2)=k\rho(M_1,M_2). \tag{1}$$

При этом, как всегда, через M' обозначаем образ точки M. Если $k=1$, то получаем изометрические преобразования, т. е. движения, являющиеся, таким образом, частным случаем преобразований подобия.

Замечание 1. Легко видеть, что преобразования подобия образуют группу — подгруппу в группе всех преобразований (плоскости, соответственно пространства).

2. Равномерное растяжение (гомотетия). Сначала рассмотрим простейшие преобразования подобия, так называемые *равномерные растяжения*, или *гомотетические преобразования* (*гомотетии*). *Растяжением пространства* (*плоскости*) *с центром* O *и коэффициентом растяжения* k называется преобразование $\mathcal{A}$, состоящее в следующем:

1° Точка O остается неподвижной.

2° Всякая точка $M\neq O$ переходит в точку M', лежащую на луче $\overrightarrow{OM}$ и определяемую на нем условием $|\overrightarrow{OM'}|=k|\overrightarrow{OM}|$.

Таким образом, название «растяжение» соответствует наглядной картине преобразования лишь при $k > 1$; при $k < 1$ наше «растяжение» в действительности оказывается сжатием.

Замечание 2. Так как векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM'}$ лежат на одной и той же полупрямой, исходящей из точки O, то они имеют одно и то же направление. Поэтому из равенства $|\overrightarrow{OM'}| = k \cdot |\overrightarrow{OM}|$ следует и $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$.

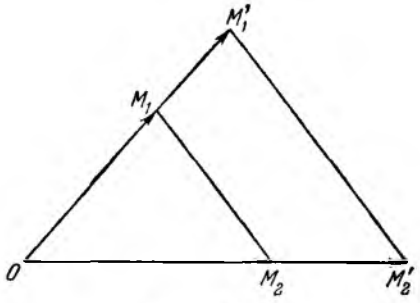


Рис. 150.

Докажем, что всякое растяжение является преобразованием подобия. В самом деле, пусть при растяжении с центром O и коэффициентом k точки M_1 и M_2 переходят соответственно в точки M_1' и M_2' (рис. 150). Тогда $\overrightarrow{OM_1'} = k \cdot \overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2'} = k \cdot \overrightarrow{OM_2}$. Треугольники OM_1M_2 и $OM_1'M_2'$ подобны, и, значит, $\rho(M_1', M_2') = k\rho(M_1, M_2)$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что растяжение с центром O и коэффициентом k есть аффинное преобразование. Можно ограничиться случаем плоскости.

Возьмем произвольный координатный репер Oe_1e_2 с началом в центре данного растяжения (рис. 151). Пусть $M = (x, y)$ — произвольная точка плоскости, $M' = (x', y')$ — ее образ при данном растяжении (координаты относительно репера Oe_1e_2). Тогда имеем равенство $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$, эквивалентное системе равенств

$$\left.\begin{aligned} x' &= kx, \\ y' &= ky, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

доказывающей наше утверждение.

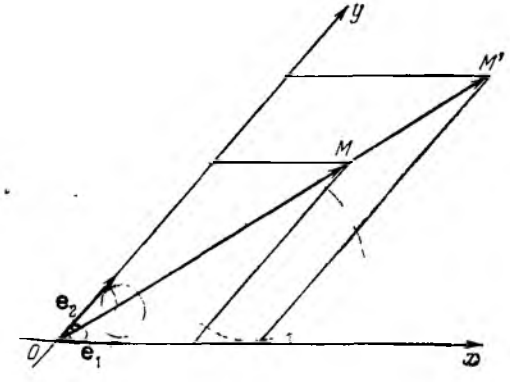


Рис. 151.

Обратно, если в какой-нибудь аффинной координатной системе Oe_1e_2 преобразование $\mathcal{A}$ записывается в виде (2), то оно есть растяжение с центром O и коэффициентом растяжения k. В самом деле, преоб-

разование $\mathcal{A}$, оставляя точку O на месте, переводит всякий вектор $\overrightarrow{OM} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ в вектор $\overrightarrow{OM'} = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 = k \cdot \overrightarrow{OM}$, откуда и следует утверждение.

Итак, растяжение плоскости с центром O и коэффициентом k может быть определено как аффинное преобразование, которое в какой-нибудь, и тогда непременно во всякой, аффинной системе координат с началом O записывается в виде (2).

Замечание 3. Мы всегда в качестве исходной системы координат Oe_1e_2 можем выбрать прямоугольную систему.

Совершенно аналогичный результат имеет место и для пространства.

Замечание 4. Все растяжения с данным центром образуют группу — подгруппу группы аффинных преобразований (плоскости, соответственно пространства).

3. Представление преобразования подобия в виде произведения растяжения и движения. Из сказанного до сих пор еще не ясно, является ли всякое преобразование подобия аффинным преобразованием. Положительный ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме, которая и представляет собою основной результат этого параграфа.

Теорема 11. *Всякое преобразование подобия $\mathcal{S}$ с коэффициентом подобия k есть аффинное преобразование, а именно произведение растяжения $\mathcal{S}_0$ с тем же коэффициентом k и произвольным центром O на некоторое собственное или несобственное движение $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть Q есть растяжение с произвольным центром O и коэффициентом $\frac{1}{k}$. При преобразовании $\mathcal{S}$ длина каждого отрезка умножается на k, а при преобразовании Q она умножается на $\frac{1}{k}$; поэтому, если сделать сначала преобразование Q, а потом преобразование $\mathcal{S}$, то получим преобразование $\mathcal{S}Q$, при котором длина каждого отрезка остается неизменной. Другими словами, преобразование $\mathcal{S}Q = \mathcal{A}$ есть изометрическое преобразование, т. е. движение, собственное или несобственное.

Преобразование Q^{-1}, обратное к преобразованию Q, есть, очевидно, растяжение с центром O и коэффициентом k.

Сделаем теперь сначала преобразование Q^{-1}, а затем преобразование $\mathcal{A}$, т. е. рассмотрим произведение этих преобразований; получим $\mathcal{A}Q^{-1} = \mathcal{S}QQ^{-1} = \mathcal{S}$. Итак, наше преобразование $\mathcal{S}$ представлено в виде произведения преобразования Q^{-1}, т. е. растяжения с коэффициентом k и произвольным центром O, на движение $\mathcal{A}$. Так как и Q^{-1}, и $\mathcal{A}$ суть аффинные преобразования, то аффинным преобразованием является и их произведение $\mathcal{S}$. Теорема 11 доказана.

Как всякое аффинное преобразование, преобразование подобия $\mathcal{S}$ может быть собственным или несобственным. Так как в представлении

$$\mathcal{S} = \mathcal{A}Q^{-1} \tag{3}$$

преобразование Q^{-1} (растяжение) собственное, то движение $\mathcal{A}$ будет собственным или несобственным в зависимости от того, будет ли собственным или несобственным данное преобразование подобия $\mathcal{S}$.

§ 8. Классификация движений прямой и плоскости [1])

1. Движения прямой. Пусть на прямой дана система координат $O\mathbf{e}_1$. Всякая другая система координат на этой прямой, имеющая тот же масштаб, либо имеет вид $O'\mathbf{e}_1$ (рис. 152) (т. е. отличается

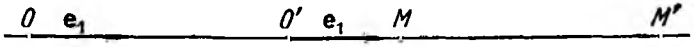


Рис. 152

от системы $O\mathbf{e}_1$ лишь своим началом O'), либо имеет вид $O'(-\mathbf{e}_1)$ (рис. 153) (т. е. отличается от $O\mathbf{e}_1$ началом и направлением). Системы $O\mathbf{e}_1$ и $O'\mathbf{e}_1$ одноименны; системы $O\mathbf{e}_1$ и $O'(-\mathbf{e}_1)$ разноименны.

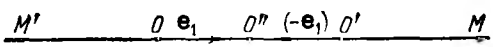


Рис. 153.

Переход от $O\mathbf{e}_1$ к $O'\mathbf{e}_1$ порождает преобразование прямой, при котором всякая точка M, имеющая в системе $O\mathbf{e}_1$ координату x, переходит в точку M', имеющую в той же системе координату

$$x' = x + a, \tag{I}$$

где a есть координата точки O' в системе $O\mathbf{e}_1$. Полученное преобразование есть, очевидно, сдвиг прямой на вектор $\overrightarrow{OO'}$.

Переход от системы $O\mathbf{e}_1$ к системе $O'(-\mathbf{e}_1)$ порождает преобразование

$$x' = -x + a. \tag{II}$$

Но это преобразование $\left(\text{оставляя неподвижной точку } O'' = \frac{a}{2}\right)$

[1]) Имеются в виду движения прямой и плоскости, определенные как (изометрические) преобразования (т. е. отображения прямой, соответственно плоскости, на себя).

может быть записано в виде

$$x' - \frac{a}{2} = -\left(x - \frac{a}{2}\right). \qquad (II')$$

Если перенести начало координат в точку O'', т. е. сделать преобразование координат

$$x = \xi + \frac{a}{2},$$

то преобразование (II) примет вид

$$\xi' = -\xi, \qquad (III)$$

откуда видно, что оно является отражением (симметрией) прямой относительно точки O''.

Итак, доказана

Теорема 12. *Всякое движение прямой является либо сдвигом (всех точек прямой на один и тот же вектор $\mathbf{u}_0 = \{a\}$, лежащий на этой прямой), либо отражением прямой (симметрией) относительно некоторой точки этой прямой.*

Сдвиги называются *собственными*, а отражения — *несобственными движениями* прямой; для того чтобы физически осуществить отражение прямой относительно какой-нибудь ее точки, надо повернуть ее вокруг этой точки на угол π в какой-нибудь плоскости, содержащей нашу прямую, т. е. выйти за пределы самой прямой.

2. Движения плоскости. В предположении прямоугольной системы координат каждое движение плоскости записывается в виде [1])

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + b, \end{aligned}\right\} \text{ если движение собственное,} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + a, \\ y' &= x\sin\alpha - y\cos\alpha + b \end{aligned}\right\} \text{ если движение несобственное.} \qquad (2)$$

1° Рассмотрим сначала собственные движения (1) и выясним прежде всего, когда имеется точка, остающаяся при данном движении неподвижной. Для такой точки $M = (x, y)$ имеем

$$\left.\begin{aligned} x\cos\alpha - y\sin\alpha + a &= x, \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha + b &= y, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} (\cos\alpha - 1)\,x - \sin\alpha \cdot y &= -a, \\ \sin\alpha \cdot x + (\cos\alpha - 1)\,y &= -b. \end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

[1]) См. § 3.

Детерминант этой системы уравнений есть

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - 1 & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - 1 \end{vmatrix} = (\cos\alpha - 1)^2 + \sin^2\alpha.$$

Он равен нулю, лишь когда одновременно

$$\cos\alpha = 1, \quad \sin\alpha = 0;$$

тогда формулы (1) превращаются в

$$x' = x + a,$$
$$y' = y + b$$

— движение является сдвигом плоскости на вектор $\mathbf{u}_0 = \{a, b\}$.

Во всех остальных случаях детерминант системы (3′) положителен и эта система уравнений имеет единственное решение x_0, y_0 — при рассматриваемом (собственном) движении имеется единственная неподвижная точка $O' = (x_0, y_0)$. Перенесем начало координат в эту точку O', т. е. сделаем преобразование координат

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi + x_0, \\ y &= \eta + y_0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

В этой новой системе координат формулы (1) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha, \\ \eta' &= \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В самом деле, коэффициенты при переменных в формулах аффинного преобразования не зависят от положения начала координат, а свободные члены обратятся в нуль, так как образом начала O' является сама эта точка.

Мы видим, что рассматриваемое движение есть поворот плоскости на угол α вокруг точки O'.

Мы доказали следующее предложение.

Теорема 13. *Всякое собственное движение плоскости есть или сдвиг плоскости на некоторый вектор* $\mathbf{u}_0 = \{a, b\}$, *или поворот вокруг некоторой точки* O' *на некоторый угол* α. *В частности, всякое собственное движение, оставляющее неподвижной какую-нибудь точку, есть поворот плоскости вокруг этой точки.*

Из сказанного ясно, что среди всех собственных движений сдвиги характеризуются каждым из следующих свойств:

(а) *При сдвиге* (не являющемся тождественным преобразованием) *ни одна точка не остается неподвижной.*

(б) *При сдвиге каждый* (*свободный*) *вектор является инвариантным* (т. е. переходит в самого себя)[1].

[1]) Каждый приложенный вектор $\overrightarrow{AB}$ переходит в равный ему вектор $\overrightarrow{A'B'}$.

С другой стороны, повороты (не являющиеся тождественным преобразованием) характеризуются каждым из следующих свойств:

(а′) *Имеется единственная неподвижная точка.*

(б′) *Ни один вектор (кроме нулевого) не является инвариантным.*

2° Пусть теперь дано несобственное движение (2). При этом движении всякий вектор $\mathbf{u}=\{x, y\}$ перейдет в вектор $\mathbf{u}'=\{x', y'\}$, где

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha.$$

Будем искать такие (свободные) векторы $\mathbf{u}=\{x, y\}$, которые при рассматриваемом движении остаются инвариантными, т. е. переходят в себя; это векторы, удовлетворяющие системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha &= x,\\ x\sin\alpha - y\cos\alpha &= y,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} (\cos\alpha - 1)\,x + \sin\alpha\cdot y &= 0,\\ \sin\alpha\cdot x - (\cos\alpha + 1)\,y &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{6′}$$

Детерминант этой системы есть

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -(\cos\alpha + 1)\end{vmatrix} = 0.$$

Но не все его элементы равны нулю, так как не может быть одновременно

$$\cos\alpha - 1 = 0 \quad\text{и}\quad \cos\alpha + 1 = 0.$$

Поэтому имеется одномерное векторное многообразие решений системы (6′), т. е. одномерное многообразие V^1 векторов, остающихся при рассматриваемом движении инвариантными; в частности, имеется ровно два (взаимно противоположных) инвариантных орта.

Один из них обозначим через $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ и сделаем ортом новой прямоугольной координатной системы $O\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2$; начало координат O остается пока прежним. Орт $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, очевидно, не является инвариантным.

Посмотрим, как запишется несобственное движение (2) в новой координатной системе $O\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2$. Для этого заметим, что при этом движении (как при всяком движении) пара взаимно перпендикулярных ортов $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ переходит в пару взаимно перпендикулярных ортов. Но $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ переходит в $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, значит, орт $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ должен перейти или в $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, или в $-\boldsymbol{\varepsilon}_2$. Первое невозможно (так как орт $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ не является инвариантным), значит, при нашем движении (2) орт $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ переходит в $-\boldsymbol{\varepsilon}_2$, а произвольный вектор $\mathbf{u}=\xi\boldsymbol{\varepsilon}_1+\eta\boldsymbol{\varepsilon}_2$ — в вектор $\mathbf{u}'=\xi\boldsymbol{\varepsilon}_1+\eta(-\boldsymbol{\varepsilon}_2)$, т. е. в $\xi\boldsymbol{\varepsilon}_1-\eta\boldsymbol{\varepsilon}_2$. Итак, в координатной системе $O\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2$ движение (2)

записывается в виде

$$\left.\begin{aligned}\xi' &= \xi + \tilde{a},\\ \eta' &= -\eta + \tilde{b}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Перенесем теперь начало координат в точку

$$O' = \left(0, \frac{\tilde{b}}{2}\right), \tag{8}$$

т. е. сделаем преобразование координат [1])

$$\xi = x,$$
$$\eta = y + \frac{\tilde{b}}{2}.$$

Тогда формулы (7), в которых надо положить и $\xi' = x'$, $\eta' = y' + \frac{\tilde{b}}{2}$, перепишутся в виде

$$x' = x + \tilde{a},$$
$$y' + \frac{\tilde{b}}{2} = -y - \frac{\tilde{b}}{2} + \tilde{b},$$

т. е.

$$x' = x + \tilde{a},$$
$$y' = -y.$$

Мы видим, что рассматриваемое нами движение есть отражение относительно оси абсцисс координатной системы $O'\varepsilon_1\varepsilon_2$, соединенное со сдвигом вдоль этой оси (на вектор $\{\tilde{a}, 0\}$); при $\tilde{a} = 0$ этот сдвиг превратится в тождественное преобразование.

Итак:

Теорема 14. *Всякое несобственное движение плоскости есть отражение относительно некоторой прямой d, соединенное со сдвигом плоскости на некоторый вектор, коллинеарный прямой d, который, разумеется, может равняться и нулю. В частности, всякое несобственное движение плоскости, оставляющее неподвижной хотя бы одну точку, есть отражение относительно некоторой прямой (и тогда все точки этой прямой являются неподвижными).*

Таким образом, разобраны все движения плоскости, как собственные, так и несобственные.

Разбор движений пространства мы откладываем до главы XXV.

---

[1]) Мы новые координаты обозначаем снова через x, y, забыв окончательно, что когда-то была начальная система координат Oe_1e_2.

ГЛАВА XII

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА (МНОГООБРАЗИЯ) ЛЮБОГО КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Определение векторного пространства

В главе II, § 7, мы геометрически ввели понятие n-мерного векторного многообразия для $n \leqslant 3$. Затем в § 6 главы VII мы определили для любого n понятие n-мерного арифметического векторного многообразия.

Общее понятие векторного многообразия, или, как мы теперь предпочитаем говорить, векторного пространства, вводится посредством следующего основного определения.

Определение 1. *Векторное пространство* есть множество V произвольных элементов, называемых векторами, удовлетворяющее следующим условиям («*аксиомам векторного пространства*»):

1. Для любых двух векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ определен вектор $\mathbf{u}$, называемый *суммой векторов* $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ и обозначаемый через $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$. При этом для любых двух векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ имеем:

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \quad (\textit{свойство коммутативности сложения}),$$

а для любых трех векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) \quad (\textit{свойство ассоциативности сложения}). \tag{2}$$

2. В множестве V имеется элемент $\mathbf{0}$, называемый *нулевым вектором*, удовлетворяющий для любого вектора $\mathbf{u}$ условию

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}. \tag{3}$$

3. Ко всякому вектору $\mathbf{u}$ имеется единственный вектор $-\mathbf{u}$, называемый *противоположным* вектору $\mathbf{u}$ и удовлетворяющий условию

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \tag{4}$$

4. Для любого вектора $\mathbf{u}$ и любого действительного числа λ определен вектор $\lambda\mathbf{u}$, называемый *произведением вектора* $\mathbf{u}$ на число λ. При этом для любых двух векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ имеем:

$$\lambda(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=\lambda\mathbf{u}_1+\lambda\mathbf{u}_2 \quad (\textit{первая дистрибутивность}); \tag{5}$$

для любого вектора $\mathbf{u}$ и любых двух чисел λ_1 и λ_2 имеем:

$$(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{u}=\lambda_1\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{u} \quad (\textit{вторая дистрибутивность}) \tag{6}$$

и

$$\lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})=(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u} \quad (\text{«}\textit{ассоциативность умножения на число}\text{»}). \tag{7}$$

Наконец,

$$1\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}. \tag{8}$$

Вот и все аксиомы векторного пространства.

Укажем на некоторые их простейшие следствия.

1° *Из того, что вектор* $\mathbf{0}$, *удовлетворяющий условию* $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$ *для любого вектора* $\mathbf{u}$, *существует, вытекает, что он единственный.*

В самом деле, пусть существуют два «нулевых» вектора $\mathbf{0}'$ и $\mathbf{0}''$, так что для любого вектора $\mathbf{u}$ имеем

$$\mathbf{0}'+\mathbf{u}=\mathbf{u}, \qquad \mathbf{0}''+\mathbf{u}=\mathbf{u}.$$

В частности,

$$\mathbf{0}'+\mathbf{0}''=\mathbf{0}'', \qquad \mathbf{0}''+\mathbf{0}'=\mathbf{0}'.$$

В силу коммутативности сложения отсюда вытекает, что $\mathbf{0}'=\mathbf{0}''$, что и требовалось доказать.

2° *Из того, что к каждому вектору* $\mathbf{u}$ *существует противоположный ему вектор* $-\mathbf{u}$, *удовлетворяющий условию* (4), *вытекает, что этот противоположный вектор единствен* [1]).

В самом деле, пусть к данному вектору $\mathbf{u}$ имеются два «противоположных» вектора $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{u}''$, так что

$$\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}, \qquad \mathbf{u}+\mathbf{u}''=\mathbf{0}.$$

Прибавим к обеим частям первого из этих двух равенств по вектору $\mathbf{u}''$. Получим

$$(\mathbf{u}''+\mathbf{u})+\mathbf{u}'=\mathbf{0}+\mathbf{u}''.$$

Но $\mathbf{u}''+\mathbf{u}=\mathbf{0}$, поэтому

$$\mathbf{0}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}+\mathbf{u}'',$$

т. е. $\mathbf{u}'=\mathbf{u}''$.

Замечание 1. Из аксиомы 2 следует, что векторное пространство всегда есть непустое множество векторов. Но состоять

[1]) Свойства 1°, 2° вытекают из того, что векторное пространство есть группа по отношению к сложению.

из одного нулевого вектора $\mathbf{0}$ оно может — это мы знаем уже из последнего параграфа главы II. В этом «нулевом» векторном пространстве действия таковы:

$$\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}, \qquad \lambda\mathbf{0}=\mathbf{0} \text{ при любом } \lambda.$$

Замечание 2. Совокупность аксиом 1, 2, 3 может быть, очевидно, заменена одной аксиомой:

В множестве V определена операция сложения, по отношению к которой это множество является коммутативной группой (см. Прибавление, § 5).

Определим теперь разность двух векторов, полагая

$$\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_1+(-\mathbf{u}_2),$$

так что $\mathbf{u}-\mathbf{u}=\mathbf{0}$ для любого $\mathbf{u}$. Так как для чисел λ_1 и λ_2 всегда $\lambda_1+(-\lambda_2)=\lambda_1-\lambda_2$, то из (6) следует

$$(\lambda_1-\lambda_2)\,\mathbf{u}=\lambda_1\mathbf{u}-\lambda_2\mathbf{u}. \tag{6'}$$

При $\lambda_1=\lambda_2$ отсюда следует

$$0\cdot\mathbf{u}=\mathbf{0} \tag{9}$$

для любого вектора $\mathbf{u}$.

Далее,

$$(-1)\cdot\mathbf{u}=-\mathbf{u} \tag{8'}$$

для любого вектора $\mathbf{u}$.

В самом деле, принимая во внимание (8) и (9), имеем

$$\mathbf{u}+(-1)\cdot\mathbf{u}=1\cdot\mathbf{u}+(-1)\cdot\mathbf{u}=[1+(-1)]\cdot\mathbf{u}=0\cdot\mathbf{u}=\mathbf{0},$$

откуда в силу аксиомы 3 следует (8').

Действия сложения векторов и умножения вектора на число называются кратко *линейными операциями* в данном векторном пространстве.

Из только что изложенного следует, что с векторами, элементами любого векторного пространства, можно оперировать совершенно так же, как с обыкновенными свободными векторами трехмерного пространства. В частности, понятия линейной зависимости и независимости, введенные нами в § 5 главы II, равно как и все доказанные там предложения относительно этих понятий, дословно (вместе с доказательствами) сохраняют свою силу в любом векторном пространстве.

Кроме того, очевидно, арифметическое n-мерное векторное многообразие является частным случаем векторного пространства.

Закончим этот параграф важнейшим понятием изоморфизма между двумя векторными пространствами U и V. Под *изоморфизмом* или *изоморфным соответствием* между пространствами U и V понимается

такое взаимно однозначное соответствие

$$\mathbf{u} \leftrightarrow \mathbf{v}$$

между множествами всех элементов (векторов) одного и другого пространства, которое удовлетворяет следующим двум условиям:

I. Если

$$\mathbf{u}_1 \leftrightarrow \mathbf{v}_1$$

и

$$\mathbf{u}_2 \leftrightarrow \mathbf{v}_2,$$

то и

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \leftrightarrow \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

II. Если

$$\mathbf{u} \leftrightarrow \mathbf{v},$$

то при любом действительном λ имеем

$$\lambda\mathbf{u} \leftrightarrow \lambda\mathbf{v}.$$

Коротко говоря: изоморфизм между двумя векторными пространствами есть взаимно однозначное соответствие между этими пространствами, сохраняющее линейные операции (точный смысл последних слов и означает как раз выполнение условий I и II).

Из условия II следует, в частности, что для любых двух векторов $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{v} \in V$, соответствующих друг другу при данном изоморфизме:

$$\mathbf{u} \leftrightarrow \mathbf{v},$$

будем иметь

$$0 \cdot \mathbf{u} \leftrightarrow 0 \cdot \mathbf{v} \tag{10}$$

и

$$(-1)\,\mathbf{u} \leftrightarrow (-1)\,\mathbf{v}. \tag{11}$$

Так как $0 \cdot \mathbf{u}$ есть нулевой вектор пространства U, а $0 \cdot \mathbf{v}$ — нулевой вектор пространства V, то из (10) следует, что при изоморфном соответствии между двумя векторными пространствами их нулевые векторы соответствуют друг другу.

Так как $(-1)\,\mathbf{u} = -\mathbf{u}$, $(-1)\,\mathbf{v} = -\mathbf{v}$, то из (11) вытекает: если

$$\mathbf{u} \leftrightarrow \mathbf{v},$$

то [1])

$$(-\mathbf{u}) \leftrightarrow (-\mathbf{v}). \tag{12}$$

[1]) Формула (12), равно как и соответствие друг другу нулевых векторов при изоморфизме двух векторных пространств, вытекает из того, что изоморфизм между векторными пространствами является, в частности, и изоморфизмом между теми группами, которыми эти пространства определяются по отношению к операции сложения.

Читатель легко выведет из доказанного следующий общий факт.

Если при данном изоморфизме между векторными пространствами U и V имеем:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &\leftrightarrow \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{u}_2 &\leftrightarrow \mathbf{v}_2, \\ &\ldots \\ \mathbf{u}_m &\leftrightarrow \mathbf{v}_m, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

то при любых действительных числах $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ имеем

$$\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\ldots+\lambda_m\mathbf{u}_m \leftrightarrow \lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\ldots+\lambda_m\mathbf{v}_m. \tag{14}$$

Отсюда в свою очередь легко вытекает, что при изоморфном соответствии между двумя векторными пространствами линейно зависимые системы векторов одного пространства соответствуют линейно зависимым системам другого (и, значит, линейно независимым системам одного пространства соответствуют линейно независимые системы другого).

Замечание 3. В предыдущих рассуждениях ничего бы не изменилось, если бы в аксиоме 4 мы допустили любые комплексные числа λ, т. е. сформулировали бы эту аксиому так: для любого вектора $\mathbf{u}$ и любого комплексного числа λ определен вектор $\lambda\mathbf{u}$ — и далее, как в основном тексте. Это изменение в формулировке аксиомы 4 (с сохранением всех остальных аксиом) привело бы нас к определению *комплексного векторного пространства*. Все результаты этой главы применимы в равной степени и к действительным, и к комплексным векторным пространствам.

§ 2. Размерность. Базис. Координаты

1. Базис. Если в векторном пространстве V имеется хотя бы один отличный от нуля вектор $\mathbf{u}$ (а следовательно, имеются и векторы $\lambda\mathbf{u}$ при любом λ), то в V имеется по крайней мере одна линейно независимая система векторов; такой системой во всяком случае является система, состоящая из одного вектора $\mathbf{u}$.

Предположим теперь, что в данном векторном пространстве V существует линейно независимая система, состоящая из n векторов, и нет никакой линейно независимой системы, состоящей из большего, чем n, числа векторов. Тогда мы говорим, что V есть *n-мерное векторное пространство*, а число n называем его *числом измерений* или *размерностью*. Если такого числа n нет, то векторное пространство называется *бесконечномерным*. В бесконечномерном векторном пространстве существуют линейно независимые системы, состоящие из любого, сколь угодно большого числа векторов.

Бесконечномерные векторные пространства существуют[1]); более того, значение их в современной математике чрезвычайно велико; но изучаются они в функциональном анализе, а не в аналитической геометрии, поэтому мы ими в этих лекциях заниматься не будем.

Определение. Пусть V есть n-мерное векторное пространство. Всякая линейно независимая система, состоящая из n векторов пространства V, называется *базисом* этого пространства.

Теорема 1. *Если* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *— базис векторного пространства* V, *то всякий вектор* $\mathbf{u}$ *этого пространства единственным образом может быть представлен в виде линейной комбинации*

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$$

базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. *Однозначно определенные коэффициенты* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называются координатами вектора* $\mathbf{u}$ *относительно базиса* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Доказательство. Так как в V не существует линейно независимой системы, состоящей из $n+1$ векторов, то система

$$\mathbf{u}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$$

зависима, тогда как $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ — независимая система. Поэтому

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Если бы существовало второе такое представление

$$\mathbf{u} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n,$$

---

[1]) Например, рассмотрим множество всех целых рациональных функций (многочленов) $P = P(x)$ от одного действительного переменного x:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \quad (n \text{ произвольно});$$

мы причисляем к ним и все константы $P(x) = a_0$ (многочлены нулевой степени), в том числе и многочлен, тождественно равный нулю, $P(x) \equiv 0$. При сложении многочленов, а также при умножении многочлена на любое действительное λ получаем снова многочлен; сложение многочленов и умножение их на действительное число удовлетворяют всем аксиомам векторного пространства; нулевым вектором в этом пространстве является многочлен, тождественно равный нулю. Докажем, что векторное пространство всех многочленов бесконечномерно. Действительно, частным случаем многочленов являются и одночлены, например одночлены

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2, \quad \ldots, \quad P_n(x) = x^n,$$

где n — любое натуральное число. Но эти одночлены образуют линейно независимую систему векторов векторного многообразия всех многочленов. В самом деле, пусть какая-нибудь линейная комбинация наших векторов $P_0, P_1, \ldots, P_n$ с коэффициентами $c_0, c_1, \ldots, c_n$ равна нулевому вектору; это значит, что

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$$

есть многочлен, тождественно равный нулю; но тогда все коэффициенты $c_0, \ldots, c_n$ должны равняться нулю. Таким образом, в векторном пространстве всех многочленов можно найти линейно независимую систему, состоящую из любого числа элементов, что и требовалось доказать.

то было бы

$$(x_1-y_1)\,\mathbf{e}_1+(x_2-y_2)\,\mathbf{e}_2+\ldots+(x_n-y_n)\,\mathbf{e}_n=\mathbf{0},$$

откуда, вследствие линейной независимости системы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, вытекает, что $x_1=y_1, \ldots, x_n=y_n$.

Теорема 1 доказана.

Пусть даны два вектора

$$\mathbf{u}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathbf{e}_n$$

и

$$\mathbf{u}'=x_1'\mathbf{e}_1+x_2'\mathbf{e}_2+\ldots+x_n'\mathbf{e}_n.$$

Согласно правилам вычислений с векторами, содержащимся в аксиомах векторного пространства и совпадающим с аналогичными правилами для векторов трехмерного пространства, имеем

$$\mathbf{u}+\mathbf{u}'=(x_1+x_1')\,\mathbf{e}_1+\ldots+(x_n+x_n')\,\mathbf{e}_n,$$

т. е. *при сложении векторов их соответственные координаты складываются.*

Точно так же, если вектор

$$\mathbf{u}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathbf{e}_n$$

умножается на число λ, то получается

$$\lambda\mathbf{u}=\lambda x_1\mathbf{e}_1+\lambda x_2\mathbf{e}_2+\ldots+\lambda x_n\mathbf{e}_n$$

— при умножении вектора на число λ все координаты вектора умножаются на это число.

2. Переход от одного базиса к другому. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$; $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'$ — два базиса векторного пространства U. Обозначим координаты произвольного вектора $\mathbf{u}$ относительно этих базисов соответственно через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $x_1', x_2', \ldots, x_n'$, так что

$$\mathbf{u}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathbf{e}_n, \tag{1}$$

$$\mathbf{u}=x_1'\mathbf{e}_1'+x_2'\mathbf{e}_2'+\ldots+x_n'\mathbf{e}_n'. \tag{1'}$$

Пусть координаты векторов $\mathbf{e}_i'$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ относительно базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ суть соответственно $c_{1i}, c_{2i}, \ldots, c_{ni}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, так что

$$\mathbf{e}_i'=c_{1i}\mathbf{e}_1+c_{2i}\mathbf{e}_2+\ldots+c_{ni}\mathbf{e}_n \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1'), получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{u}=x_1\mathbf{e}_1+\ldots+x_n\mathbf{e}_n=x_1'\mathbf{e}_1'+\ldots+x_n'\mathbf{e}_n'=\\ =x_1'(c_{11}\mathbf{e}_1+c_{21}\mathbf{e}_2+\ldots+c_{n1}\mathbf{e}_n)+\\ +x_2'(c_{12}\mathbf{e}_1+c_{22}\mathbf{e}_2+\ldots+c_{n2}\mathbf{e}_n)+\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +x_n'(c_{1n}\mathbf{e}_1+c_{2n}\mathbf{e}_2+\ldots+c_{nn}\mathbf{e}_n)\end{aligned}$$

или, после приведения подобных членов в правой части,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = (c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + \ldots + c_{1n}x_n')\,\mathbf{e}_1 + \\ + (c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + \ldots + c_{2n}x_n')\,\mathbf{e}_2 + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (c_{n1}x_1' + c_{n2}x_2' + \ldots + c_{nn}x_n')\,\mathbf{e}_n.\end{aligned}$$

Так как координаты $x_1, \ldots, x_n$ вектора $\mathbf{u}$ относительно базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ определены однозначно, то

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + \ldots + c_{1n}x_n', \\ x_2 &= c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + \ldots + c_{2n}x_n', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= c_{n1}x_1' + c_{n2}x_2' + \ldots + c_{nn}x_n'. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Эти формулы — «*формулы преобразования координат*» — выражают координаты $x_1, \ldots, x_n$ произвольного вектора $\mathbf{u}$ относительно базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ через координаты $x_1', \ldots, x_n'$ того же вектора относительно базиса $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n'$; коэффициенты c_{ik} определены формулами (2).

Матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

называется *матрицей преобразования координат* (или *матрицей линейного преобразования* (3)), соответствующего переходу от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'$; матрица этого перехода есть транспонированная матрица C^* к матрице C.

Эти формулы и определения являются непосредственным обобщением тех, которые были рассмотрены в главе VIII для $n = 3$.

§ 3. Теорема об изоморфизме между любыми двумя векториыми пространствами одной и той же конечиой размерности n

Теорема 2. *Для того чтобы два конечномерных векторных пространства были изоморфны между собою, необходимо и достаточно, чтобы они имели одну и ту же размерность.*

Доказательство. Условие необходимо. Из сказанного в конце § 1 об изоморфизме следует: если в одном из двух изоморфных между собою пространств имеется линейно независимая система, состоящая из n векторов, и иет линейно независимой системы, состоящей из большего числа векторов, то то же справедливо и для второго пространства.

Другими словами: два изоморфных между собою пространства имеют одну и ту же размерность.

Условие достаточно. Чтобы убедиться в этом, докажем, что всякое n-мерное векторное пространство U изоморфно n-мерному арифметическому пространству A^n. Пусть $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ — произвольный базис пространства U. Тогда каждый вектор $\mathbf{u} \in U$ однозначно записывается в виде

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n.$$

Ставя в соответствие вектору $\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n \in U$ вектор $\mathbf{v} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in A^n$, мы и получаем искомое изоморфное соответствие между пространствами U и A^n (доказательство непосредственно вытекает из того, что при сложении двух векторов $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{u}' \in U$ их соответственные координаты складываются, а при умножении вектора $\mathbf{u} \in U$ на какое-нибудь число λ на то же λ умножаются и координаты вектора $\mathbf{u}$).

Замечание 1. Так как

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= 1\cdot\mathbf{u}_1 + 0\cdot\mathbf{u}_2 + \ldots + 0\cdot\mathbf{u}_n,\\
\mathbf{u}_2 &= 0\cdot\mathbf{u}_1 + 1\cdot\mathbf{u}_2 + \ldots + 0\cdot\mathbf{u}_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{u}_n &= 0\cdot\mathbf{u}_1 + 0\cdot\mathbf{u}_2 + \ldots + 1\cdot\mathbf{u}_n,
\end{aligned}$$

то при только что установленном изоморфизме между векторными пространствами U и A^n базис $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ пространства U переходит в систему векторов

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \{1, 0, \ldots, 0\},\\
\mathbf{v}_2 &= \{0, 1, \ldots, 0\},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{v}_n &= \{0, 0, \ldots, 1\}
\end{aligned}$$

пространства A^n, и эта система векторов образует базис пространства A^n.

Вообще пусть U и V — два изоморфных векторных пространства. При (произвольно выбранном) изоморфном соответствии $\mathbf{u} \leftrightarrow \mathbf{v}$ между пространствами U и V любому базису $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ пространства U соответствует некоторый базис $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ пространства V и всякому вектору $\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n$ пространства U соответствует вектор $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$ пространства V, имеющий относительно базиса $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ те самые координаты, которые вектор $\mathbf{u}$ имеет относительно базиса $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$. Обратно, выбирая в двух n-мерных пространствах по произвольному базису $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ и $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ и сопоставляя друг с другом всякие два вектора $\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots\ x_n\mathbf{u}_n \in U$ и

$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n \in V$, имеющие относительно этих базисов одни и те же координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получим изоморфизм $\mathbf{u} \leftrightarrow \mathbf{v}$ между пространствами U и V.

Замечание 2. В дальнейшем мы будем постоянно обозначать векторные пространства данной размерности n через V^n, U^n, L^n, сохраняя для их арифметического n-мерного пространства (которому они все изоморфны) обозначение A^n.

§ 4. Подпространства векторного пространства. Дальнейшие теоремы о линейной зависимости векторов и о базисе векторного пространства

1. Определение подпространства векторного пространства. Пусть в векторном пространстве V дано множество векторов L, удовлетворяющее следующим условиям:

1° Каковы бы ни были векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ из L, их сумма также принадлежит множеству L.

2° Каковы бы ни были вектор $\mathbf{u}$ из L и число λ, вектор $\lambda\mathbf{u}$ также принадлежит множеству L.

Всякое множество L, удовлетворяющее этим двум условиям, называется *подпространством* векторного пространства V. Условия 1° и 2° в своей совокупности, очевидно, эквивалентны одному условию:

3° Всякая линейная комбинация $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{u}_k$ векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, принадлежащих множеству L, есть вектор, принадлежащий этому множеству.

Поэтому подпространство векторного пространства V может быть определено как множество L, удовлетворяющее условию 3°.

Замечание 1. Пусть все элементы векторного пространства U являются в то же время элементами векторного пространства V, причем линейные операции над векторами в U те же самые, как и в объемлющем пространстве V. Тогда U, рассматриваемое как множество векторов пространства V, очевидно, удовлетворяет условиям 1°, 2°.

Очевидно и обратное: всякое множество $U \subseteq V$, удовлетворяющее этим условиям, есть векторное пространство, элементы которого суть векторы из V, причем линейные операции в U те же, что и в V.

Итак, мы можем определить векторное подпространство пространства V как всякое векторное пространство, элементы которого суть векторы пространства V, а линейные операции над ними — те же, что и в V.

Замечание 2. Очевидно, все пространство V, а также пространство, состоящее из одного нулевого вектора, являются подпространствами пространства V.

Пусть теперь B — какое-нибудь, совершенно произвольное, конечное или бесконечное, множество векторов пространства V. Рассмотрим множество $\bar{B}$, состоящее из всех векторов, являющихся линейными комбинациями всевозможных векторов, принадлежащих множеству B. Очевидно, множество $\bar{B}$ удовлетворяет условиям 1° и 2° и поэтому является подпространством пространства V; это подпространство называется *подпространством, порожденным множеством* B, или *линейной оболочкой* (или *линейным замыканием*) множества B; множество B в свою очередь называется *множеством, порождающим пространство* $\bar{B}$, или *множеством* или *системой образующих пространства* $\bar{B}$.

Может, разумеется, случиться, что пространство $\bar{B}$ совпадает со всем пространством V, например, если есть какой-нибудь базис пространства V. Итак, всякий базис пространства V является системой его образующих, притом линейно независимой. Мы скоро докажем и обратное предложение: всякая линейно независимая система образующих конечномерного векторного пространства является его базисом.

Пример. Пусть на плоскости даны две пересекающиеся прямые d_1 и d_2; обозначим через L_1 множество всех векторов, коллинеарных прямой d_1, а через L_2 — множество всех векторов, коллинеарных прямой d_2; каждое из этих двух множеств является (одномерным) подпространством пространства V всех векторов плоскости, но *объединение* $B = L_1 \cup L_2$ множеств L_1 и L_2 векторным пространством не является (почему?). Между тем векторное пространство $\bar{B}$, порожденное множеством B, есть все пространство V.

Следующее очень важное предложение почти очевидно.

Теорема 3. *Если подпространство L конечномерного векторного пространства V имеет ту же размерность, что и V, то оно совпадает со всем V.*

Доказательство. Пусть L и V имеют одну и ту же размерность n. Возьмем в L линейно независимую систему из n векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$; эта система является базисом обоих пространств: L и V. Поэтому каждый вектор $\mathbf{u} \in V$, будучи линейной комбинацией векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ (содержащихся в L), принадлежит подпространству L, т. е. $V \subseteq L$, и, значит, $V = L$.

2. Теорема Штейница «о замене». Теперь будет доказана одна из основных теорем, касающихся векторных подпространств и линейной независимости векторов в них, так называемая

Теорема Штейница «о замене» (теорема 4). *Пусть дано векторное пространство V, порожденное (конечным) множеством своих элементов*

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m. \tag{1}$$

Пусть, кроме того, в V дана линейно независимая система, состоящая из n векторов

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n. \tag{2}$$

Тогда непременно $n \leqslant m$ и среди векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ можно какие-то n векторов вычеркнуть и заменить векторами $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, так что получится вновь совокупность векторов, порождающая пространство V.

Докажем эту теорему посредством индукции по n. Пусть дана система векторов (1), порождающая векторное пространство V, и линейно независимая система (2), состоящая из одного вектора $\mathbf{v}_1 \in V$; это означает просто, что в V дан вектор $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. Тогда, прежде всего, $n = 1 \leqslant m$.

Так как $\mathbf{v}_1 \in V$, а V состоит из линейных комбинаций векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$, то

$$\mathbf{v}_1 = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_m\mathbf{u}_m, \tag{3}$$

причем по крайней мере один из коэффициентов $c_1, \ldots, c_m$ отличен от нуля; пусть, например, $c_1 \neq 0$. Тогда вектор $\mathbf{u}_1$ есть линейная комбинация вектора $\mathbf{v}_1$ и векторов $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$, а именно:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{c_1}\mathbf{v}_1 - \frac{c_2}{c_1}\mathbf{u}_2 - \ldots - \frac{c_m}{c_1}\mathbf{u}_m. \tag{3'}$$

Всякий вектор $\mathbf{u} \in V$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$:

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_m\mathbf{u}_m.$$

Заменяя в этом равенстве $\mathbf{u}_1$ через его выражение (3'), получим после приведения подобных членов равенство вида

$$\mathbf{u} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \ldots + b_m\mathbf{u}_m,$$

показывающее, что вектор $\mathbf{u} \in V$ есть линейная комбинация вектора $\mathbf{v}_1$ и векторов $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$. Итак, при $n = 1$ теорема Штейница доказана.

Докажем ее теперь для n, предполагая ее уже доказанной для $n-1$. Система векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$, как подсистема линейно независимой системы (2), линейно независима; она состоит из $n-1$ элементов; поэтому по предположению индукции некоторые $n-1$ из векторов (1) — пусть это будут векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$ — могут быть заменены векторами $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$, так что в результате получится совокупность векторов

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{u}_n, \ldots, \mathbf{u}_m, \tag{4}$$

порождающая многообразие V. Так как вектор $\mathbf{v}_n$ принадлежит этому многообразию, то он является линейной комбинацией

$$\mathbf{v}_n = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} + c_n\mathbf{u}_n + \ldots + c_m\mathbf{u}_m \tag{5}$$

векторов (4). Если мы докажем, что в (5) хотя бы один из коэффициентов $c_n, \ldots, c_m$ отличен от нуля, то это будет, прежде всего, означать, что среди векторов (1) имеется хоть один $\mathbf{u}_i$, номер которого $i \geqslant n$, т. е. будет доказано неравенство $m \geqslant n$. Но если бы все коэффициенты $c_n, \ldots, c_m$ были нулями, то соотношение (5) означало бы, что система (2) линейно зависима, вопреки предположению. Итак, действительно $m \geqslant n$ и среди коэффициентов $c_n, \ldots, c_m$ по крайней мере один — пусть это будет c_n — отличен от нуля. Но тогда (5) может быть переписано в виде

$$\mathbf{u}_n = \frac{1}{c_n}\mathbf{v}_n - \frac{c_1}{c_n}\mathbf{v}_1 - \ldots - \frac{c_{n-1}}{c_n}\mathbf{v}_{n-1} - \frac{c_{n+1}}{c_n}\mathbf{u}_{n+1} - \ldots - \frac{c_m}{c_n}\mathbf{u}_m, \quad (6)$$

означающем, что $\mathbf{u}_n$ есть линейная комбинация векторов

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_{n+1}, \ldots, \mathbf{u}_m. \quad (7)$$

Пусть теперь $\mathbf{u}$ — произвольный вектор из V. Он является линейной комбинацией векторов (4); если в этой комбинации заменить вектор $\mathbf{u}_n$ его значением (6) и сделать приведение подобных членов, то вектор $\mathbf{u}$ также выразится в виде линейной комбинации векторов

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_{n+1}, \ldots, \mathbf{u}_m,$$

т. е. система векторов (7) порождает все многообразие V. Теорема «о замене» доказана.

Самым важным ее утверждением является, пожалуй, неравенство $m \geqslant n$, заслуживающее быть выделенным в виде особой теоремы.

Теорема 5. *В векторном пространстве, порожденном m векторами $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ (т. е. состоящем из линейных комбинаций этих векторов), не может существовать линейно независимой системы, состоящей более чем из m векторов.*

Другими словами, *размерность векторного пространства не может превосходить числа элементов какой-нибудь произвольной системы образующих этого пространства.*

Теперь в двух словах доказывается

Теорема 6. *Линейно независимая система образующих B векторного пространства L является его базисом.*

В самом деле, пусть число элементов в данной системе образующих B есть m, а размерность пространства L есть n. Так как система B независима, то $m \leqslant n$. С другой стороны, мы только что видели, что $n \leqslant m$. Значит, $m = n$, система B есть линейно независимая система, состоящая из n векторов n-мерного пространства, т. е. базис этого пространства.

Теорема 7. *Всякая система образующих B пространства L размерности $n > 0$ содержит базис этого пространства.*

Доказательство. Скажем, что линейно независимая система векторов

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p, \tag{8}$$

принадлежащих B, *максимальна* в B, если, пополняя ее произвольным вектором $\mathbf{v} \in B$, получим уже линейно зависимую систему [1]).

Построим в B максимальную систему. Для этого выберем в B какой-нибудь вектор $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ (он существует, так как мы предположили, что размерность L положительна). Если линейно независимая система, состоящая из одного вектора $\mathbf{v}_1$, максимальна в B, то наше построение закончено. Если нет — выбираем в B такой вектор $\mathbf{v}_2$, чтобы система $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ была линейно независима. Если она максимальна, то построение закончено. Если нет — получаем линейно независимую систему трех векторов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ и так далее.

Так как пространство L имеет конечную размерность n, то после конечного числа шагов придем к линейно независимой системе

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \tag{9}$$

векторов из B, которая будет максимальной в B.

Я утверждаю, что эта система (9) есть базис (и, следовательно, состоит из n элементов ($m = n$)).

На основании предыдущего для этого достаточно доказать, что (9) есть система образующих всего пространства V, т. е. что всякий вектор $\mathbf{u} \in V$ есть линейная комбинация векторов (9). Пусть сначала $\mathbf{u} \in B$. Тогда, в силу максимальности системы (9) в B, система $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_m$ линейно зависима, а так как (9) — линейно независимая система, то $\mathbf{u}$ есть линейная комбинация векторов (9). Пусть теперь $\mathbf{u}$ — произвольный вектор, взятый в V; так как B есть система образующих пространства V, то вектор $\mathbf{u}$ есть линейная комбинация

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2 + \ldots + \lambda_s \mathbf{w}_s \tag{10}$$

каких-то векторов $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_s$ из B; но каждый из векторов, принадлежащих B, значит, и каждый из векторов $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_s$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$. Подставляя в равенство (10) вместо каждого вектора $\mathbf{w}_i$ его линейное выражение через векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$, мы, после приведения подобных членов, выразим и $\mathbf{u}$ в виде линейной комбинации векторов (9). Утверждение доказано.

Доказано также равенство $m = n$; его можно формулировать так.

Теорема 8. *Размерность конечномерного векторного пространства V равна максимальному числу линейно независимых векторов в произвольном множестве образующих пространства V.*

---

[1]) В частности, если $B = L$, то система (8) называется просто *максимальной* (во всем пространстве L) *линейно независимой системой векторов.*

Замечание 3. Попутно мы доказали и следующее предложение.

Теорема 9. *Всякая линейно независимая система векторов пространства L^n может быть дополнена до базиса пространства L^n.*

§ 5. Алгебраическая (в частности, прямая) сумма подпространств

Пусть L_1^p и L_2^q — два подпространства пространства L^n; их объединение $B = L_1^p \cup L_2^q$ (т. е. множество векторов, принадлежащее хотя бы одному из двух пространств L_1^p, L_2^q) порождает подпространство L_3^s, состоящее из всех векторов $\mathbf{u}$ вида $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, где $\mathbf{u}_1 \in L_1^p$, $\mathbf{u}_2 \in L_2^q$; пространство L_3^s называется (*алгебраической*) *суммой пространств* L_1^p и L_2^q и обозначается через $L_3^s = L_1^p + L_2^q$. Обозначим через D *пересечение* подпространств L_1^p и L_2^q (т. е. множество $L_1^p \cap L_2^q$ всех векторов, содержащихся и в L_1^p, и в L_2^q). Множество D есть векторное пространство (подпространство пространства L^n и каждого из пространств L_1^p и L_2^q). Это следует из того, что всякая линейная комбинация $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{u}_k$ любых векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, принадлежащих множеству $D = L_1^p \cap L_2^q$, содержится как в L_1^p, так и в L_2^q, значит, и в D. Обозначим размерность пространства D через d (мы уже обозначили через p, q, s размерность пространств L_1^p, L_2^q, L_3^s). Докажем важную формулу

$$\boxed{s = p + q - d.} \tag{1}$$

Пусть $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ — произвольный базис пространства D; будучи линейно независимой системой векторов, лежащих как в пространстве L_1^p, так и в пространстве L_2^q, система $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ может быть дополнена до базиса $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d; \mathbf{u}_{d+1}, \ldots, \mathbf{u}_p$ пространства L_1^p и до базиса $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d; \mathbf{v}_{d+1}, \ldots, \mathbf{v}_q$ пространства L_2^q.

Рассмотрим систему векторов

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d; \quad \mathbf{u}_{d+1}, \ldots, \mathbf{u}_p; \quad \mathbf{v}_{d+1}, \ldots, \mathbf{v}_q. \tag{2}$$

Каждый вектор $\mathbf{u} \in L_1^p$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d; \mathbf{u}_{d+1}, \ldots, \mathbf{u}_p$; каждый вектор $\mathbf{v} \in L_2^q$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d; \mathbf{v}_{d+1}, \ldots, \mathbf{v}_q$; значит, каждый вектор $\mathbf{v} \in L_2^q$ и $\mathbf{u} \in L_1^p$ есть линейная комбинация векторов системы (2); то же, естественно, имеет место и для каждого вектора $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, где $\mathbf{u} \in L_1^p$, $\mathbf{v} \in L_2^q$, т. е. для каждого вектора $\mathbf{w} \in L_3^s$. Итак, множество всех векторов (2) есть система образующих пространства L_3^s.

Докажем, что эта система линейно независима и, следовательно, есть базис пространства L_3^s; так как число векторов (2) есть $d + (p - d) + (q - d) = p + q - d$, то формула (1) этим будет доказана.

Итак, пусть

$$\lambda_1\mathbf{u}_1+\ldots+\lambda_d\mathbf{u}_d+\lambda'_{d+1}\mathbf{u}_{d+1}+\ldots+\lambda'_p\mathbf{u}_p+\lambda''_{d+1}\mathbf{v}_{d+1}+\ldots+\lambda''_q\mathbf{v}_q=\mathbf{0}. \quad (3)$$

Требуется доказать, что

$$\lambda_1=\ldots=\lambda_d=\lambda'_{d+1}=\ldots=\lambda'_p=\lambda''_{d+1}=\ldots=\lambda''_q=0. \quad (3_0)$$

Полагаем

$$\mathbf{w}=\lambda''_{d+1}\mathbf{v}_{d+1}+\ldots+\lambda''_q\mathbf{v}_q, \quad (4)$$

так что $\mathbf{w}\in L_2^q$, и переписываем (3) в виде

$$\mathbf{w}=\lambda''_{d+1}\mathbf{v}_{d+1}+\ldots+\lambda''_q\mathbf{v}_q= \\ =-\lambda_1\mathbf{u}_1-\ldots-\lambda_d\mathbf{u}_d-\lambda'_{d+1}\mathbf{u}_{d+1}-\ldots-\lambda'_p\mathbf{u}_p, \quad (5)$$

откуда следует, что вектор $\mathbf{w}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d; \mathbf{u}_{d+1}, \ldots, \mathbf{u}_p$ и, значит, содержится и в L_1^p. Поэтому $\mathbf{w}\in L_1^p\cap L_2^q=D$, так что

$$\mathbf{w}=\mu_1\mathbf{u}_1+\ldots+\mu_d\mathbf{u}_d. \quad (6)$$

Из (4) и (6) следует, что

$$\mu_1\mathbf{u}_1+\ldots+\mu_d\mathbf{u}_d-\lambda''_{d+1}\mathbf{v}_{d+1}-\ldots-\lambda''_q\mathbf{v}_q=\mathbf{0}. \quad (7)$$

Так как система векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d; \mathbf{v}_{d+1}, \ldots, \mathbf{v}_q$ линейно независима (она есть базис пространства L_2^q), то все коэффициенты в равенстве (7) равны нулю, так что, в частности,

$$\lambda''_{d+1}=\ldots=\lambda''_q=0 \quad (8)$$

и равенство (3) принимает вид

$$\lambda_1\mathbf{u}_1+\ldots+\lambda_d\mathbf{u}_d+\lambda'_{d+1}\mathbf{u}_{d+1}+\ldots+\lambda'_p\mathbf{u}_p=\mathbf{0}.$$

Система векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d; \mathbf{u}_{d+1}, \ldots, \mathbf{u}_p$ (являясь базисом пространства L_1^p) линейно независима, поэтому

$$\lambda_1=\ldots=\lambda_d=\lambda'_{d+1}=\ldots=\lambda'_p=0,$$

что вместе с (8) дает нам искомое равенство (3_0). Формула (1) доказана.

Определение. Алгебраическая сумма

$$L_3^s=L_1^p+L_2^q \quad (9)$$

двух подпространств (пространства L^n) называется *прямой суммой* этих подпространств, если пересечение $D=L_1^p\cap L_2^q$ состоит из одного нулевого вектора (и, следовательно, имеет размерность $d=0$).

Для прямой суммы (9) формула (1) превращается в

$$s=p+q. \quad (10)$$

Имеет место следующая

Теорема 10. *Если сумма* (9) *прямая, то для каждого вектора* $\mathbf{w} \in L_3^s$ *существует единственное представление в виде*

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad \text{где} \quad \mathbf{u} \in L_1^p, \quad \mathbf{v} \in L_2^q. \tag{11}$$

В самом деле, если бы существовало два представления этого вида

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{w} = \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2, \tag{12}$$

то было бы $\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2$ и, значит,

$$\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2.$$

Вектор $\mathbf{w}' = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ отличен от нуля (иначе оба представления совпадали бы); он содержится и в L_1^p (так как $\mathbf{w}' = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$), и в L_2^q (так как $\mathbf{w}' = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$) вопреки предположению, что $L_1^p \cap L_2^q$ состоит лишь из нулевого вектора.

§ 6. Линейные отображения векторных пространств

1. Определение и простейшие свойства линейных преобразований. Пусть $\mathcal{A}$ — отображение векторного пространства U на векторное пространство V, ставящее в соответствие каждому вектору $\mathbf{u}$ пространства U вектор $\mathbf{v} = \mathcal{A}\mathbf{u}$ пространства V.

Определение 2. Отображение $\mathcal{A}$ называется *линейным*, если оно удовлетворяет следующим двум условиям («условиям линейности») [1]):

1) Для любых двух векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \mathcal{A}\mathbf{u}_1 + \mathcal{A}\mathbf{u}_2.$$

2) Для любого вектора $\mathbf{u}$ и любого числа λ имеем

$$\mathcal{A}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(\mathcal{A}\mathbf{u}).$$

Из условий 1), 2) сразу следует, что при линейном отображении всякая линейная комбинация $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_m\mathbf{u}_m$ каких-либо векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ пространства U переходит в линейную комбинацию $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_m\mathbf{v}_m$ векторов $\mathbf{v}_1 = \mathcal{A}\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{v}_m = \mathcal{A}\mathbf{u}_m$ пространства V с теми же коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Замечание. Линейные отображения векторного пространства в себя также называются *линейными операторами*, и это название является даже более употребительным. Мы будем его придерживаться в главах XXIV, XXV этих «Лекций».

Установим простейшие свойства линейных отображений.

---

[1]) Ср. гл. XI, § 2.

1° *При линейном отображении нулевой вектор* $\mathbf{0}_U$ *пространства* U *переходит в нулевой вектор* $\mathbf{0}_V$ *пространства* V:

$$\mathcal{A}\mathbf{0}_U = \mathbf{0}_V.$$

В самом деле, $\mathbf{0}_U = 0 \cdot \mathbf{u}$ (где $\mathbf{u}$ — произвольный вектор пространства U). Значит, $\mathcal{A}(\mathbf{0}_U) = 0 \cdot \mathcal{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}_V$. Отсюда непосредственно следует

2° *Если векторы* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *линейно зависимы, то и их образы* $\mathbf{v}_1 = \mathcal{A}\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{v}_n = \mathcal{A}\mathbf{u}_n$ *также линейно зависимы* («линейная зависимость векторов сохраняется при всяком линейном отображении»).

В самом деле, если $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ линейно зависимы, то существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, не все равные нулю, что

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}_U.$$

Но тогда, по только что доказанному, и

$$\mathcal{A}(\lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n) = \lambda_1\mathcal{A}\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_n\mathcal{A}\mathbf{u}_n = \mathcal{A}\mathbf{0}_U = \mathbf{0}_V,$$

векторы $\mathcal{A}\mathbf{u}_1, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{u}_n$ линейно зависимы.

Следствие. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— линейное отображение пространства* U *на пространство* V *и векторы* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ *образуют линейно независимую систему в* V. *Тогда в* U *существует линейно независимая система, состоящая из* k *векторов* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, *отображающихся соответственно в* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$:

$$\mathcal{A}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \ \ldots, \ \mathcal{A}\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k.$$

В самом деле, для каждого вектора $\mathbf{v} \in V$ существует по крайней мере один такой вектор $\mathbf{u} \in U$, что $\mathcal{A}\mathbf{u} = \mathbf{v}$ (ведь $\mathcal{A}$ — отображение на все пространство V). Поэтому можно найти в U такие векторы $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, что $\mathcal{A}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \ \ldots, \ \mathcal{A}\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k$. Система $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ линейно независима (в противном случае, в силу 2°, система $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ была бы зависима).

Из доказанного вытекает, далее:

Если m-мерное пространство U линейно отображено на n-мерное пространство V, то $m \geqslant n$. В самом деле, по предположению в V существует линейно независимая система, состоящая из n векторов; но тогда такая система существует и в U, так что $m \geqslant n$.

3° *Пусть* $\mathcal{A}$ *есть взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства* U *на векторное пространство* V. *Тогда определено обратное отображение* $\mathcal{A}^{-1}$ *пространства* V *на пространство* U.

Докажем, что оно также есть линейное отображение. Докажем, в самом деле, что преобразование $\mathcal{A}^{-1}$ удовлетворяет обоим условиям линейности.

Пусть $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — произвольные векторы из V, пусть $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Надо доказать, что $\mathcal{A}^{-1}\mathbf{v}_1 + \mathcal{A}^{-1}\mathbf{v}_2 = \mathcal{A}^{-1}\mathbf{v}$. Пусть $\mathbf{u} = \mathcal{A}^{-1}\mathbf{v}_1 + \mathcal{A}^{-1}\mathbf{v}_2$. Тогда, вследствие линейности преобразования $\mathcal{A}$, имеем

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\mathbf{v}_1 + \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\mathbf{v}_2 = \mathcal{A}\mathbf{u},$$

т. е. $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathcal{A}\mathbf{u}$, но $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{v}$, значит, $\mathcal{A}\mathbf{u}=\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}=\mathcal{A}^{-1}\mathbf{v}$, что и требовалось доказать.

Положим $\mathbf{u}=\mathcal{A}^{-1}\mathbf{v}$. Тогда $\mathcal{A}\mathbf{u}=\mathbf{v}$ и, в силу линейности отображения $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A}\lambda\mathbf{u}=\lambda\mathcal{A}\mathbf{u}=\lambda\mathbf{v};$$

значит, $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\lambda\mathbf{u}=\mathcal{A}^{-1}\lambda\mathbf{v}$, т. е. $\lambda\mathbf{u}=\mathcal{A}^{-1}\lambda\mathbf{v}$, или, наконец (если подставить в это равенство $\mathbf{u}=\mathcal{A}^{-1}\mathbf{v}$),

$$\lambda\mathcal{A}^{-1}\mathbf{v}=\mathcal{A}^{-1}\lambda\mathbf{v},$$

что и требовалось доказать.

Из доказанного следует, что взаимно однозначные линейные отображения одного векторного пространства на другое суть не что иное, как изоморфные отображения (изоморфизмы), рассмотренные нами в § 1 этой главы.

В частности, *взаимно однозначные линейные отображения (изоморфизмы) векторного пространства U на себя называются линейными преобразованиями*. Из доказанных в § 1 свойств изоморфизмов следует, что при линейном преобразовании всякая линейно независимая система векторов переходит в линейно независимую, а всякий базис пространства U переходит в базис этого пространства.

Замечание 1. Теперь мы видим, что всякое аффинное преобразование плоскости или трехмерного пространства порождает изоморфное преобразование многообразия всех свободных векторов плоскости (соответственно трехмерного пространства).

2. Матрица линейного преобразования. Умножение преобразований и умножение матриц. Пусть $\mathcal{A}$ есть линейное отображение m-мерного векторного пространства U на n-мерное векторное пространство V. Мы знаем, что тогда $n\leqslant m$.

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$—какой-нибудь базис пространства U. При преобразовании $\mathcal{A}$ векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$ переходят соответственно в векторы $\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \mathcal{A}\mathbf{e}_2, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{e}_m$. Каждый вектор

$$\mathbf{u}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_m\mathbf{e}_m\in U \tag{1}$$

переходит при преобразовании $\mathcal{A}$ в вектор

$$\mathcal{A}\mathbf{u}=x_1\mathcal{A}\mathbf{e}_1+x_2\mathcal{A}\mathbf{e}_2+\ldots+x_m\mathcal{A}\mathbf{e}_m. \tag{2}$$

Таким образом, *линейное преобразование $\mathcal{A}$ векторного пространства U полностью определено—формулой* (2),—*если заданы образы $\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \mathcal{A}\mathbf{e}_2, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{e}_m$ векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$, образующих какой-нибудь базис пространства U.*

Если отображение $\mathcal{A}$ взаимно однозначно (т. е. является изоморфизмом), то векторы $\mathbf{e}_1^*=\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m^*=\mathcal{A}\mathbf{e}_m$ образуют базис пространства V и отображение $\mathcal{A}$ состоит в том, что каждому вектору

$$\mathbf{u}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_m\mathbf{e}_m$$

ставится в соответствие вектор

$$\mathcal{A}\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1^* + x_2\mathbf{e}_2^* + \ldots + x_m\mathbf{e}_m^*,$$

имеющий относительно базиса $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_m^*$ те же самые координаты, которые вектор $\mathbf{u}$ имел относительно базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$. В частности, это имеет место в том случае, когда $V = U$ и $\mathcal{A}$ есть линейное преобразование пространства U.

Этим важнейшим частным случаем мы сейчас только и займемся.

Теперь векторы $\mathbf{e}_1^* = \mathcal{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m^* = \mathcal{A}\mathbf{e}_m$ лежат в пространстве U, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_1^* &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{m1}\mathbf{e}_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}_i^* &= a_{1i}\mathbf{e}_1 + a_{2i}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{mi}\mathbf{e}_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}_m^* &= a_{1m}\mathbf{e}_1 + a_{2m}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{mm}\mathbf{e}_m \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

и невырождающаяся матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix},$$

т. е. матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ к базису $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_m^*$, полностью определяет преобразование $\mathcal{A}$: чтобы для каждого вектора $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_m\mathbf{e}_m$ найти координаты $y_1, \ldots, y_m$ вектора $\mathcal{A}\mathbf{u}$ (относительно того же базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$), надо только заметить, что вектор $\mathcal{A}\mathbf{u}$ относительно «нового» базиса $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_m^*$ имеет координаты $x_1, \ldots, x_m$, значит, относительно «старого» базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ его координаты $y_1, \ldots, y_m$ вычисляются по формулам (3) из § 2 (с заменой в них $x_1, \ldots, x_m$ на $y_1, \ldots, y_m$; $x_1', \ldots, x_m'$ на $x_1, \ldots, x_m$ и c_{ik} на a_{ik} при $n = m$), т. е.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей преобразования $\mathcal{A}$ относительно базиса* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$; эта матрица транспонирована к матрице перехода A^* от базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ к базису $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_m^*$.

Для простоты письма предполагаем $m=3$. Записывая вектор $\mathbf{u}$ не в виде строки $\mathbf{u}=\{x_1, x_2, x_3\}$, а в виде столбца

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

можем переписать формулы (4) в виде

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Итак, образ вектора $\mathbf{u}$, заданного своими координатами x_1, x_2, x_3 при преобразовании $\mathcal{A}$, есть матрица (столбец), являющаяся произведением матрицы A на матрицу

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому образ вектора $\mathcal{A}\mathbf{u}$ при преобразовании $\mathcal{B}$ с матрицей B есть произведение матрицы B на матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{pmatrix}, \text{ т. е. на матрицу } A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Другими словами (помня ассоциативность умножения матриц),

$$\mathcal{B}\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=BA\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Итак, при перемножении преобразований матрицы их также перемножаются: матрица преобразования $\mathcal{B}\mathcal{A}$ (сначала $\mathcal{A}$, потом $\mathcal{B}$) есть BA.

Отсюда вытекает, что матрица обратного преобразования $\mathcal{A}^{-1}$ к преобразованию $\mathcal{A}$ есть матрица A^{-1}. В самом деле, так как произведение преобразований $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{-1}$ (взятых в любом порядке) есть тождественное преобразование $\mathcal{E}$, матрица которого, очевидно, есть единичная матрица E, то произведение матриц преобразований $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{-1}$ есть E, откуда и следует, что эти матрицы взаимно обратны.

Решим теперь следующую задачу. Дана матрица A линейного преобразования $\mathcal{A}$ относительно базиса $I=\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Дан второй базис $I'=\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ с соответствующей матрицей перехода P^* (от

базиса I к базису I'). Требуется найти матрицу A' преобразования $\mathcal{A}$ относительно базиса I'.

Пусть $\mathbf{u}$ — произвольный вектор; его координаты относительно базисов I, I' обозначим соответственно через x_1, x_2, x_3 и x_1', x_2', x_3', так что

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_I = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}_{I'}.$$

Координаты вектора $\mathcal{A}\mathbf{u}$ в базисах I и I' обозначим соответственно через y_1, y_2, y_3 и y_1', y_2', y_3'. Тогда имеем для любого вектора

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

но

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}, \tag{6}$$

следовательно,

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Внося в правую часть равенства (7) выражение (5), получим

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = P^{-1}A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Внося сюда первое выражение из (6), получаем окончательно

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = P^{-1}AP \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix},$$

т. е.

$$A' = P^{-1}AP. \tag{8}$$

Это и есть чрезвычайно важная формула, которую мы хотели получить.

§ 7. Теорема о ранге матрицы

Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

— произвольная матрица, имеющая m строк и n столбцов.

Определение. *Рангом матрицы A называется наибольшее такое число r, что в матрице A содержится невырождающаяся матрица P порядка r.*

Матрица, состоящая из одних нулей, и только такая матрица имеет ранг 0. Матрица имеет тогда и только тогда ранг 1, когда среди ее элементов имеются отличные от нуля и когда в то же время всякие две ее строки и всякие два ее столбца пропорциональны между собою. Далеко идущим обобщением последнего утверждения являются следующая

Теорема 11 (теорема о ранге матрицы). *Ранг матрицы A является наибольшим таким числом r, что в матрице A имеется r строк (r столбцов), образующих линейно независимую систему.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что максимальное число линейно независимых строк матрицы равно максимальному числу ее линейно независимых столбцов, — факт замечательный и неожиданный.

Доказательство теоремы о ранге матрицы. Пусть ранг матрицы A равен r. Требуется доказать, что в матрице A имеется r столбцов (строк), образующих линейно независимую систему, и что всякие $r+1$ столбцов (строк) образуют линейно зависимую систему. Доказательство для строк и столбцов одно и то же, проведем его для столбцов.

Раз ранг матрицы равен r, то в ней имеется минор P с отличным от нуля детерминантом. Не ограничивая общности рассуждений, можно предположить, что этот минор P является угловым:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{r+1,r+1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,r+1} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \end{pmatrix},$$

$$\det P=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Так как $\det P \neq 0$, то векторы

$$\mathbf{w}_1 = \{a_{11}, \ldots, a_{r1}\}, \ \ldots, \ \mathbf{w}_r = \{a_{1r}, \ \ldots, \ a_{rr}\}$$

(столбцы минора P) линейно независимы, и подавно линейно независимы векторы

$$\mathbf{v}_1 = \{a_{11}, \ \ldots, \ a_{r1}, \ \ldots, \ a_{m1}\}, \ \ldots, \quad \mathbf{v}_r = \{a_{1r}, \ \ldots, \ a_{rr}, \ \ldots, \ a_{mr}\}$$

(столбцы матрицы A).

В самом деле, если бы существовало линейное соотношение

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_r \mathbf{v}_r = \mathbf{0},$$

то это значило бы, что при любом $i = 1, 2, \ldots, r, \ldots, m$ имело бы место

$$\lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + \ldots + \lambda_r a_{ir} = 0. \tag{1}$$

В частности, соотношения (1) выполнены при $i = 1, 2, \ldots, r$, т. е.

$$\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \ldots + \lambda_r \mathbf{w}_r = \mathbf{0},$$

что, ввиду независимости векторов $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r$, означает, что коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ все равны нулю.

Итак, во всякой матрице A ранга r имеется линейно независимая система, состоящая из r столбцов. Первое утверждение теоремы доказано.

Переходим к доказательству второго утверждения: всякие $r+1$ столбцов матрицы A (ранга r) линейно зависимы. Предполагаем снова, что отличен от нуля детерминант углового минора порядка r матрицы A. Вспомним, что среди векторов, являющихся линейными комбинациями данных r векторов, нельзя найти более r линейно независимых; поэтому достаточно доказать, что каждый столбец

$$\mathbf{v}_h = \{a_{1h}, \ a_{2h}, \ \ldots, \ a_{mh}\}$$

матрицы A является линейной комбинацией первых r столбцов:

$$\mathbf{v}_1 = \{a_{11}, \ \ldots, \ a_{m1}\}, \ \mathbf{v}_2 = \{a_{12}, \ \ldots, \ a_{m2}\}, \ \ldots, \ \mathbf{v}_r = \{a_{1r}, \ \ldots, \ a_{mr}\}.$$

Разумеется, при доказательстве этого утверждения можно предположить $h > r$.

Взяв любое $i \leqslant m$, построим детерминант

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1h} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rh} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{ih} \end{vmatrix}$$

и докажем прежде всего, что при любом i он равен нулю. В самом деле, если $i \leqslant r$, то этот детерминант имеет две одинаковые

строки — на i-м и $(r+1)$-м месте — и поэтому равен нулю. Если же $i > r$, то D_i есть детерминант некоторого минора $(r+1)$-го порядка матрицы A, и он равен нулю, так как ранг матрицы A по предположению есть r. Итак, $D_i = 0$ при любом $i \leqslant m$.

Разложим детерминант D_i по элементам последней строки. Коэффициенты этого разложения суть адъюнкты элементов $(r+1)$-й строки детерминанта D_i, а именно:

$$A_1 = (-1)^{(r+1)+1} \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rh} \end{vmatrix},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_k = (-1)^{(r+1)+k} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1r} & a_{1h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{r,k-1} & a_{r,k+1} & \dots & a_{rr} & a_{rh} \end{vmatrix},$$

наконец,

$$A_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = \det P \neq 0$$

— адъюнкта последнего элемента a_{ih} в $(r+1)$-й строке.

Существенно, что эти коэффициенты $A_1, \dots, A_{r+1}$ не зависят от i, поэтому их и можно было обозначать через $A_1, \dots, A_{r+1}$. Мы имеем

$$0 = D_i = A_1 a_{i1} + A_2 a_{i2} + \dots + A_r a_{ir} + A_{r+1} a_{ih}$$
$$(\text{для любого } i = 1, 2, \dots, m).$$

Эти соотношения, написанные для всех $i = 1, 2, \dots, m$, выражают равенство

$$A_1 \mathbf{v}_1 + A_2 \mathbf{v}_2 + \dots + A_r \mathbf{v}_r + A_{r+1} \mathbf{v}_h = \mathbf{0},$$

в котором заведомо коэффициент $A_{r+1} = \det P$ отличен от нуля и которое поэтому можно разрешить относительно $\mathbf{v}_h$:

$$\mathbf{v}_h = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{v}_r \text{ при } \lambda_1 = -\frac{A_1}{A_{r+1}}, \quad \dots, \quad \lambda_r = -\frac{A_r}{A_{r+1}}.$$

Мы представили произвольный столбец $\mathbf{v}_h$ матрицы в виде линейной комбинации первых r столбцов этой матрицы и этим закончили доказательство теоремы о ранге матрицы.

Замечание. Из приведенного доказательства следует, что при подсчете ранга матрицы можно, найдя некоторый не равный нулю детерминант, перебирать лишь «окаймляющие» его детерминанты.

§ 8. Системы линейных однородных уравнений

Мы видели в главе X, § 1, что совокупность всех решений однородного линейного уравнения с тремя неизвестными есть двумерное векторное пространство, а совокупность решений системы двух не эквивалентных между собою однородных линейных уравнений есть одномерное векторное пространство.

Мы сейчас обобщим эти результаты на случай любых систем, состоящих из m однородных уравнений с n неизвестными.

Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} a_{11}t_1 + \ldots + a_{1n}t_n &= 0,\\ a_{21}t_1 + \ldots + a_{2n}t_n &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}t_1 + \ldots + a_{mn}t_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Вектор $\mathbf{v} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ арифметического n-мерного пространства [1]) называется *решением системы* (1), если, подставив в (1) значения $t_1 = x_1, \ldots, t_n = x_n$, получим тождество $0 = 0$.

Если вектор $\mathbf{v} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ есть решение системы (1), то решением этой системы является и вектор $\lambda\mathbf{v}$ при любом λ; если $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ — решения системы (1), то и вектор $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ есть решение. Отсюда следует, что множество всех векторов $\mathbf{v} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ арифметического пространства V^n, являющихся решениями системы (1), есть векторное подпространство $X \subseteq V^n$, называемое *пространством решений системы* (1). Найдем базис этого пространства и определим его размерность.

Мы уже знаем, что однородное уравнение

$$a_1t_1 + a_2t_2 + \ldots + a_nt_n = 0 \tag{1'}$$

называется линейной комбинацией уравнений (1), если вектор $\{a_1, \ldots, a_n\}$ есть линейная комбинация строк матрицы коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

(т. е. если левая часть уравнения (1′) есть линейная комбинация левых частей уравнений (1)).

---

[1]) Вместо арифметического пространства A^n можно взять любое n-мерное векторное пространство L^n с выбранным в нем раз навсегда базисом $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Тогда каждый вектор $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ также можно записать в виде $\mathbf{v} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

После этого линейная независимость системы однородных линейных уравнений и связанные с ней понятия определяются автоматически. В частности, *рангом системы уравнений* (1) называется ранг матрицы (2); он равен максимальному числу уравнений системы (1), образующих линейно независимую подсистему.

Две системы линейных уравнений (с n неизвестными) называются *эквивалентными*, если они имеют одно и то же пространство решений $X \subseteq V^n$.

Пусть система уравнений (1) имеет ранг r. Возьмем в ней какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему; без ограничения общности можно предположить, что такую подсистему образуют первые r уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}t_1 + \ldots + a_{1n}t_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{r1}t_1 + \ldots + a_{rn}t_n &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

системы (1); остальные уравнения системы (1) являются линейными комбинациями уравнений системы (3), поэтому всякое решение системы (3) есть и решение системы (1); очевидно и обратное утверждение: всякое решение системы (1) есть решение подсистемы (3). Итак, система однородных линейных уравнений (1) эквивалентна (всякой) своей максимальной линейно независимой подсистеме (3). Будем решать систему (3).

В матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

r строк, и они образуют линейно независимую систему; значит, ранг матрицы (4) равен r и в ней имеется r столбцов, образующих линейно независимую систему. Без ограничения общности можем предположить, что эта линейно независимая система образована первыми r столбцами. Тогда отличен от нуля детерминант

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Перепишем систему (3) в виде

$$\left.\begin{aligned} a_{11}t_1 + \ldots + a_{1r}t_r &= -a_{1,r+1}t_{r+1} - \ldots - a_{1n}t_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{r1}t_1 + \ldots + a_{rr}t_r &= -a_{r,r+1}t_{r+1} - \ldots - a_{rn}t_n \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

и дадим переменным $t_{r+1}, \ldots, t_n$ какие-нибудь числовые значения:

$$t_{r+1}=\xi_{r+1}, \ \ldots, \ t_n=\xi_n, \tag{5}$$

так что правые части уравнений (3′) суть известные числа. Так как детерминант системы (3′) отличен от нуля, то система (3′) однозначно решается по правилу Крамера: $t_1=x_1, \ \ldots, \ t_r=x_r$. Итак, каждому набору чисел (5) однозначно соответствует решение

$$\{x_1, \ \ldots, \ x_r, \ \xi_{r+1}, \ \ldots, \ \xi_n\} \tag{6}$$

системы (3′) (являющееся решением и системы (1)). Возьмем, в частности, следующие наборы (5):

$$\begin{array}{ll} 1, \ 0, \ \ldots, \ 0, & (5_1) \\ 0, \ 1, \ \ldots, \ 0, & (5_2) \\ \ldots\ldots & \\ 0, \ 0, \ \ldots, \ 1. & (5_{n-r}) \end{array}$$

Им будут соответствовать следующие решения системы (3′):

$$\left.\begin{array}{lll} \mathbf{v}_1 & =\{x_1^{(1)}, & \ldots, \ x_r^{(1)}, \ 1, \ 0, \ \ldots, \ 0\}, \\ \mathbf{v}_2 & =\{x_1^{(2)}, & \ldots, \ x_r^{(2)}, \ 0, \ 1, \ \ldots, \ 0\}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \mathbf{v}_{n-r} & =\{x_1^{(n-r)}, & \ldots, \ x_r^{(n-r)}, \ 0, \ 0, \ \ldots, \ 1\}. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Докажем, что векторы-решения (7) образуют базис пространства X всех решений (1). Прежде всего докажем, что векторы (7) линейно независимы. В самом деле, пусть

$$\lambda_1\mathbf{v}_1+\ldots+\lambda_{n-r}\mathbf{v}_{n-r}=\mathbf{0}.$$

Расписывая это равенство соответственно по $(r+1)$-й, $(r+2)$-й, $\ldots$, n-й координате входящих в него векторов (7), получим:

$$\begin{array}{l} \lambda_1\cdot 1+\lambda_2\cdot 0+\ldots+\lambda_{n-r}\cdot 0=0, \\ \lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 1+\ldots+\lambda_{n-r}\cdot 0=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 0+\ldots+\lambda_{n-r}\cdot 1=0, \end{array}$$

т. е. $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_{n-r}=0$, что и требовалось доказать[1]).

Остается доказать, что каждое решение

$$\mathbf{v}=\{x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_r, \ \ldots, \ x_n\}$$

есть линейная комбинация решений (7). Рассмотрим вектор

$$\mathbf{v}_0=\mathbf{v}-x_{r+1}\mathbf{v}_1-\ldots-x_n\mathbf{v}_{n-r}. \tag{8}$$

---

[1]) Вместо наборов (5_1)—(5_{n-r}) можно было бы взять для построения базиса любые наборы (5), образующие невырождающуюся матрицу.

Очевидно, $(r+1)$-я, $(r+2)$-я, ..., n-я координаты этого вектора равны нулю, так что вектор $\mathbf{v}_0$ имеет вид

$$\mathbf{v}_0 = \{\xi_1, \ldots, \xi_r, 0, 0, \ldots, 0\}.$$

Так как вектор $\mathbf{v}_0$ есть линейная комбинация векторов-решений $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$, ..., $\mathbf{v}_{n-r}$ системы (3'), то и $\mathbf{v}_0$ есть решение этой системы. Значит, подставляя в эту систему координаты вектора $\mathbf{v}_0$, т. е. полагая $t_1 = \xi_1$, ..., $t_r = \xi_r$, $t_{r+1} = \ldots = t_n = 0$, превратим систему (3') в систему тождеств

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1r}\xi_r &= 0, \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2r}\xi_r &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{r1}\xi_1 + a_{r2}\xi_2 + \ldots + a_{rr}\xi_r &= 0, \end{aligned}$$

означающую, что вектор $\{\xi_1, \ldots, \xi_r\}$ есть решение системы однородных уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \ldots + a_{1r}t_r &= 0, \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{2r}t_r &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{r1}t_1 + a_{r2}t_2 + \ldots + a_{rr}t_r &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Но детерминант этой системы не равен нулю, поэтому нулевое решение $\xi_1 = \ldots = \xi_r = 0$ есть единственное решение этой системы и вектор $\mathbf{v}_0$ есть нулевой вектор. Значит (в силу определения (8) вектора $\mathbf{v}_0$), имеем

$$\mathbf{v} = x_{r+1}\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_{n-r}$$

— произвольное решение $\mathbf{v}$ системы (1) есть линейная комбинация решений $\mathbf{v}_1$, ..., $\mathbf{v}_{n-r}$; эти решения, будучи линейно независимыми, образуют базис пространства X. Наша цель достигнута — доказана следующая основная

Теорема 12. *Пусть дана система* (1) *линейных однородных уравнений с n неизвестными. Пусть L^n — арифметическое n-мерное пространство (или любое n-мерное векторное пространство с фиксированным базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$). Если ранг системы* (1) *равен r, то множество всех векторов*

$$\mathbf{v} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

являющихся решениями системы (1) *есть $(n-r)$-мерное подпространство пространства L^n.*

Из теоремы 12 сразу вытекает важнейшее

Следствие. *Для того чтобы система однородных уравнений* (1) *имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг системы был меньше числа неизвестных.*

В частности:

1° *Всякая система однородных линейных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, имеет ненулевое решение.*

2° *Система, состоящая из n однородных уравнений с n неизвестными, тогда и только тогда имеет ненулевое решение, когда детерминант системы равен нулю.*

Рассмотрим еще отдельно случай системы из n независимых однородных линейных уравнений с $n+1$ неизвестными; ранг такой системы равен n, следовательно, многообразие решений одномерно: если

$$\mathbf{v}_0 = \{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$$

— одно какое-нибудь ненулевое решение данной системы, то все решения имеют вид $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}_0$. Без ограничения общности можно предположить, что детерминант минора, состоящего из первых n столбцов матрицы нашей системы, отличен от нуля. Тогда, записывая данную систему в виде

$$\left.\begin{aligned} a_{11}t_1 + \ldots + a_{1n}t_n &= -a_{1,n+1}t_{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}t_1 + \ldots + a_{nn}t_n &= -a_{n,n+1}t_{n+1} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

и давая неизвестному t_{n+1} произвольное значение $t_{n+1} = x_{n+1}$, можем определить и значения неизвестных $t_1 = x_1, \ldots, t_n = x_n$ по правилу Крамера, а именно:

$$x_i = \frac{A_i}{A_{n+1}} x_{n+1},$$

где A_i есть умноженный на $(-1)^{i+1}$ детерминант матрицы, полученной вычеркиванием из матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

данной системы i-го столбца. Итак, решениями системы являются все векторы $\mathbf{v} = \{\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}\}$, где

$$\xi_1 : \xi_2 : \ldots : \xi_{n+1} = A_1 : A_2 : \ldots : A_{n+1}.$$

Сформулируем теперь и докажем теорему, обратную к теореме 12.

Теорема 13. *Пусть дано векторное пространство L^n размерности n с фиксированным базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Всякое p-мерное подпространство L^p пространства L^n, $0 \leqslant p \leqslant n$, есть пространство решений некоторой системы линейных однородных уравнений с n неизвестными ранга $q = n - p$, а именно линейно независимой системы из q уравнений.*

Доказательству предпошлем несколько замечаний.

Раз базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ пространства L^n фиксирован, то каждый вектор $\mathbf{v} \in L^n$ записывается в виде

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \equiv \{x_1, \ldots, x_n\}$$

и для любых двух векторов $\mathbf{u} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\mathbf{v} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ определено число

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Число это, если угодно, можно назвать *скалярным произведением векторов* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$ *относительно данного базиса* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Очевидно

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

а также

$$(\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = \lambda_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + \lambda_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}),$$

т. е. скалярное произведение по отношению к данному базису обладает свойствами симметрии и линейности обычного скалярного произведения, определенного в главе IV для векторов трехмерного пространства.

Если $(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$, то мы скажем, что векторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ *ортогональны* по отношению к базису $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ или что они *аннулируют* друг друга.

Если дано какое-нибудь множество векторов $M = \{\mathbf{v}\}$ и векторы $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ортогональны (в только что определенном смысле) к каждому из векторов $\mathbf{v} \in M$, то и всякая линейная комбинация $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2$ будет ортогональна к каждому вектору $\mathbf{v} \in M$.

Отсюда следует, что множество всех векторов $\mathbf{u} \in L^n$, ортогональных к каждому из векторов данного множества M, есть подпространство пространства L^n; мы будем его называть *аннулятором множества* M и обозначать через NM.

Нас будет интересовать случай, когда множество M само есть пространство $L^p \subset L^n$.

Пусть в пространстве L^p дан какой-нибудь базис, состоящий из векторов

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \{c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{c}_p &= \{c_{p1}, c_{p2}, \ldots, c_{pn}\}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Тогда аннулятор L^q подпространства L^p совпадает с аннулятором базиса $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_p$.

В самом деле, всякий вектор $\mathbf{u}$, аннулирующий все векторы $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_p$, аннулирует и всякую их линейную комбинацию, т. е. все векторы $\mathbf{v} \in L^p$. Обратное очевидно. Но аннулятор совокупности

векторов (11) есть не что иное, как пространство решений системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} c_{11}t_1 + c_{12}t_2 + \ldots + c_{1n}t_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_{p1}t_1 + c_{p2}t_2 + \ldots + c_{pn}t_n &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

имеющее размерность $n-p$.

Итак:

3° *Аннулятор p-мерного подпространства $L^p \subset L^n$ есть подпространство $L_1^q \subset L^n$ размерности $q = n-p$.*

Докажем теперь, что аннулятор пространства

$$L_1^q = NL^p$$

есть пространство L^p. Прежде всего, если $\mathbf{u}$ — какой-нибудь вектор из L^p, а $\mathbf{v}$ — любой вектор из $L_1^q = NL^p$, то $(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$ — каждый вектор $\mathbf{v}$ из L^p аннулирует все векторы из L_1^q, т. е. $\mathbf{v} \in NL_1^q$ и, значит, $L^p \subseteq NL_1^q$. Но размерность пространства NL_1^q есть, по доказанному, $n-q = n-(n-p) = p$, поэтому L^p, будучи p-мерным подпространством NL_1^q той же размерности p, совпадает с этим последним.

Итак, формула $NL_1^q = L^p$, или

$$NNL^p = L^p,$$

доказана.

Возьмем теперь в пространстве $L_1^q = NL^p$ какой-нибудь базис; векторы, являющиеся элементами этого базиса, обозначим через

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}^{(1)} &= \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \bar{\mathbf{a}}^{(q)} &= \{a_{q1}, a_{q2}, \ldots, a_{qn}\}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Тогда аннулятор пространства L_1^q, т. е. пространство L^p, есть пространство решений системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \ldots + a_{1n}t_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{q1}t_1 + a_{q2}t_2 + \ldots + a_{qn}t_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Эта система линейно независима (так как независима система векторов (13)); ее ранг равен числу уравнений, т. е. $q = n-p$. Теорема 13 доказана.

Второе доказательство теоремы 13. Пусть (11) — базис пространства L^p. Без ограничения общности можно предположить, что детерминант

$$d = \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{p1} & \ldots & c_{pp} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если

$$x=\{x_1, \ldots, x_p, \ldots, x_n\}$$

— произвольный вектор пространства L^p, то матрица

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1p} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{p1} & \ldots & c_{pp} & \ldots & c_{pn} \\ x_1 & \ldots & x_p & \ldots & x_n \end{pmatrix}$$

имеет ранг p; поэтому координаты вектора x удовлетворяют следующей системе $n-p$ уравнений:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1p} & c_{1,p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{p1} & \ldots & c_{pp} & c_{p,p+1} \\ x_1 & \ldots & x_p & x_{p+1} \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1p} & c_{1,p+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{p1} & \ldots & c_{pp} & c_{p,p+2} \\ x_1 & \ldots & x_p & x_{p+2} \end{vmatrix}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1p} & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{p1} & \ldots & c_{pp} & c_{pn} \\ x_1 & \ldots & x_p & x_n \end{vmatrix}=0.$$

Эти $n-p$ уравнений линейно независимы, так как в матрице, составленной из коэффициентов этих уравнений, минор порядка $n-p$, состоящий из последних $n-p$ ее столбцов, имеет детерминант, отличный от нуля. Он имеет диагональный вид, причем на главной диагонали стоит одно и то же число $d \neq 0$.

Вместе с тем мы получаем способ построения одной из систем уравнений пространства L^p, если нам известны координаты вектора, составляющего его базис.

ГЛАВА XIII

ЛИНЕЙНЫЕ, БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ НА ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Линейные функции

Задать (числовую) функцию f на векторном пространстве L^n (в размерности n) — значит дать правило, позволяющее поставить в соответствие каждому вектору $\mathbf{u} \in L^n$ некоторое число $f(\mathbf{u})$ (значение функции f для этого вектора $\mathbf{u}$). Если в пространстве задан некоторый базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, позволяющий каждый вектор $\mathbf{u} \in L^n$ записать в виде

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \equiv \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \tag{1}$$

то возникает задача: выразить для каждого вектора (1) значение $f(\mathbf{u})$ через координаты $x_1, \ldots, x_n$ вектора $\mathbf{u}$ (посредством некоторой формулы).

Определение 1. Функция f, определенная на пространстве L^n, называется *линейной*, если она удовлетворяет условиям:

1° $f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = f(\mathbf{u}_1) + f(\mathbf{u}_2)$ для любых двух векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in L^n$.

2° $f(\lambda\mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u})$ для любого вектора $\mathbf{u} \in L^n$ и любого числа λ.

Эти условия могут быть заменены одним условием:

$$f(\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2) = \lambda_1 f(\mathbf{u}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{u}_2), \tag{2}$$

из которого следует и общее условие:

$$f(\lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{u}_n) = \lambda_1 f(\mathbf{u}_1) + \ldots + \lambda_n f(\mathbf{u}_n)$$

для любых векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ из L^n и любых чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Для любого вектора $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ значение функции f есть $f(\mathbf{u}) = x_1 f(\mathbf{e}_1) + \ldots + x_n f(\mathbf{e}_n)$. Обозначим значение функции f для векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ через

$$f(\mathbf{e}_1) = a^{(1)}, \; f(\mathbf{e}_2) = a^{(2)}, \; \ldots, \; f(\mathbf{e}_n) = a^{(n)}. \tag{3}$$

Тогда имеем

$$f(\mathbf{u}) = a^{(1)}x_1 + \ldots + a^{(n)}x_n \quad (\text{для } \mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n). \tag{4}$$

Правая часть равенства (4) есть однородный многочлен первой степени, или линейная форма от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ [1]).

Итак, *если в пространстве* L^n *задан базис* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, *то линейная функция* f *записывается в виде линейной формы* (4), *выражающей значение* $f(\mathbf{u})$ *через координаты вектора* $\mathbf{u}$ (*относительно этого базиса*).

Важно заметить с самого начала: линейная функция (и вообще всякая числовая функция) в пространстве L^n не зависит от выбора того или иного базиса в этом пространстве. «Функция» — это значит: каждому вектору $\mathbf{u}$ поставлено в соответствие число $f(\mathbf{u})$; это число определено, как скоро определен вектор $\mathbf{u}$; выбор базиса в пространстве L^n здесь ни при чем. Но запись (4) в виде линейной формы, естественно, зависит от выбора базиса: если вместо базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ возьмем другой базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$, то вектор $\mathbf{u}$ относительно базиса $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ будет иметь уже другие координаты $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ и

$$f(\mathbf{u}) = x_1 f(\mathbf{e}_1) + \ldots + x_n f(\mathbf{e}_n) \equiv x'_1 f(\mathbf{e}'_1) + \ldots + x'_n f(\mathbf{e}'_n).$$

Полагая $b^{(1)} = f(\mathbf{e}'_1), \ldots, b^{(n)} = f(\mathbf{e}'_n)$, видим, что относительно базиса $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ та же функция $f(\mathbf{u})$ записывается в виде линейной формы:

$$f(\mathbf{u}) = b^{(1)} x'_1 + b^{(2)} x'_2 + \ldots + b^{(n)} x'_n \qquad (4')$$

$$(\text{для } \mathbf{u} = x'_1 \mathbf{e}'_1 + \ldots + x'_n \mathbf{e}'_n).$$

Естественно спросить: как выражаются коэффициенты $b^{(1)}, \ldots, b^{(n)}$ через коэффициенты $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$, если известно, что векторы $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ «нового» базиса даны своими координатами относительно

---

[1]) *Одночленом* от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется всякое выражение вида $ax_1^{m_1}x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$, где a — произвольное (вещественное или комплексное) число, а $m_1, \ldots, m_k$ — неотрицательные целые числа. Неотрицательное целое число $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ называется *степенью данного одночлена*. Если она равна нулю, то одночлен превращается в константу a. Сумма конечного числа одночленов от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *многочленом* от этих переменных. Наибольшее из чисел, являющихся степенями одночленов, входящих в состав данного многочлена, называется *степенью этого многочлена*. Если все одночлены, суммой которых является данный многочлен (все «члены» этого многочлена), имеют одну и ту же степень m, то многочлен называется *однородным* многочленом или *формой степени* m от данных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Формы первой степени называются *линейными* формами. Общий вид линейной формы от переменных $x_1, \ldots, x_n$ есть, очевидно, $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$. Формы второй степени называются *квадратичными*.

«старого» базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + c_{n1}\mathbf{e}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}'_i &= c_{1i}\mathbf{e}_1 + c_{2i}\mathbf{e}_2 + \ldots + c_{ni}\mathbf{e}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}'_n &= c_{1n}\mathbf{e}_1 + c_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + c_{nn}\mathbf{e}_n? \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Ответ дается автоматическим вычислением:

$$b^{(i)} = f(\mathbf{e}'_i) = c_{1i} f(\mathbf{e}_1) + \ldots + c_{ni} f(\mathbf{e}_n) \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n,$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} b^{(1)} &= c_{11}a^{(1)} + c_{21}a^{(2)} + \ldots + c_{n1}a^{(n)}, \\ b^{(2)} &= c_{12}a^{(1)} + c_{22}a^{(2)} + \ldots + c_{n2}a^{(n)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b^{(n)} &= c_{1n}a^{(1)} + c_{2n}a^{(2)} + \ldots + c_{nn}a^{(n)}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Мы видим, что

$$\begin{pmatrix} b^{(1)} \\ b^{(2)} \\ \vdots \\ b^{(n)} \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ \vdots \\ a^{(n)} \end{pmatrix}$$

— при переходе от базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ коэффициенты линейной формы (4) преобразуются так же, т. е. посредством той же матрицы, как базисные векторы.

§ 2. Билинейные функции и билинейные формы

Рассмотрим теперь функцию от двух переменных векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ пространства L^n, т. е. предположим, что дано правило, ставящее в соответствие каждой паре $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ векторов пространства L^n некоторое число $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$; предположим, кроме того, что эта функция является линейной по каждому из своих аргументов, т. е. что выполнены следующие условия:

$$\Psi(\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = \lambda_1\Psi(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + \lambda_2\Psi(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}),$$
$$\Psi(\mathbf{u}, \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2) = \lambda_1\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + \lambda_2\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)$$

(каковы бы ни были векторы $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}$; $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и числа λ_1, λ_2). Тогда говорим, что Ψ есть *билинейная функция* (подразумевается, от двух переменных — векторов данного векторного пространства L^n).

Спрашивается: если векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ заданы своими координатами относительно данного базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ пространства L^n, так что $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n$, то как выразится значение билинейной функции Ψ через координаты $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$? Ответ очень прост. Ведь

$$\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Psi(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n) = \\ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \Psi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \quad (1)$$

Положим теперь $\Psi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = a_{ij}$. Тогда из (1) вытекает, что

$$\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j \text{ для } \begin{cases} \mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n, \end{cases} \quad (2)$$

что и дает ответ на поставленный вопрос.

Многочлены вида

$$\psi(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j,$$

***линейные** по каждому из двух рядов переменных*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

***называются** билинейными формами от переменных x_i, y_j (точнее, **от двух рядов переменных** $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$). Матрица*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей билинейной формы $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$ или матрицей билинейной функции (2) относительно базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Билинейная форма называется *симметричной*, если симметрична ее матрица A (т. е. если $a_{ik} = a_{ki}$).

В частности, билинейная форма от двух пар переменных $x_1, x_2; y_1, y_2$ имеет вид

$$\psi(x_1, x_2; y_1, y_2) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 = \\ = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2)\,y_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2)\,y_2 = \\ = (a_{11}y_1 + a_{12}y_2)\,x_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2)\,x_2.$$

Вообще,

$$\psi(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} (a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n)\, x_i = \sum_{j=1}^{n} (a_{1j}x_1 + \ldots + a_{nj}x_n)\, y_j.$$

Вернемся к общему понятию билинейной функции $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Эта функция называется *симметричной*, если ее значение не меняется при перестановке аргументов, т. е. если для любых двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ имеем $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Psi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$. Тогда, в частности, $a_{ij} = \Psi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \Psi(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = a_{ji}$ — матрица A оказывается *симметричной*. Обратно, если в каком-нибудь базисе данная билинейная функция записывается в виде билинейной формы с симметричной матрицей, то значение функции $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, равное значению многочлена $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$, не меняется при замене в этом многочлене одного из двух рядов переменных $x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n$ другим, что означает равенство $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Psi(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, т. е. симметричность функции $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Итак, *симметричная билинейная функция записывается в любом базисе в виде симметричной билинейной формы. Обратно, если билинейная функция в каком-нибудь базисе записывается в виде симметричной билинейной формы, то она симметрична (и, следовательно, ее записью во всяком базисе будет симметричная билинейная форма)*.

Каждая функция $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ от двух переменных определяет функцию g от одного переменного, если положить

$$g(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Функция Φ, полученная по этому правилу из симметричной билинейной функции Ψ:

$$\Phi(\mathbf{u}) = \Psi(\mathbf{u}, \mathbf{u}),$$

называется *квадратичной функцией*, порожденной данной билинейной функцией Ψ.

Теорема 1. *Для каждой квадратичной функции Φ существует лишь одна порождающая ее симметричная билинейная функция Ψ, называемая полярной билинейной функцией от данной квадратичной.*

Доказательство. Пусть Ψ — какая-нибудь симметричная билинейная функция, порождающая данную квадратичную функцию:

$$\Phi(\mathbf{u}) = \Psi(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Для доказательства единственности функции Ψ достаточно доказать формулу

$$\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\{\Phi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{v})\}, \qquad (3)$$

позволяющую вычислить значение функции Ψ для любой пары векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, зная значения функции Φ для каждого из векторов

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$. Подлежащую доказательству формулу (3) можно переписать в виде

$$\Phi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{u}) + 2\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v}) \qquad (3')$$

или (по определению функции Φ) в виде

$$\Psi(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}) = \Phi(\mathbf{u}) + 2\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{v}). \qquad (3'')$$

Но в таком виде она непосредственно вытекает из билинейности и симметрии функции $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$:

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \Psi(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \Psi(\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \\ &= \Psi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \Psi(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \Psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \\ &= \Psi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \Psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Если в данном базисе симметричная билинейная функция $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ записывается в виде

$$\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_iy_k \quad \text{для} \quad \begin{cases}\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n,\end{cases} \quad a_{ik} = a_{ki},$$

то очевидно

$$\Phi(\mathbf{u}) = \Psi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k \quad \text{для} \quad \mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Многочлен вида $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$, все члены которого суть одночлены $a_{ik}x_ix_k$ второй степени, есть не что иное, как однородный многочлен второй степени, или квадратичная форма (от переменных $x_1, \ldots, x_n$). Мы при этом предполагаем, что $a_{ik} = a_{ki}$, что не представляет ограничения общности (при $a_{ik} \neq a_{ki}$ мы бы заменили каждый из этих коэффициентов их полусуммой), так что фактически коэффициент при x_ix_k в $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ при $i \neq k$ есть $2a_{ik} = 2a_{ki}$.

В частности, квадратичная форма от двух переменных x, y имеет вид $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, а от трех переменных x, y, z имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2.$$

Симметричная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей квадратичной формы* $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$, ее детерминант называется *дискриминантом квадратичной формы*.

Мы получили следующий результат: *квадратичная функция* $\Phi(\mathbf{u}) = \Psi(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, *порожденная данной билинейной функцией* Ψ, *во всяком базисе записывается в виде квадратичной формы, имеющей ту же матрицу, что и билинейная форма, являющаяся записью функции* Ψ.

Другими словами: квадратичная функция Φ и ее полярная функция Ψ во всяком базисе записываются в виде форм (квадратичной, соответственно билинейной), имеющих одну и ту же (симметричную) матрицу. Поэтому *билинейная форма, имеющая ту же матрицу, что и данная квадратичная, называется полярной формой от данной квадратичной.*

§ 3. Матрица билинейной и квадратичной формы и ее преобразование при переходе к новому базису (при преобразовании переменных)

В пространстве L^n с заданным базисом $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ линейная функция записывается в виде линейной формы, а билинейная — в виде билинейной формы.

Чтобы задать линейную форму, достаточно задать набор ее коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$; для того чтобы задать билинейную (или квадратичную) форму, надо задать ее матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Мы выяснили в § 1, как преобразуется набор коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$ линейной формы при переходе от базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$. Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ преобразуется матрица A билинейной формы? Мы сейчас дадим ответ на этот вопрос.

Теорема 2. *Пусть билинейная функция* $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *записывается относительно базиса* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *в виде билинейной формы*

$$\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k \quad \text{при} \quad \begin{cases} \mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n \end{cases} \tag{2}$$

с матрицей A, *а относительно базиса* $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ *в виде билинейной формы*

$$\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,k=1}^{n} a'_{ik} x'_i y'_k \quad \text{при} \quad \begin{cases} \mathbf{u} = x'_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + x'_n\mathbf{e}'_n, \\ \mathbf{v} = y'_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + y'_n\mathbf{e}'_n \end{cases} \tag{2'}$$

с матрицей A'.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + c_{n1}\mathbf{e}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}_n' &= c_{1n}\mathbf{e}_1 + c_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + c_{nn}\mathbf{e}_n. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Полагая [1])

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

имеем [2])

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + \ldots + c_{1n}x_n', \\ x_2 &= c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + \ldots + c_{2n}x_n', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= c_{n1}x_1' + c_{n2}x_2' + \ldots + c_{nn}x_n'. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В этих обозначениях имеет место формула

$$A' = C^* AC, \tag{6}$$

где C^*, как всегда, есть транспонированная матрица к C (т. е. матрица коэффициентов в (3)).

Прежде чем доказать формулу (6), укажем на некоторые ее непосредственные следствия.

Так как $\det C^* = \det C$, то

$$\det A' = \det A \cdot (\det C)^2.$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *При линейном преобразовании* (5) *дискриминант квадратичной формы* $\Phi(\mathbf{u}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$ *для* $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ *умножается на квадрат детерминанта матрицы преобразования* (4) *и, следовательно, сохраняет свой знак.*

В частности, если преобразование C ортогонально, то $(\det C)^2 = 1$, *и, следовательно, при ортогональном преобразовании* (5) *дискриминант квадратичной формы не меняется.*

Доказательство формулы (6). Возьмем матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

состоящие из одного столбца и n строк.

---

[1]) То есть обозначая через C матрицу, транспонированную к матрице коэффициентов в (3).

[2]) Гл. XII, § 2.

Транспонированная к X матрица X^* состоит из одной строки и n столбцов:

$$X^* = (x_1 \ \dots \ x_n).$$

Умножая матрицу A на матрицу Y, получим матрицу

$$AY = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{pmatrix}, \tag{8}$$

состоящую снова из одного столбца и n строк, а умножая X^* на матрицу AY, получим уже матрицу X^*AY, состоящую из одной строки и одного столбца, т. е. из одного элемента

$$x_1(a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n) + x_2(a_{21}y_1 + \dots + a_{2n}y_n) + \dots \\ \dots + x_n(a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n),$$

который есть не что иное, как наша билинейная форма

$$\psi(x_1, \ \dots, \ x_n; \ y_1, \ \dots, \ y_n).$$

Итак, билинейная форма ψ (изображающая функцию $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$) может быть записана в виде следующего произведения матриц:

$$\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \psi(x_1, \ \dots, \ x_n; \ y_1, \ \dots, \ y_n) = X^*AY. \tag{9}$$

Запишем преобразование (5) в виде матричного равенства:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix},$$

т. е.

$$X = CX', \ Y = CY', \tag{10}$$

и, значит,

$$X^* = (X')^* C^*. \tag{11}$$

Подставим (10) и (11) в (9), получим тождество

$$\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \psi(x_1, \ \dots, \ x_n; \ y_1, \ \dots, \ y_n) \equiv X^*AY \equiv (X')^*(C^*AC)\,Y'.$$

Но в силу (9) с заменой A' на C^*AC матричное произведение

$$(X')^*(C^*AC)\,Y'$$

представляет собою билинейную форму ψ' от переменных $x_1', \ \dots, \ x_n'$; $y_1', \ \dots, \ y_n'$ с матрицей C^*AC и

$$\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \psi'(x_1', \ \dots, \ x_n'; \ y_1', \ \dots, \ y_n') \text{ при } \begin{cases} \mathbf{u} = x_1'\mathbf{e}_1' + \dots + x_n'\mathbf{e}_n', \\ \mathbf{v} = y_1'\mathbf{e}_1' + \dots + y_n'\mathbf{e}_n'. \end{cases}$$

Так как матрица формы $\psi'(x'_1, \ldots, x'_n; y'_1, \ldots, y'_n)$ была обозначена через A', то формула (6) доказана.

Подставляя в предыдущие формулы всюду $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ и, следовательно, $y_1 = x_1, \ldots, y_n = x_n$; $y'_1 = x'_1, \ldots, y'_n = x'_n$, получаем

Следствие. *Пусть квадратичная функция* $\Phi(\mathbf{u})$, *определенная в* L^n, *записывается относительно базиса* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *квадратичной формой* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ с симметричной матрицей A:

$$\Phi(\mathbf{u}) \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \quad \textit{при} \quad \mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

а относительно базиса $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ — *квадратичной формой* $\varphi'(x'_1, \ldots, x'_n)$ *с матрицей* A':

$$\Phi(\mathbf{u}) \equiv \varphi'(x'_1, \ldots, x'_n) \equiv \sum_{i,k=1}^{n} a'_{ik} x'_i x'_k \quad \textit{при} \quad \mathbf{u} = x'_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + x'_n\mathbf{e}'_n,$$

причем переход от базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *к базису* $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ *дается формулами* (3). *Тогда*

$$A' = C^*AC. \tag{6}$$

§ 4. Ранг билинейной и квадратичной формы (билинейной и квадратичной функции)

Рангом билинейной (а также *рангом квадратичной*) формы называется ранг ее матрицы. Одна и та же билинейная (квадратичная) функция $\Phi(\mathbf{u})$ в пространстве L^n представляется, в зависимости от выбора того или иного базиса, различными билинейными (соответственно квадратичными) формами, матрицы которых связаны формулой (6) § 3. Однако имеет место замечательный факт: у всех этих матриц ранг один и тот же. Итак, имеет место

Теорема 4. *Все билинейные* (*все квадратичные*) *формы, представляющие в различных базисах пространства* L^n *одну и ту же билинейную* (*соответственно квадратичную*) *функцию, определенную в этом пространстве, имеют один и тот же ранг. Его естественно назвать рангом соответствующей функции.*

Для доказательства этой теоремы достаточно убедиться в том, что матрицы, образующие левую и правую части равенства (6) § 3, имеют один и тот же ранг. Так как при этом C и C^* суть невырождающиеся матрицы, то достаточно доказать следующее вспомогательное предложение:

Теорема 5. *Умножая произвольную матрицу* A (*слева или справа*) *на невырожденную квадратную матрицу* Q, *мы не меняем ее ранга.*

Доказательство этой теоремы, как мы увидим, опирается на следующее предложение, с доказательства которого мы и начнем.

Теорема 6. *Ранг произведения матриц не превосходит ранга каждой из перемножаемых матриц.*

Теорему 6 достаточно доказать для произведения двух матриц. Итак, пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pk} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix},$$

$$C=AB.$$

Тогда

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\dots+a_{ip}b_{pk}. \tag{1}$$

Записывая это равенство для данного k и любого $i=1, 2, \dots, m$, видим, что k-й столбец матрицы C есть линейная комбинация всех p столбцов матрицы A (с коэффициентами $b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{pk}$).

Это верно для каждого k, так что столбцы матрицы C являются линейными комбинациями столбцов матрицы A.

Так как ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых столбцов, то из только что сказанного и из теоремы 5 главы XII сразу вытекает, что ранг матрицы C не превосходит ранга матрицы A.

Аналогично (опираясь все на то же равенство (1)) мы доказали бы, что ранг C не превосходит и ранга B. Теорема 6 доказана.

Теорема 5 является легким следствием теоремы 6. В самом деле, пусть A — матрица ранга r, состоящая из m строк и n столбцов. Пусть Q_1 — невырожденная матрица порядка n, Q_2 — невырожденная матрица порядка m. Тогда определены матрицы $C_1=AQ_1$ и $C_2=Q_2A$; докажем, что их ранги r_1 и r_2 совпадают с рангом r матрицы A.

Прежде всего, по теореме 6 имеем

$$r_1\leqslant r, \quad r_2\leqslant r.$$

Но

$$A=C_1Q_1^{-1}, \quad A=Q_2^{-1}C_2$$

и, значит,

$$r\leqslant r_1, \quad r\leqslant r_2,$$

т. е. $r=r_1$, $r=r_2$. Теорема 5, а следовательно, и теорема 4 доказаны.

§ 5. Существование канонического базиса для всякой квадратичной и всякой билинейной функции («приведение квадратичных форм к каноническому виду»)

Квадратная матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ik} = 0, \text{ если } i \neq k, \tag{1}$$

все элементы которой, не лежащие на главной диагонали, равны нулю, называется *матрицей диагонального вида* или просто *диагональной матрицей*.

Квадратичная, а также билинейная форма, матрица которой имеет диагональный вид, называется *формой канонического вида*, или просто *канонической формой*, или *канонической записью* (*каноническим представлением*) *данной квадратичной функции* или *квадратичной формы*.

Теорема 7. *Для каждой квадратичной и для каждой симметричной билинейной функции, определенной в пространстве* L^n, *существует канонический базис, т. е. базис* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, *в котором данная функция имеет каноническую запись.*

При этом число отличных от нуля среди коэффициентов $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ во всякой канонической записи равно рангу функции.

Мы знаем, что каждая симметричная билинейная функция является полярной функцией от одной и только от одной квадратичной функции и что обе эти функции во всяком базисе имеют одну и ту же матрицу. Поэтому достаточно доказать теорему 7 для квадратичных функций. Заметим прежде всего, что ранг матрицы диагонального вида (1), очевидно, равен числу отличных от нуля ее членов $a_{11}, \ldots, a_{nn}$. Поэтому, если квадратичная функция в каком-нибудь базисе имеет каноническую запись, то число отличных от нуля коэффициентов в этой записи равно рангу функции — второе утверждение теоремы 7 есть следствие первого. Переходим к доказательству первого утверждения. Тривиальный случай, когда $\Phi(\mathbf{u}) = 0$ для всех $\mathbf{u} \in L^n$, оставляем в стороне.

Пусть в пространстве L^n дана квадратичная функция Φ, записывающаяся в некотором базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ в виде $\Phi(\mathbf{u}) \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$ для $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$. Пусть, наряду с базисом $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, дан второй базис $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$. Для каждого вектора $\mathbf{u} \in L^n$ имеем $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \equiv x'_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + x'_n\mathbf{e}'_n$, причем координаты $x_1, \ldots, x_n$ и $x'_1, \ldots, x'_n$ вектора $\mathbf{u}$

соответственно в базисах $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ связаны формулами преобразования координат:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x'_1 + \ldots + c_{1n}x'_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= c_{n1}x'_1 + \ldots + c_{nn}x'_n, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0\ ^{1}).$$

Тогда

для

$$\Phi(\mathbf{u}) \equiv \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k \equiv \sum_{i,\,k=1}^{n} a'_{ik}x'_ix'_k$$

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = x'_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + x'_n\mathbf{e}'_n.$$

Базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и, следовательно, представление функции Φ в виде формы $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ считаем данными; задача состоит в том, чтобы подобрать базис $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ или, что то же самое, формулы преобразования переменных (2) таким образом, чтобы матрица

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & \ldots & a'_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{n1} & \ldots & a'_{nn} \end{pmatrix} = C^*AC$$

квадратичной формы $\varphi'(x'_1, \ldots, x'_n) \equiv \sum_{i,\,k=1}^{n} a'_{ik}x'_ix'_k$, представляющей функцию Φ, в этом базисе имела диагональный вид, т. е. чтобы было $a'_{ik} = 0$ для любых $i \neq k$.

Задача эта обычно называется *задачей приведения квадратичной формы* $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ *к каноническому виду* $\varphi'(x'_1, \ldots, x'_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} a'_{ii}x'^2_i$ посредством линейного преобразования (2) переменных $x_1, \ldots, x_n$ (к переменным $x'_1, \ldots, x'_n$).

Будем ее решать индукцией по числу переменных (т. е. по числу измерений пространства L^n) — мы увидим, что все дело сведется к простой алгебраической выкладке [2]).

---

[1]) Так что формулы перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= c_{11}\mathbf{e}_1 + \ldots + c_{n1}\mathbf{e}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}'_n &= c_{1n}\mathbf{e}_1 + \ldots + c_{nn}\mathbf{e}_n. \end{aligned}\right\} \tag{2*}$$

[2]) Излагаемый ниже метод доказательства теоремы 7 принадлежит великому французскому математику Лагранжу (J. L. Lagrange, 1736—1813).

При $n=1$ форма φ имеет вид $\varphi(x_1)=a_{11}x^2$, и этот вид уже является каноническим. Предположим, что теорема 7 доказана для $m<n$. Докажем ее при $m=n$. Предположим сначала, что в форме $\varphi(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ хотя бы один коэффициент вида a_{ii}, т. е. коэффициент при квадрате одного из переменных, отличен от нуля. Без ограничения общности можем предположить, что $a_{11}\neq 0$. Тогда выражение

$$\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)^2 \tag{3}$$

(после раскрытия скобки) является однородным многочленом второй степени, т. е. квадратичной формой от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, в которой члены, содержащие x_1, суть в точности те же, что и в форме $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Поэтому разность

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n)-\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n)^2$$

есть квадратичная форма уже от $n-1$ переменных $x_2, \ldots, x_n$, которую мы обозначим через $\varphi_1(x_2, \ldots, x_n)$:

$$\varphi_1(x_2, \ldots, x_n)=\varphi(x_1, \ldots, x_n)-\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n)^2.$$

В силу индуктивного предположения существует линейное преобразование переменных $x_2, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{aligned} x_2&=c_{22}x_2'+\ldots+c_{2n}x_n',\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n&=c_{n2}x_2'+\ldots+c_{nn}x_n', \end{aligned}\right\} \quad \left|\begin{matrix} c_{22} & \ldots & c_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ c_{n2} & \ldots & c_{nn}\end{matrix}\right|\neq 0, \tag{2_{n-1}}$$

приводящее форму $\varphi_1(x_2, \ldots, x_n)$ к каноническому виду

$$a_2'x_2'^2+\ldots+a_n'x_n'^2.$$

Поэтому имеет место равенство [1])

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n)=\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n)^2+a_2'x_2'^2+\ldots+a_n'x_n'^2. \tag{4}$$

Теперь положим

$$x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n, \qquad a_1'=\frac{1}{a_{11}}, \tag{5}$$

что позволяет нам записать (4) в виде

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n)=a_1'x_1'^2+a_2'x_2'^2+\ldots+a_n'x_n'^2, \tag{6}$$

[1]) Являющееся тождеством относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если разрешить систему (2_{n-1}) относительно $x_2', \ldots, x_n'$ (что возможно ввиду $\det C\neq 0$) и подставить полученные выражения $x_2', \ldots, x_n'$ через $x_2, \ldots, x_n$ в правую часть равенства (6).

— форма $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ приобрела относительно переменных $x'_1, \ldots x'_n$ канонический вид; переход от переменных $x_1, \ldots, x_n$ к переменным $x'_1, \ldots, x'_n$ есть линейное преобразование переменных с невырожденной матрицей. В самом деле, разрешая (5) относительно x_1, получим

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} x'_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n. \qquad (5')$$

Подставляя сюда вместо $x_2, \ldots, x_n$ их выражения (2_{n-1}) через $x'_2, \ldots, x'_n$, можем — после приведения подобных членов — переписать (5') в виде

$$x_1 = c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + \ldots + c_{1n}x'_n, \qquad c_{11} = \frac{1}{a_{11}} \neq 0,$$

что вместе с (2_{n-1}) дает нам искомые формулы преобразования переменных

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + \ldots + c_{1n}x'_n, \\ x_2 &= \quad c_{22}x'_2 + \ldots + c_{2n}x'_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \quad c_{n2}x'_2 + \ldots + c_{nn}x'_n \end{aligned}\right\} \qquad (2_n)$$

с детерминантом

$$\det C = c_{11}\begin{vmatrix} c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Итак, преобразование (2_n) приводит форму $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ к каноническому виду (6) и решает, таким образом, поставленную задачу в предположении, что хоть одно $a_{ii} \neq 0$.

Остается рассмотреть случай, когда все $a_{ii} = 0$. Таким образом, для всех отличных от нуля коэффициентов a_{ik} формы $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ имеем $i \neq k$. Среди этих коэффициентов имеются отличные от нуля (иначе было бы $\Phi(u) \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ — тривиальный случай, исключенный выше). Итак, пусть, например, $a_{12} \neq 0$.

Тогда

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 2a_{12}x_1x_2 + \text{члены, каждый из которых содержит хотя бы одно из переменных } x_3, \ldots, x_n\ ^{1}).$$

---

[1]) В самом деле, в форме $\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ членами, не содержащими ни одного из переменных $x_3, \ldots, x_n$, являются лишь $a_{11}x_1^2$, $2a_{12}x_1x_2$, $a_{22}x_2^2$; в наших предположениях $a_{11} = a_{22} = 0$, и остается только $2a_{12}x_1x_2$.

Сделаем преобразование

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x'_1 - x'_2, \\ x_2 &= x'_1 + x'_2, \\ x_3 &= \quad\quad x'_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \quad\quad\quad x'_n, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

детерминант которого есть

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Преобразование (7) переводит форму $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ в форму $\varphi'(x'_1, \dots, x'_n)$, которая состоит из $2a_{12}(x'_1 - x'_2)(x'_1 + x'_2)$, т. е. из $2a_{12}x'^2_1 - 2a_{12}x'^2_2$ и из членов, содержащих по крайней мере одно из переменных $x'_3, \dots, x'_n$; ни один из этих членов не может сократиться ни с $2a_{12}x'^2_1$, ни с $2a_{12}x'^2_2$, поэтому форма $\varphi(x'_1, \dots, x'_n)$ содержит x'^2_1 с коэффициентом $2a_{12}$, отличным от нуля; значит, $\varphi'(x'_1, \dots, x'_n)$, по предыдущему, приводится к каноническому виду линейным преобразованием переменных $x'_1, \dots, x'_n$ к каким-то новым переменным $x''_1, \dots, x''_n$. Переход от первоначальных переменных $x_1, \dots, x_n$ к переменным $x''_1, \dots, x''_n$ (слагаясь из двух невырожденных линейных преобразований) является невырожденным линейным преобразованием, приводящим форму $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ к каноническому виду. Теорема 7 доказана.

Теорема 8 («закон инерции для квадратичных форм»). *Во всех канонических записях данной квадратичной функции* Φ:

$$\Phi(\mathbf{u}) \equiv a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2$$

для

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n,$$

число положительных среди коэффициентов $a_1, \dots, a_n$ *одно и то же; оно называется индексом*[1]) *данной квадратичной функции (и индексом любой квадратичной формы, представляющей эту функцию в каком-либо базисе).*

Доказательство. Пусть даны какие-нибудь два канонических представления квадратичной функции Φ:

$$\Phi(\mathbf{u}) \equiv \varphi'(x'_1, \dots, x'_n) \equiv a'_1x'^2_1 + \dots + a'_rx'^2_r \tag{8'}$$

[1]) Распространено излишне длинное название «положительный индекс инерции», которого мы придерживаться не будем.

для

$$\mathbf{u} = x'_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + x'_n\mathbf{e}'_n,$$
$$\Phi(\mathbf{u}) \equiv \varphi''(x''_1, \ldots, x_n) = a'_1x''^2_1 + \ldots + a_rx''^2_r \qquad (8'')$$

для

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}''_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}''_n.$$

В канонических представлениях (8′) и (8″) мы пишем лишь члены, отличные от нуля; их число, по только что доказанному, в обоих представлениях одно и то же и равно рангу r функции Φ.

Предположим, что в представлении (8′) имеется k положительных коэффициентов, а в представлении (8″) число положительных коэффициентов есть $h \neq k$. Без ограничения общности можем предположить, что среди коэффициентов a'_i положительными являются $a'_1, \ldots, a'_k$ (и только они) и что среди коэффициентов a''_i положительны $a''_1, \ldots, a''_h$. Переход от переменных $x_1, \ldots, x_n$ к переменным $x'_1, \ldots, x'_n$ и к переменным $x''_1, \ldots, x''_n$ осуществляется невырожденными линейными преобразованиями, так что, обратно, как $x'_1, \ldots, x'_n$, так и $x''_1, \ldots, x''_n$ линейно выражаются через $x_1, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= c'_{11}x_1 + \ldots + c'_{1n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n &= c'_{n1}x_1 + \ldots + c'_{nn}x_n, \end{aligned}\right\} \quad c' = \begin{vmatrix} c'_{11} & \ldots & c'_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c'_{n1} & \ldots & c'_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (9')$$

$$\left.\begin{aligned} x''_1 &= c''_{11}x_1 + \ldots + c''_{1n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x''_n &= c''_{n1}x_1 + \ldots + c''_{nn}x_n, \end{aligned}\right\} \quad c'' = \begin{vmatrix} c''_{11} & \ldots & c''_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c''_{n1} & \ldots & c''_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (9'')$$

Без ограничения общности можем предположить, что $k < h \leqslant r$. Напишем уравнения, полученные приравниванием нулю правых частей первых k тождеств (9′) и последних $n-h$ тождеств (9″). Получим всего

$$k + n - h < n$$

однородных уравнений (относительно n неизвестных $x_1, \ldots, x_n$):

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &\equiv c'_{11}x_1 + \ldots + c'_{1n}x_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_k &\equiv c'_{k1}x_1 + \ldots + c'_{kn}x_n = 0, \\ x''_{h+1} &\equiv c''_{h+1,\,1}x_1 + \ldots + c''_{h+1,\,n}x_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x''_n &\equiv c''_{n1}x_1 + \ldots + c''_{nn}x_n = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Так как число уравнений меньше числа неизвестных, то система (10) имеет решения, отличные от нулевого. Пусть $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ — одно из таких решений. Подставляя значения $x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n$ в (9′)

и (9″), получаем числовые значения переменных x_i' и x_i'' ($i=1, 2, \ldots, n$)[1]), причем

$$x_1' = \ldots = x_k' = 0,$$
$$x_{k+1}'' = \ldots = x_n'' = 0,$$

так что при подстановке найденных числовых значений переменных $x_1', \ldots, x_n'$ и $x_1'', \ldots, x_n''$ в (8′) и (8″) получим числовое значение многочлена $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, равное одновременно

$$a_{k+1}' x_{k+1}'^2 + \ldots + a_r' x_r'^2 \qquad (11')$$

и

$$a_1'' x_1''^2 + \ldots + a_h'' x_h''^2. \qquad (11'')$$

Но все коэффициенты при квадратах в (11′) отрицательны, а в (11″) — положительны, поэтому (11′) и (11″) могут выражать одно и то же число лишь при условии, что одновременно все числа $x_{k+1}', \ldots, x_r'$ и $x_1'', \ldots, x_h''$ равны нулю. Значит, выполнены не только тождества

$$c_{h+1,1}'' \xi_1 + \ldots + c_{h+1,n}'' \xi_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_{n1}'' \xi_1 + \ldots + c_{nn}'' \xi_n = 0,$$

но и тождества

$$c_{11}'' \xi_1 + \ldots + c_{1n}'' \xi_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_{h1}'' \xi_1 + \ldots + c_{hn}'' \xi_n = 0,$$

т. е. $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ есть решение системы

$$c_{11}'' x_1 + \ldots + c_{1n}'' x_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_{n1}'' x_1 + \ldots + c_{nn}'' x_n = 0$$

из n однородных уравнений с n неизвестными; значит, детерминант этой системы, т. е. детерминант c'', должен быть равен нулю, тогда как он отличен от нуля. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание. Пусть Φ — квадратичная функция ранга r, определенная в пространстве L^n; индекс функции Φ обозначим через p. Тогда в любом каноническом представлении функции Φ (относительно любого канонического базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$) $\Phi(\mathbf{u}) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2$ для $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ число положительных коэффициентов среди $a_1, \ldots, a_n$ равно p, число отрицательных равно $q = r - p$, а число коэф-

---

[1]) Их следовало бы обозначать через $x_i'(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, соответственно $x_i''(\xi_1, \ldots, \xi_n)$; мы будем по-прежнему писать x_i', x_i'', помня, что это — числа, получающиеся, если в (9′) и (9″) подставить вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$ их числовые значения $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

фициентов a_i, равных нулю, есть $n-r$. Число $s=p-q$ называется *сигнатурой* квадратичной функции Φ (и всякой квадратичной формы, представляющей относительно какого-нибудь базиса функцию Φ). Из трех чисел r, p, s любые два определяют третье (и $q=r-p$).

В самом деле, если даны $r=p+q$ и $s=p-q$, то $p=\frac{r+s}{2}$, $q=\frac{r-s}{2}$; если даны r и p, то $s=2p-r$.

Полученные результаты могут быть дополнены следующим предложением.

Теорема 9. *Для каждой квадратичной функции* Φ *ранга* r *и индекса* p, *определенной в* n*-мерном пространстве* L^n, *существует базис* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, *относительно которого эта функция записывается в виде*

$$\Phi(\mathbf{u}) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 0 \cdot x_{r+1}^2 + \ldots + 0 \cdot x_n^2$$

для $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$.

В самом деле, предположим, что мы уже нашли базис $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$, в котором функция Φ имеет каноническую запись

$$\Phi = a_1\xi_1^2 + \ldots + a_n\xi_n^2 \quad \text{для } \mathbf{u} = \xi_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \ldots + \xi_n\boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

Среди коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$ число отличных от нуля равно r; поэтому без ограничения общности можно предположить (изменив, если нужно, нумерацию единичных векторов $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$), что $a_1, \ldots, a_r$ отличны от нуля, а $a_{r+1} = \ldots = a_n = 0$. При этом среди коэффициентов $a_1, \ldots, a_r$ имеются p положительных, пусть это будут

$$a_1 = \alpha_1^2, \ \ldots, \ a_p = \alpha_p^2,$$

а остальные — отрицательные

$$a_{p+1} = -\alpha_{p+1}^2, \ \ldots, \ a_r = -\alpha_r^2;$$

все $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ можно предположить положительными.

Перейдем теперь к базису

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \frac{1}{\alpha_1}\boldsymbol{\varepsilon}_1, \\
&\ldots\ldots \\
\mathbf{e}_r &= \frac{1}{\alpha_r}\boldsymbol{\varepsilon}_r, \\
\mathbf{e}_{r+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}, \\
&\ldots\ldots \\
\mathbf{e}_n &= \boldsymbol{\varepsilon}_n,
\end{aligned}$$

что означает преобразование координат

$$\xi_1 = \frac{1}{\alpha_1}x_1, \ \ldots, \ \xi_r = \frac{1}{\alpha_r}x_r, \ \xi_{r+1} = x_{r+1}, \ \ldots, \ \xi_n = x_n,$$

в результате которого получаем

$$\Phi(\mathbf{u}) \equiv \alpha_{1}^{2}\xi_{1}^{2} + \ldots + \alpha_{p}^{2}\xi_{p}^{2} - \alpha_{p+1}^{2}\xi_{p+1}^{2} - \ldots - \alpha_{r}^{2}\xi_{r}^{2} + \\ + 0\cdot\xi_{r+1}^{2} + \ldots + 0\cdot\xi_{n}^{2} = x_{1}^{2} + \ldots + x_{p}^{2} - x_{p+1}^{2} - \ldots - x_{r}^{2} + \\ + 0\cdot x_{r+1}^{2} + \cdots + 0\cdot x_{n}^{2}$$

для

$$\mathbf{u} = \xi_{1}\mathbf{e}_{1} + \ldots + \xi_{n}\mathbf{e}_{n} \equiv x_{1}\mathbf{e}_{1} + \ldots + x_{n}\mathbf{e}_{n},$$

что и требовалось доказать.

Квадратичная функция $\Phi(\mathbf{u})$ и представляющая ее в любом данном базисе квадратичная форма

$$\varphi(x_{1}, \ldots, x_{n}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{i}x_{j}$$

называются *положительно определенными,* если для любого вектора $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ значение функции $\Phi(\mathbf{u})$ положительно. Итак, квадратичная форма

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{i}x_{j}$$

положительно определенна, если она обращается в нуль, лишь когда обращаются в нуль одновременно все переменные $x_{1}, \ldots, x_{n}$, и положительна, если значение по крайней мере одного переменного отлично от нуля.

Из этого определения сразу следует

Замечание 1. *Если квадратичная функция* $\Phi(\mathbf{u})$ *положительно определенна, то во всяком представлении ее в виде квадратичной формы*

$$\Phi(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{i}x_{j}$$

все коэффициенты a_{ii} *при квадратах переменных положительны.* В самом деле, если положим $a_{11} \leqslant 0$, то, полагая

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_{1} = 1\cdot\mathbf{e}_{1} + 0\cdot\mathbf{e}_{2} + \ldots + 0\cdot\mathbf{e}_{n},$$

имеем

$$\Phi(\mathbf{e}_{1}) = a_{11} \leqslant 0$$

вопреки предположению. В частности, положительны все коэффициенты $\lambda_{1}, \lambda_{2}, \ldots, \lambda_{n}$ в каноническом представлении

$$\Phi(\mathbf{u}) = \lambda_{1}x_{1}'^{2} + \ldots + \lambda_{n}x_{n}'^{2}$$

положительно определенной функции $\Phi(\mathbf{u})$. Обратно, из того, что все $\lambda_{1}, \ldots, \lambda_{n}$ положительны, очевидно, следует, что $\Phi(\mathbf{u}) > 0$ для любого $\mathbf{u} = x_{1}'\mathbf{e}_{1}' + \ldots + x_{n}'\mathbf{e}_{n}'$, т. е. что функция $\Phi(\mathbf{u})$ положительно определенна.

Итак, имеет место

Теорема 10. *Для того чтобы квадратичная функция* $\Phi(\mathbf{u})$ $\left(\text{квадратичная форма } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right)$ *была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы в ее каноническом представлении (относительно канонического базиса* $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$)

$$\Phi(\mathbf{u}) = \lambda_1 x_1'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2 \quad \text{для } \mathbf{u} = x'_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + x'_n\mathbf{e}'_n$$

все коэффициенты λ_i *были положительны.*

Из теоремы 10, в частности, следует, что всякая положительно определенная квадратичная функция $\Phi(\mathbf{u})$ в n-мерном пространстве L^n имеет ранг n.

Замечание 2. Дискриминант положительно определенной квадратичной формы

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

положителен.

Так как при переходе от одного базиса к другому дискриминант квадратичной формы сохраняет свой знак (теорема 3), то достаточно рассмотреть дискриминант

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

канонического представления данной положительно определенной квадратичной формы, который (так как все $\lambda_i > 0$), очевидно, положителен.

Квадратичная функция (форма) называется *полуопределенной положительно*, если для всех векторов $\mathbf{u}$ имеем $\Phi(\mathbf{u}) \geqslant 0$. Очевидно, для положительной полуопределенности квадратичной функции необходимо и достаточно, чтобы в ее каноническом представлении все коэффициенты λ_i были неотрицательны.

Квадратичная функция (форма) называется *отрицательно определенной* или соответственно *отрицательно полуопределенной,* если она для всякого $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ принимает отрицательное, соответственно неположительное, значение. Это бывает тогда и только тогда, когда все коэффициенты в каноническом представлении отрицательны, соответственно неположительны.

При всяком представлении отрицательно определенной квадратичной функции $\Phi(\mathbf{u})$ в виде формы

$$\Phi(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

коэффициенты a_{ii} при квадратах переменных отрицательны.

Условимся, наконец, называть симметричную билинейную функцию $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *положительно* (соответственно *отрицательно*) *опреде-*

ленной, если этим свойством обладает порожденная ею квадратичная функция

$$\Phi(\mathbf{u}) = \Psi(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Замечание 3. В случае двух переменных докажем следующее предложение. *Для того чтобы квадратичная форма*

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы три числа

$$a_{11},\quad a_{22},\quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

были положительны.

Необходимость условия вытекает из замечаний 1 и 2. Доказываем достаточность. Так как $\delta > 0$, то в каноническом представлении

$$\varphi(x, y) \equiv \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

формы $\varphi(x, y)$ имеем $\lambda_1\lambda_2 > 0$, т. е. λ_1 и λ_2 одного знака; если бы λ_1 и λ_2 были отрицательны, то форма $\varphi(x, y)$ была бы отрицательно определенной, и тогда было бы $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$ — вопреки предположению.

ГЛАВА XIV

ТОЧЕЧНО-ВЕКТОРНОЕ АФФИННОЕ n-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО R^n

§ 1. Определение n-мерного аффинного пространства

В трехмерном пространстве мы имели дело и с точками, и с векторами; каждые две точки A, B, данные в определенном порядке, однозначно определяли вектор $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$; каждый вектор $\mathbf{u}$ мы могли приложить к любой точке M, и это определяло нам точку N — конец вектора $\mathbf{u}$, приложенного к M. Прикладывая вектор $\mathbf{u}$ одновременно ко всем точкам пространства, мы получали вполне определенное преобразование — сдвиг всего пространства на вектор $\mathbf{u}$. При получающемся таким образом взаимно однозначном соответствии между векторами и определенными ими преобразованиями пространства (сдвигами) сумме двух векторов соответствует сумма производимых ими сдвигов. Поэтому мы пришли (в конце § 1 главы II) к возможности отождествлять (свободные) векторы с производимыми ими сдвигами пространства.

Все это мы хотим теперь обобщить с трех на произвольное число n измерений. Как и в главе XII, мы пойдем при этом по аксиоматическому пути.

Основное определение I. *Аффинное точечно-векторное n-мерное пространство R^n* есть множество, состоящее из элементов двух родов: «точек» и «векторов» пространства, о природе которых мы не делаем никаких предположений. При этом предполагаются выполненными следующие четыре условия — «*аксиомы n-мерного аффинного пространства*» [1]):

I. *Множество всех векторов пространства R^n есть n-мерное векторное пространство (которое будем обозначать через V^n).*

---

[1]) Они были впервые сформулированы одним из наиболее выдающихся математиков первой половины текущего столетия Германом Вейлем (Hermann Weyl, 1888—1958).

II. *Каждые две точки* A, B (*данные в определенном порядке*) *определяют единственный вектор*

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}. \tag{1}$$

III. *Если даны произвольный вектор* $\mathbf{u}$ *и произвольная точка* A, *то существует единственная точка* B *такая, что*

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}. \tag{1}$$

Другими словами: точка A и вектор $\mathbf{u}$ определяют единственную точку B таким образом, что вектор, определенный (по аксиоме II) парой точек A и B, есть именно вектор $\mathbf{u}$.

Пара «точка A и вектор $\mathbf{u}$» называется «*вектором* $\mathbf{u}$, *приложенным к точке* A» (или «*закрепленным*» в этой точке); сама точка A называется *начальной точкой* приложенного к ней вектора $\mathbf{u}$, а точка B (однозначно определенная парой A, $\mathbf{u}$) называется *концом* вектора $\mathbf{u}$ (приложенного к точке A). Мы видим, что закрепить вектор $\mathbf{u}$ в точке A — значит записать его в виде (1). Иногда нам будет удобно говорить, что вектор $\overrightarrow{AB}$ есть вектор, ведущий из точки A в точку B.

Формулируем, наконец, последнюю аксиому:

IV. *Если* $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{AB}$ *и* $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{BC}$, *то*

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \overrightarrow{AC}. \tag{2}$$

Выведем первые следствия из этих аксиом, но сначала сделаем несколько замечаний, удобных для дальнейшего.

1. Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = \mathbf{w}$, то $C = B$ — это непосредственно следует из аксиомы III.

2. При любом выборе точки A вектор $\overrightarrow{AA}$ есть нулевой вектор $\mathbf{0}$.

В самом деле, если $\mathbf{0} = \overrightarrow{AB}$, то для любого вектора $\mathbf{u} = \overrightarrow{MA}$ должно быть $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$, т. е. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA}$ или $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}$, а это в силу утверждения 1 означает $B = A$ и $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA}$.

3. Если $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, то $-\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$.

В самом деле, $-\mathbf{u}$ есть единственный вектор, удовлетворяющий условию $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$; но $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$, откуда и следует $\overrightarrow{BA} = -\mathbf{u}$.

4. Если даны вектор $\mathbf{u}$ и точка B, то существует единственная точка A такая, что $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$.

В самом деле, возьмем вектор $-\mathbf{u}$ и приложим его к точке B, т. е. найдем ту единственную точку A, для которой $-\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$; тогда $\mathbf{u} = -(-\mathbf{u}) = \overrightarrow{AB}$. Если $\overrightarrow{A'B} = \mathbf{u}$, то $-\mathbf{u} = \overrightarrow{BA'}$, откуда (в силу утверждения 1) заключим, что $A' = A$.

В силу аксиомы III и утверждения 4 имеет место утверждение 5. Произвольно данный вектор $\mathbf{u}$ порождает вполне определенное взаимно однозначное отображение множества всех точек пространства R^n на себя.

Это отображение, называемое *сдвигом пространства* R^n на вектор $\mathbf{u}$, состоит в том, что каждой точке $A \in R^n$ ставится в соответствие конец B приложенного к точке A вектора $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$. При сдвиге (в силу аксиомы IV) сумме векторов соответствует сумма произведенных ими сдвигов пространства [1]).

Пусть $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ — какой-нибудь вектор, и пусть при сдвиге на вектор $\mathbf{v}$ точки P и Q переходят соответственно в P' и Q'; это значит, что $\mathbf{v} = \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$. Докажем, что тогда $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{u}$. Но $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} + \overrightarrow{Q'Q} = \overrightarrow{PQ}$, т. е. $\mathbf{v} + \overrightarrow{P'Q'} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{u}$, или $\overrightarrow{P'Q'} = \mathbf{u}$, что и требовалось доказать.

§ 2. Системы координат. Арифметическое пространство R^n. Изоморфизм всех n-мерных пространств между собою

Система координат в n-мерном аффинном пространстве R^n, по определению, состоит

из некоторой точки O («*начало координат*»)

и из *базиса* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ многообразия всех векторов V^n данного аффинного пространства R^n.

Координаты какого-нибудь *вектора* $\mathbf{u}$ в этой системе координат суть, естественно, координаты этого вектора относительно базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$; они не зависят от выбора начала координат.

Координатами произвольной *точки* M пространства называются координаты вектора $\overrightarrow{OM}$.

Вектор $\mathbf{u}$ с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, как всегда, обозначаем через $\mathbf{u} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; точку M с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обозначаем через

$$M = (x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{1}$$

Таким образом, запись (1) означает то же, что и запись

$$\overrightarrow{OM} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}. \tag{1'}$$

Так как координаты данного вектора относительно данного базиса определены однозначно (гл. XII, § 2), то и координаты данной точки M относительно данной системы координат (совпадая, по оп-

[1]) Каждый сдвиг есть преобразование; сумма сдвигов означает сумму (произведение) этих преобразований.

ределению, с координатами вектора $\overrightarrow{OM}$) также определены однозначно.

Пусть дан какой-нибудь вектор

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB},$$

причем $\mathbf{u} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Тогда $\overrightarrow{OA} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $\overrightarrow{OB} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Но $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$; так как при сложении векторов их координаты складываются, то последнее равенство равносильно системе равенств

$$a_i + x_i = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е.

$$x_i = b_i - a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

—при любом закреплении вектора $\mathbf{u}$ его координаты равны разностям между соответствующими координатами концевой и начальной точек вектора.

Или, другими словами: прилагая вектор $\mathbf{u} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ к точке $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, получим $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, где

$$B = (a_1 + x_1, \ a_2 + x_2, \ \ldots, \ a_n + x_n).$$

Переход от одной системы координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_n$ к другой $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2' \ldots \mathbf{e}_n'$ производится совершенно так же, как при $n = 3$; соответствующие формулы отличаются от формул главы VIII, § 1, лишь тем, что теперь матрицы C и C^* суть матрицы любого порядка n.

В качестве важнейшего примера n-мерного аффинного пространства построим n-мерное арифметическое пространство A^n следующим образом[1]). И точка, и векторы этого пространства суть наборы из n действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, отмеченные дополнительным значком, указывающим, является ли данный набор точкой или вектором; за этот значок можно принять, например, скобки—круглые в случае точек, фигурные—в случае векторов. Итак, $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть точка, а $\mathbf{u} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ есть вектор пространства A^n.

I. Векторы $\mathbf{u} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ при этом образуют арифметическое векторное пространство V^n; это значит, что

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} + \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} = \{x_1 + y_1, \ x_2 + y_2, \ \ldots, \ x_n + y_n\},$$
$$\lambda\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n\},$$
$$\mathbf{0} = \{0, 0, \ldots, 0\}.$$

[1]) Этот пример, как мы увидим в этом же параграфе, на самом деле исчерпывает все содержание понятия n-мерного аффинного пространства: несколькими строками ниже мы определим изоморфизм двух аффинных пространств и докажем, что все n-мерные аффинные пространства изоморфны пространству A^n и, следовательно, изоморфны между собою.

Связь между точками и векторами, описываемая аксиомами II—IV, осуществляется следующим образом:

II. Пара точек $A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ определяет вектор

$$\mathbf{u}=\overrightarrow{AB}=\{b_1-a_1, b_2-a_2, \ldots, b_n-a_n\}.$$

III. Точка $A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и вектор $\mathbf{u}=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ определяет точку

$$B=(a_1+x_1, a_2+x_2, \ldots, a_n+x_n).$$

При этом аксиома IV выполнена (так же как, очевидно, выполнены и аксиомы I, II, III).

Пусть дано взаимно однозначное отображение множества всех точек и векторов аффинного пространства A соответственно на множество всех точек и векторов аффинного пространства B, являющееся изоморфным отображением многообразия всех векторов пространства A на многообразие всех векторов пространства B и удовлетворяющее, кроме того, следующему условию:

(*) Если при данном отображении точки A_1 и A_2 пространства A отображаются соответственно на точки B_1 и B_2 пространства B, то и вектор $\mathbf{u}=\overrightarrow{A_1A_2}$ отображается на вектор $\mathbf{v}=\overrightarrow{B_1B_2}$.

Такое отображение называется *изоморфным отображением* аффинного пространства A на аффинное пространство B. Пространства A и B называются *изоморфными* между собою, если одно из них можно изоморфно отобразить на другое. Так как изоморфизм между аффинными пространствами включает в себя изоморфизм многообразий их векторов, то, очевидно, всякие два изоморфных аффинных пространства имеют одну и ту же размерность.

Докажем, что и, обратно, два аффинных пространства, имеющих одну и ту же размерность, изоморфны между собою. Этот изоморфизм мы получим, построив изоморфное отображение произвольного n-мерного аффинного пространства R^n на арифметическое n-мерное пространство A^n. Для этого возьмем в R^n какую-нибудь систему координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_n$. Тогда каждая точка M и каждый вектор $\mathbf{u}$ пространства R^n однозначно записываются в виде

$$M=(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \mathbf{u}=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

и сама эта запись устанавливает взаимно однозначное отображение множества всех точек и множества всех векторов пространства R^n соответственно на множество всех точек и всех векторов пространства A^n, удовлетворяющее, очевидно, условию (*). Изоморфизм между любым пространством R^n и пространством A^n, а значит, и между любыми двумя n-мерными аффинными пространствами A^n и B^n этим доказан.

§ 3. r-мерные плоскости n-мерного аффинного пространства; r-мерные параллелепипеды

1. Прямая в n-мерном пространстве. Определение Π_1. Пусть в n-мерном аффинном пространстве R^n дана точка $A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и ненулевой вектор $\mathbf{u}_0=\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. Этими данными определено множество π^1, состоящее из всех точек M, являющихся концевыми точками всевозможных векторов вида $t\mathbf{u}_0$, где t — произвольное действительное число, приложенных к точке A. Так определенное множество π^1 называется *прямой*, проходящей через точку A (в пространстве R^n) и имеющей (или «несущей на себе») *направляющий вектор* $\mathbf{u}_0$.

Точка $M=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, являющаяся концом вектора $\overrightarrow{AM}=t\mathbf{u}_0$, приложенного к точке A, имеет, очевидно, координаты

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1+t\alpha_1,\\ x_2 &= a_2+t\alpha_2,\\ &\ldots\ldots\\ x_n &= a_n+t\alpha_n. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Эта система равенств, в которой параметр t пробегает все действительные значения, дает нам все точки прямой π^1 и только точки прямой π^1; поэтому система (1) называется *параметрическим уравнением* этой *прямой*; единственное число — «уравнение», не «уравнения» объясняется (как и в случае $n=3$) тем, что система уравнений (1) представляет собою координатную запись всего лишь одного векторного уравнения

$$\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}, \qquad \text{где } \overrightarrow{AB}=\mathbf{u}_0, \tag{1'}$$

которому удовлетворяют все точки прямой π^1 и только они.

Пусть $A=(a_1, \ldots, a_n)$ и $B=(b_1, \ldots, b_n)$ — две произвольные точки; построим прямую, проходящую через точку A и имеющую вектор $\overrightarrow{AB}$ своим направляющим вектором. Это будет прямая, проходящая через две точки A и B; она единственна — ее параметрическое уравнение будет (1′) или

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1+t(b_1-a_1),\\ x_2 &= a_2+t(b_2-a_2),\\ &\ldots\ldots\\ x_n &= a_n+t(b_n-a_n). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

При $t=0$ получим точку A, при $t=1$ — точку B; точки, получающиеся из (1′) или (2) при t, удовлетворяющем неравенству

$0 \leqslant t \leqslant 1$, по определению образуют *замкнутый отрезок* $\overline{AB}$ нашей прямой. При $0 < t < 1$ получаем *открытый отрезок* прямой π^1.

Равенства (2) можно переписать в виде

$$x_i = (1-t)\,a_i + tb_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2'}$$

или, полагая $s = 1 - t$, в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= sa_1 + tb_1, \\ x_2 &= sa_2 + tb_2, \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= sa_n + tb_n, \end{aligned}\right\} \tag{2''}$$

что мы кратко записываем так:

$$M = sA + tB. \tag{2}$$

Здесь числа s и t пробегают всевозможные действительные значения, связанные между собою лишь равенством

$$s + t = 1.$$

Эти числа s и t называются *барицентрическими координатами точки* M (на прямой) *в системе барицентрических координат*, состоящей из пары точек A и B.

Точки открытого отрезка $\overline{AB}$ при этом, очевидно, характеризуются тем, что $0 < t < 1$ (значит, и $0 < s < 1$), т. е. что и s, и t положительны.

Как известно из механики (в случае $n = 3$), точка с положительными барицентрическими координатами s и t есть центр тяжести масс s и t, помещенных соответственно в точках A и B. Отсюда и название «барицентрические координаты» (barycentrum — центр тяжести); поэтому равенство (2) выражают словами, говоря, что точка M есть взвешенная сумма точек A и B (числа s и t суть «веса», с которыми точки A и B входят в сумму $M = sA + tB$).

2. Общее определение r-мерной плоскости n-мерного аффинного пространства R^n. Вернемся к определению прямой на стр. 348. Если вектор $\mathbf{u}_0$ отличен от нуля, то множество всех векторов вида $t\mathbf{u}_0$ есть одномерное векторное многообразие, а именно одномерное векторное подпространство пространства V^n, и каждое одномерное подпространство $V^1 \subset V^n$ состоит из всех векторов вида $t\mathbf{u}_0$ при некотором $\mathbf{u}_0 \neq \mathbf{0}$. Поэтому данное выше определение прямой может быть кратко сформулировано так:

Прямая π^1 есть множество всех точек M, получаемых, если к какой-нибудь фиксированной точке $A \in R^n$ прилагать все векторы, принадлежащие некоторому одномерному подпространству многообразия всех векторов пространства R^n.

Непосредственным обобщением этого является

Определение Π_r. Пусть дано какое-нибудь r-мерное, $0 \leqslant r \leqslant n$, векторное подпространство V^r многообразия V^n всех векторов n-мерного аффинного пространства R^n. Будем прилагать всевозможные векторы $\mathbf{v} \in V^r$ к какой-нибудь фиксированной точке $A \in R^n$; множество полученных точек M — концов векторов $\overrightarrow{AM} = \mathbf{v} \in V^r$ — есть, по определению, *r-мерная плоскость* π^r (заданная точкой A и r-мерным векторным многообразием V^r). Векторы $\mathbf{v}$ этого многообразия V^r называются *векторами, лежащими в плоскости* π^r.

Беря в векторном пространстве V^r какой-нибудь базис $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$, можем, очевидно, сказать:

Всякая r-мерная плоскость $\pi^r \in R^n$ задается точкой A и линейно независимой системой, состоящей из r векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ пространства R^n, как множество точек, получаемых, если к точке A прилагать векторы вида

$$\mathbf{v} = t_1\mathbf{u}_1 + \ldots + t_r\mathbf{u}_r,$$

где коэффициенты $t_1, \ldots, t_r$ пробегают независимо друг от друга всевозможные действительные значения. Полученная плоскость π^r называется *r-мерной плоскостью, натянутой на точку A и векторы* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$.

В такой форме наше определение является непосредственным обобщением задания обыкновенной плоскости в трехмерном пространстве точкой и парой неколлинеарных векторов.

Многообразие всех векторов $\mathbf{v} \in V^r$, лежащих в плоскости π^r, есть множество всех векторов вида $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$, где P и Q суть точки плоскости π^r.

В самом деле, пусть $\mathbf{v} \in V^r$ и $P \in \pi^r$; приложим вектор $\mathbf{v}$ к точке P; получим $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$, надо доказать, что $Q \in \pi^r$. Но

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ},$$

т. е. $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{AP}$. По предположению $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} \in V^r$, а так как $P \in \pi^r$, то и $\overrightarrow{AP} \in V^r$; поэтому $\overrightarrow{AQ} \in V^r$, т. е. $Q \in \pi^r$.

Пусть, обратно, $P \in \pi^r$, $Q \in \pi^r$; докажем, что $\overrightarrow{PQ} \in V^r$. Имеем $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$. Так как и $\overrightarrow{AP} \in V^r$, и $\overrightarrow{AQ} \in V^r$, то и $\overrightarrow{PQ} \in V^r$, чем утверждение доказано.

Из доказанного следует, что точки плоскости π^r и векторы, лежащие в этой плоскости, удовлетворяют (при действиях над векторами и точками, определенными в R^n) аксиомам r-мерного аффинного пространства. Другими словами: всякая r-мерная плоскость пространства R^n, рассматриваемая как множество лежащих в ней точек и векторов, является r-мерным аффинным подпространством пространства R^n. Обратно, пусть P^r есть r-мерное аффинное под-

пространство аффинного пространства R^n (т. е. r-мерное аффинное пространство, точки и векторы которого суть соответственно точки и векторы пространства R^n, причем соотношения, связывающие векторы, а также векторы и точки в P^r, суть те же самые, которые для этих векторов и точек установлены в R^n). Тогда, прилагая к какой-нибудь точке $A \in P^r$ все векторы аффинного пространства P^r, получим в силу аксиом II и III все точки $M \in P^r$ и только точки $M \in P^r$, так что P^r есть r-мерная плоскость пространства R^n.

Итак, понятие r-мерной плоскости n-мерного аффинного пространства совпадает с понятием r-мерного аффинного подпространства пространства R^n. При этом $0 \leqslant r \leqslant n$. При $r = 0$ получим нульмерную плоскость, состоящую из единственной точки A; в ней лежит лишь нулевой вектор. При $r = n$ единственной r-мерной плоскостью пространства R^n является само пространство R^n. Очевидно, одномерными плоскостями пространства R^n являются лежащие в R^n прямые.

По определению r-мерной плоскости, натянутой на точку A и векторы $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$, ее точки $M = (x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяют следующему векторному уравнению:

$$\overrightarrow{AM} = t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \ldots + t_r\mathbf{u}_r, \tag{3}$$

где параметры $t_1, t_2, \ldots, t_r$ пробегают независимо друг от друга все действительные значения. Пусть

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \{\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)}\}, \\ \mathbf{u}_2 &= \{\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots, \alpha_n^{(2)}\}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{u}_r &= \{\alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)}, \ldots, \alpha_n^{(r)}\}. \end{aligned}\right\}$$

Если приравнять между собою, при каждом $i = 1, 2, \ldots, n$, i-е координаты векторов, образующих левую и правую части уравнения (3), то получим следующую систему уравнений, эквивалентную уравнению (3):

$$\left.\begin{aligned} x_1 - a_1 &= \alpha_1^{(1)}t_1 + \alpha_1^{(2)}t_2 + \ldots + \alpha_1^{(r)}t_r, \\ x_2 - a_2 &= \alpha_2^{(1)}t_1 + \alpha_2^{(2)}t_2 + \ldots + \alpha_2^{(r)}t_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - a_n &= \alpha_n^{(1)}t_1 + \alpha_n^{(2)}t_2 + \ldots + \alpha_n^{(r)}t_r. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Уравнение (3) или эквивалентная ему система (4) называется *параметрическим уравнением r-мерной плоскости.*

Если в уравнении (3) или эквивалентной ему системе (4) рассматривать лишь значения параметров $t_1, \ldots, t_r$, принадлежащие сегменту $[0, 1]$, то полученные точки M образуют множество, называемое (r-мерным) *параллелепипедом*, натянутым на точку A и приложенные к ней векторы $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$.

§ 4. Геометрически независимые системы точек. Барицентрические координаты. Симплексы

Начнем со следующей простой леммы.

Пусть $0 \leqslant p < r \leqslant n$. Всякая p-мерная плоскость π^p в n-мерном аффинном пространстве R^n содержится в некоторой r-мерной плоскости.

В самом деле, возьмем в π^p какую-нибудь линейно независимую систему, состоящую из p векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p$. Так как $p < r \leqslant n$, то эта система может быть дополнена до линейно независимой системы, состоящей из r векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_r$. Эти векторы порождают r-мерное подпространство V^r векторного пространства V^n всех векторов, лежащих в A^n. Произвольная точка A и векторное многообразие V^r определяют r-мерную плоскость π^r, очевидно, содержащую плоскость π^p.

Пусть в пространстве R^n дано множество, состоящее из конечного числа, $r+1$, точек

$$A_0, A_1, \ldots, A_r. \tag{1}$$

Рассмотрим всевозможные векторы $\overrightarrow{A_iA_j}$, ведущие из любой из этих точек в любую другую. Подпространство, порожденное всеми этими векторами (в пространстве всех вообще векторов, лежащих в R^n), обозначим через $V(A_0, \ldots, A_r)$, его размерность — через $p = p(A_0, \ldots, A_r)$. Так как

$$\overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{A_iA_0} + \overrightarrow{A_0A_j} = -\overrightarrow{A_0A_i} + \overrightarrow{A_0A_j},$$

то все векторы $\overrightarrow{A_iA_j}$ линейно выражаются через векторы, ведущие из одной какой-нибудь фиксированной точки (1), например из точки A_0, во все остальные, так что множество, состоящее из векторов

$$\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{A_0A_1}, \ \ldots, \ \mathbf{u}_r = \overrightarrow{A_0A_r}, \tag{2}$$

является системой образующих пространства $V(A_0, \ldots, A_r)$, максимальное число линейно независимых среди них равно размерности p всего пространства $V(A_0, \ldots, A_r)$, и, значит,

$$p \leqslant r.$$

Нумерацию точек (1) выберем так, чтобы первые p среди векторов $\mathbf{u}_i$, т. е.

$$\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{A_0A_1}, \ \mathbf{u}_2 = \overrightarrow{A_0A_2}, \ \ldots, \ \mathbf{u}_p = \overrightarrow{A_0A_p}, \tag{3}$$

составляли линейно независимую систему. Тогда p-мерная плоскость $\pi = \pi(A_0, \ldots, A_p)$, натянутая на точку A_0 и векторы (3), содержа

все векторы (2), содержит и все концы этих векторов, т. е. все точки (1). Не существует плоскости размерности $< p$, которая содержала бы все точки (1), так как тогда в этой плоскости лежали бы и все векторы (3), что противоречит их линейной независимости. Всякая плоскость, содержащая все точки (1), содержит как точку A_0, так и векторы (3), значит, содержит и плоскость π, натянутую на них. Итак, доказано следующее предложение:

Пусть дано конечное множество точек

$$A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_r \tag{1}$$

пространства R^n. Тогда определено наименьшее число $p = p(A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_r)$, являющееся размерностью плоскости пространства R^n, содержащей все эти точки (1); это число (которое можно было бы назвать «мерой независимости» точек (1)) равно наибольшему числу линейно независимых среди векторов, ведущих из какой-нибудь определенной точки[1]) системы (1) (например, из точки A_0) во все остальные точки этой системы. При этом имеется одна-единственная p-мерная плоскость, содержащая все точки (1), и эта p-мерная плоскость $\pi^p = \pi(A_0,\ \ldots,\ A_r)$ называется плоскостью, натянутой на точки $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_r$.

Дополним этот результат следующим определением:

Если $p(A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_r) = r$, т. е. если мера независимости точек $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_r$ имеет наибольшее возможное значение r, то точки $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_r$ называются *геометрически независимыми* (или просто *независимыми*) между собою в пространстве R^n.

Из предыдущего следует:

Точки $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_r$ тогда и только тогда геометрически независимы, когда векторы $\overrightarrow{A_0A_1},\ \overrightarrow{A_0A_2},\ \ldots,\ \overrightarrow{A_0A_r}$ линейно независимы, или, что то же, когда точки (1) (векторы (2)) не лежат ни в какой плоскости размерности $< r$.

Во всякой r-мерной плоскости пространства R^n можно (бесконечным числом различных способов) выбрать независимую систему из $r+1$ точек; всякая независимая система из $r+1$ точек n-мерного аффинного пространства R^n содержится в единственной r-мерной плоскости этого пространства.

Рассмотрим в пространстве R^n независимую систему из $r+1$ точек, заданных своими координатами (в какой-нибудь системе координат пространства R^n):

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= (a_1^0,\ a_2^0,\ \ldots,\ a_n^0),\\ A_1 &= (a_1^1,\ a_2^1,\ \ldots,\ a_n^1),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_r &= (a_1^r,\ a_2^r,\ \ldots,\ a_n^r). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

[1]) Все равно, какой именно.

Единственную r-мерную плоскость, содержащую эти точки, обозначим через π^r.

Положим

$$\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{A_0A_1}, \quad \mathbf{u}_2 = \overrightarrow{A_0A_2}, \quad \ldots, \quad \mathbf{u}_r = \overrightarrow{A_0A_r}.$$

Тогда

$$\mathbf{u}_i = (a_1^i - a_1^0,\ a_2^i - a_2^0,\ \ldots,\ a_n^i - a_n^0) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

Плоскость π^r натянута на точку A_0 и векторы $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$, поэтому координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ любой точки $M = (x_1, \ldots, x_n)$ плоскости π^r однозначно записываются в виде

$$x_k = a_k^0 + \lambda_1 (a_k^1 - a_k^0) + \lambda_2 (a_k^2 - a_k^0) + \ldots + \lambda_r (a_k^r - a_k^0) \qquad (5)$$
$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Давая параметрам $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ всевозможные действительные значения, получим из уравнений (5) всевозможные точки $M = (x_1, \ldots, x_n)$ плоскости π^r и только точки этой плоскости.

Положим

$$\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_r.$$

Тогда система равенств (5) переходит в систему равенств

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda_0 a_1^0 + \lambda_1 a_1^1 + \ldots + \lambda_r a_1^r, \\ x_2 &= \lambda_0 a_2^0 + \lambda_1 a_2^1 + \ldots + \lambda_r a_2^r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \lambda_0 a_n^0 + \lambda_1 a_n^1 + \ldots + \lambda_r a_n^r, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

что мы кратко переписываем в виде одного равенства

$$M = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_r A_r \qquad (\overline{6})$$

— точка M есть взвешенная сумма точек $A_0, A_1, \ldots, A_r$, взятых соответственно с весами $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Веса $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ в равенстве $(\overline{6})$ пробегают всевозможные действительные значения, связанные единственным соотношением

$$\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \ldots - \lambda_r,$$

т. е.

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_r = 1. \qquad (7)$$

Для каждой точки $M \in \pi^r$ единственным образом определяются удовлетворяющие условию (7) числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — веса точки M во взвешенной сумме $(\overline{6})$.

Обратно, всякий набор чисел $\lambda_0, \ldots, \lambda_r$, удовлетворяющих условию (7), однозначно определяет по формулам (6) или $(\overline{6})$ точку M, если дана независимая система точек $A_0, A_1, \ldots, A_r$.

Коэффициенты $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ в представлении (6) или (6̄) называются *барицентрическими координатами точки* M относительно системы точек $A_0, A_1, \ldots, A_r$ в r-мерной плоскости π^r, определенной этими точками[1]).

Множество тех точек $M \in \pi^r$, все барицентрические координаты которых (относительно системы $A_0, A_1, \ldots, A_r$) положительны, называется *r-мерным открытым симплексом* с вершинами $A_0, A_1, \ldots, A_r$; точки, барицентрические координаты которых относительно той же системы $A_0, A_1, \ldots, A_r$ неотрицательны, образуют, *по определению*, *замкнутый симплекс* с вершинами $A_0, A_1, \ldots, A_r$. Очевидно, замкнутый симплекс содержит в себе открытый симплекс с теми же вершинами.

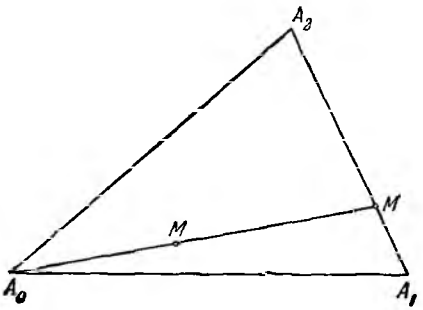


Рис. 154.

Мы уже видели, что одномерный симплекс с вершинами A_0, A_1 есть просто отрезок $\overline{A_0A_1}$ (открытый, соответственно замкнутый).

Легко доказать, что двумерный симплекс с вершинами A_0, A_1, A_2 есть просто открытый треугольник $A_0A_1A_2$ (т. е. множество всех внутренних точек этого треугольника).

В самом деле, всякая внутренняя точка M треугольника есть внутренняя точка единственного отрезка вида $\overline{A_0M'}$, где M' есть (внутренняя) точка отрезка $\overline{A_1A_2}$ (рис. 154).

Поэтому

$$M = \lambda_0 A_0 + \lambda' M', \text{ где } \lambda_0 > 0,\ \lambda' > 0,\ \lambda_0 + \lambda' = 1, \qquad (8')$$

$$M' = \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2, \quad \text{где } \mu_1 > 0,\ \mu_2 > 0,\ \mu_1 + \mu_2 = 1. \qquad (8'')$$

Подставляя (8″) в (8′), получим

$$M = \lambda_0 A_0 + \lambda' (\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2),$$

т. е.

$$M = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2,$$

где

$$\lambda_1 = \lambda' \mu_1, \quad \lambda_2 = \lambda' \mu_2.$$

[1]) Таким образом, система барицентрических координат в какой-либо r-мерной плоскости π^r аффинного пространства R^n задается любой независимой совокупностью $r+1$ точек $A_0, A_1, \ldots, A_r$ этой плоскости. Понятие барицентрических координат ввел немецкий геометр А. Ф. Мебиус (1790—1868).

При этом все числа λ_0, λ_1, λ_2 положительны и

$$\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=\lambda_0+\lambda'(\mu_1+\mu_2)=\lambda_0+\lambda'=1.$$

Обратно, пусть $M=\lambda_0A_0+\lambda_1A_1+\lambda_2A_2$, причем $\lambda_0>0$, $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ и $\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1$. Можно написать

$$M=\lambda_0A_0+(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_1A_1+\mu_2A_2),$$

где

$$\mu_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2},\quad \mu_2=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2},$$

значит,

$$\mu_1>0,\quad \mu_2>0,\quad \mu_1+\mu_2=1.$$

Точка $\mu_1A_1+\mu_2A_2=M'$ есть внутренняя точка отрезка $\overline{A_1A_2}$, и $M=\lambda_0A_0+(\lambda_1+\lambda_2)M'$, где $\lambda_0+(\lambda_1+\lambda_2)=1$, так что M есть внутренняя точка отрезка $\overline{A_0M'}$, т. е. внутренняя точка треугольника $A_0A_1A_2$.

Читателю предоставляется самому убедиться (основываясь на только что доказанном и продолжая рассуждать аналогичным образом), что трехмерный открытый симплекс с вершинами A_0, A_1, A_2, A_3 есть (открытый) тетраэдр $A_0A_1A_2A_3$.

Замечание. Множество X точек n-мерного пространства R^n называется *выпуклым*, если, каковы бы ни были две точки P и Q этого множества, оно содержит и все точки отрезка $\overline{PQ}$.

Все пространство R^n, а также всякая лежащая в нем плоскость, является выпуклым множеством. Выпуклым множеством является также и симплекс любого числа измерений (как открытый, так и замкнутый), а также любой параллелепипед (пусть читатель докажет все эти утверждения). Выпуклым является также как пустое множество, так и всякое одноточечное множество, т. е. множество, состоящее лишь из одной точки[1]). Имея в виду последнее утверждение, читатель легко докажет важную теорему: пересечение любой (конечной или бесконечной) совокупности выпуклых множеств, лежащих в данном R^n, есть выпуклое множество. Всякое множество X, лежащее в R^n, содержится в некотором выпуклом множестве (за которое можно взять, например, все пространство R^n). Поэтому можно говорить о (непустой) совокупности всех выпуклых множеств $Z\supseteq X$, содержащих данное произвольное множество $X\subset R^n$.

---

[1]) Доказательство этого утверждения является элементарным логическим упражнением; упражнения такого рода обязательны для каждого изучающего математику.

Следовательно, определено и выпуклое множество $\overline{X}$, являющееся пересечением всех выпуклых множеств Z, содержащих данное множество X. Множество $\overline{X}$ называется «*выпуклым замыканием*» (или *выпуклой оболочкой*) множества X. Оно является наименьшим выпуклым множеством, лежащим в данном R^n и содержащим данное множество X.

Последнее утверждение имеет следующий смысл: каково бы ни было выпуклое множество Y, содержащее множество X, множество Y содержит и $\overline{X}$. Полезным упражнением для читателя было бы доказательство следующей важной теоремы. Пусть X — конечное множество точек $a_0, \ldots, a_r$, образующих в R^n геометрически независимую систему. Тогда выпуклое замыкание $\overline{X}$ множества X есть замкнутый симплекс с вершинами $a_0, a_1, \ldots, a_r$.

§ 5. Системы линейных уравнений

В главе XII мы рассматривали лишь системы однородных линейных уравнений, теперь рассмотрим любые системы. Итак, пусть дана система m уравнений первой степени с n неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \ldots + a_{1n}t_n &= b_1, \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{2n}t_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}t_1 + a_{m2}t_2 + \ldots + a_{mn}t_n &= b_m. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Решением этих уравнений является, как и в случае однородной системы, всякий набор чисел $x_1, \ldots, x_n$, обращающий при подстановке $t_1 = x_1, \ldots, t_n = x_n$ систему (1) в систему числовых тождеств. Но, в отличие от случая однородной системы, мы теперь, в общем случае, будем решение $x_1, \ldots, x_n$ рассматривать не как вектор, а как точку $M = (x_1, \ldots, x_n)$ арифметического пространства R^n (или, что приводит к тому же, любого n-мерного аффинного пространства с заданной в нем системой координат). В частном случае, когда система (1) оказывается однородной, мы будем отождествлять точку $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с вектором $\overrightarrow{OM} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, что позволит нам по-прежнему говорить о решениях однородных систем как о векторах.

Матрицей системы (1) будем по-прежнему называть матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

составленную из коэффициентов при неизвестных; ее ранг называется *рангом системы уравнений* (1).

Матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{3}$$

называется *расширенной матрицей системы* (1) (или, когда невозможны недоразумения,— просто «*расширенной матрицей*»). Система (1) называется *линейно независимой*, если совокупность всех строк расширенной матрицы (3) есть линейно независимая система.

Если заменить правые части в уравнениях (1) нулями, то получится однородная система уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots + a_{1n}t_n &= 0, \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{2n}t_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}t_1 + a_{m2}t_2 + \dots + a_{mn}t_n &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1_0}$$

называемая *однородной системой*, соответствующей системе (1).

Начнем с некоторых совершенно простых, но важных предложений. Прежде всего, в отличие от однородных систем, которые всегда имеют по крайней мере одно решение, а именно нулевое — $\{0, 0, \dots, 0\}$, неоднородная система может не иметь ни одного решения; в этом случае система называется *несовместной*. Примером несовместной системы может служить система

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0, \end{aligned}$$

а также система

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Менее тривиален следующий пример. Пусть в трехмерном пространстве дана плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{I}$$

и прямая, определяемая уравнениями

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Тогда три уравнения

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

тогда и только тогда несовместны, когда прямая (II) параллельна (в собственном смысле) плоскости (I).

В этом случае все векторы, лежащие на прямой (II), лежат и в плоскости (I); матрица системы (III) имеет ранг 2; расширенная же матрица имеет ранг 3 (если бы она имела ранг 2, то прямая (II) лежала бы в плоскости (I)).

Имеет место общая

Основная теорема 1[1]). *Для того чтобы система уравнений* (1) *была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A системы был равен рангу расширенной матрицы A_1.*

В самом деле, если система (1) совместна и имеет решение $(x_1, \ldots, x_n)$, то вектор $\mathbf{b} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ есть линейная комбинация векторов-столбцов $\mathbf{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ матрицы A, а именно:

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n.$$

В этом случае вектор $\mathbf{b}$ содержится в векторном пространстве V, порожденном векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, так что обе системы векторов

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \qquad (4)$$

и

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \qquad (4')$$

являются системами образующих одного и того же пространства V; по теореме 8 главы XII максимальное число линейно независимых элементов, содержащихся соответственно в (4) и в (4'), одно и то же. А это значит, что максимальное число линейно независимых столбцов в матрицах A и A_1 одно и то же, ранги этих матриц равны.

Если система (1) не имеет решения, то вектор $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ не является линейной комбинацией векторов-столбцов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ матрицы A.

---

[1]) В учебниках высшей алгебры эта теорема часто называется теоремой Кронекера—Капелли. Я благодарен проф. К. А. Рыбникову за следующую справку по этому поводу. В лекциях Кронекера (1864) теория систем линейных уравнений получила, по существу, свое завершение (включая и интересующую нас сейчас теорему). Однако изложение вопроса усовершенствовалось в более поздних работах Руше (E. Rouché, 1875) и Капелли (A. Capelli, 1892); именно у последнего мы находим теорему 1 в ее современной форме.

Возьмем какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$; пусть она состоит из r векторов $\mathbf{a}_i$, например из $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$. Это означает, что ранг матрицы A равен r. Так как вектор $\mathbf{b}$, не будучи линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, тем более не является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$, то система $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{b}$ есть линейно независимая система, состоящая из $r+1$ столбцов матрицы A_1, так что ранг этой матрицы больше[1]) ранга r матрицы A. Теорема 1 доказана.

Напомним теперь совсем простой факт, доказанный еще в § 5 главы VII.

Лемма. *Пусть* $(a_1, \ldots, a_n)$ *— какое-нибудь определенное решение системы* (1). *Всякое решение* $(x_1, \ldots, x_n)$ *системы* (1) *может быть записано в виде*

$$x_1 = a_1 + \xi_1, \quad \ldots, \quad x_n = a_n + \xi_n, \tag{5}$$

где $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ *— какое-нибудь решение однородной системы* (1_0).

Обратно, всякая точка $M = (x_1, \ldots, x_n)$, *получаемая по формуле* (5) *из фиксированного решения* $(a_1, \ldots, a_n)$ *системы* (1) *и любого решения* $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *системы* (1_0), *является решением системы* (1).

Теперь в двух словах доказывается

Основная теорема 2. *Пусть* (1) *есть совместная система ранга* r. *Тогда множество ее решений* $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *есть плоскость* n*-мерного пространства, имеющая размерность* $p = n - r$.

Обратно, всякая p*-мерная плоскость* n*-мерного пространства есть множество всех решений некоторой (линейно независимой) системы, состоящей из* $r = n - p$ *уравнений первой степени с* n *неизвестными (имеющей, очевидно, ранг* r).

Доказательство. Системы (1) и (1_0) имеют ранг r; множество всех решений системы (1_0) есть p-мерное, $p = n - r$, векторное пространство. Пусть $M_0 = (a_1, \ldots, a_n)$ — какое-нибудь определенное решение системы (1). Тогда все решения системы (1) получаются в виде (5), где $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ — какой-нибудь вектор из V; другими словами, все решения $M = (x_1, \ldots, x_n)$ системы (1) (и только они) суть концевые точки всевозможных векторов $\overrightarrow{M_0M} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in V$, приложенных к точке M_0. А это и значит, что множество всех решений системы (1) есть p-мерная плоскость (натянутая на точку M_0 и какие-нибудь векторы $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p$, образующие базис пространства V).

Первое утверждение теоремы 2 доказано.

---

[1]) Нетрудно видеть, что он равен $r+1$.

Доказываем второе утверждение. Пусть π^p есть p-мерная плоскость n-мерного аффинного пространства R^n. Предполагаем, что в R^n выбрана некоторая система координат, тогда все точки M и все векторы $\mathbf{u}$ пространства R^n записываются их координатами: $M=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{u}=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. В плоскости π берем произвольную точку $M_0=(a_1, \ldots, a_n)$. Тогда любой вектор $\mathbf{u}=\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ плоскости π и только вектор, лежащий в плоскости π, может быть записан в виде $\mathbf{u}=\overrightarrow{M_0M}$; этим равенством установлено взаимно однозначное соответствие между всеми векторами $\mathbf{u}$ и всеми точками M, лежащими в плоскости π; при этом, если $\mathbf{u}=\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, а $M=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то

$$\xi_1=x_1-a_1, \ \ldots, \ \xi_n=x_n-a_n. \tag{5'}$$

Но множество всех векторов, лежащих в плоскости π^p (будучи p-мерным подпространством векторного пространства V), есть множество решений $\xi_1=x_1-a_1, \ \ldots, \ \xi_n=x_n-a_n$ некоторой однородной линейно независимой системы из $r=n-p$ уравнений с n неизвестными [1]); пусть эта система есть

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+\ldots+a_{1n}\xi_n&=0,\\ a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2+\ldots+a_{2n}\xi_n&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{r1}\xi_1+a_{r2}\xi_2+\ldots+a_{rn}\xi_n&=0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

или, если заменить $\xi_1, \ \ldots, \ \xi_n$ их значениями (5'),

$$\left.\begin{aligned} a_{11}(x_1-a_1)+a_{12}(x_2-a_2)+\ldots+a_{1n}(x_n-a_n)&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{r1}(x_1-a_1)+a_{r2}(x_2-a_2)+\ldots+a_{rn}(x_n-a_n)&=0. \end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

Вектор $\mathbf{u}=\overrightarrow{M_0M}=\{\xi_1, \ \ldots, \ \xi_n\}$ тогда и только тогда удовлетворяет системе (6), если его конец $M=(x_1, x_2, \ \ldots, \ x_n)$ удовлетворяет системе (6'), в которой неизвестными служат уже $x_1, x_2, \ \ldots, \ x_n$.

Но все равно, сказать ли, что вектор $\overrightarrow{M_0M}=\{x_1-a_1, \ \ldots, \ x_n-a_n\}$ лежит в плоскости π (т. е. удовлетворяет системе (6')) или что в этой плоскости лежит его конец; поэтому множество всех точек $M=(x_1, x_2, \ \ldots, \ x_n)$, удовлетворяющих системе (6'), совпадает с множеством всех точек плоскости π. Полагая

$$\begin{aligned} a_{11}a_1+a_{12}a_2+\ldots+a_{1n}a_n&=b_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{r1}a_1+a_{r2}a_2+\ldots+a_{rn}a_n&=b_r, \end{aligned}$$

[1]) Гл. XII, § 8, теорема 13.

можем представить систему (6′) в виде

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n &= b_r. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Это и есть искомая независимая система из $r = n - p$ уравнений, множество решений которой есть множество всех точек данной p-мерной плоскости и которая поэтому называется общей системой уравнений данной плоскости.

Замечание 1 (о параллельности). Плоскость π размерности p и плоскость π' размерности p', $p \leqslant p' \leqslant n-1$, в n-мерном пространстве R^n называются *параллельными между собою* (*в широком смысле*), если многообразие V всех векторов, лежащих в плоскости π, содержится в многообразии V' всех векторов, лежащих в плоскости π'. Если две параллельные (в широком смысле) плоскости π и π' имеют хотя бы одну общую точку M_0, то одна из двух плоскостей — та, размерность которой меньше, — целиком лежит в другой. Доказательство может быть предоставлено читателю. В частности, если обе параллельные (в широком смысле) плоскости имеют одну и ту же размерность, то они либо совпадают между собою, либо не имеют ни одной общей точки. Во втором случае эти плоскости называются *параллельными в собственном смысле слова*. Для $(n-1)$-мерных плоскостей в n-мерном пространстве получаем условия параллельности, которые совершенно аналогичны условиям параллельности обыкновенных двумерных плоскостей в трехмерном пространстве.

Плоскости размерности $n-1$ в n-мерном пространстве R^n часто называются *гиперплоскостями* n-мерного пространства. Каждая гиперплоскость задается одним линейным уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1} = 0 \tag{8}$$

между координатами точек n-мерного пространства R^n, и каждое уравнение вида (8) определяет некоторую гиперплоскость в R^n. Два уравнения этого вида тогда и только тогда эквивалентны между собою (т. е. определяют одну и ту же гиперплоскость), когда их коэффициенты пропорциональны.

Каждая гиперплоскость, заданная уравнением (8), разбивает пространство на два полупространства: одно состоит из всех точек $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в которых многочлен

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1}$$

принимает положительные значения, другое — из тех точек, в которых этот многочлен принимает отрицательные значения. Про две точки $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ и $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ говорят, что они

лежат по одну или по разные стороны от гиперплоскости (8), в зависимости от того, принадлежат ли они к одному или к разным полупространствам, определяемым данной гиперплоскостью.

Существенно отметить следующие факты: если две точки P и Q принадлежат к одному полупространству (лежат по одну сторону от гиперплоскости (8)), то к тому же полупространству принадлежат и все точки отрезка $\overline{PQ}$. Другими словами: каждое полупространство является выпуклым множеством. Если же точки P и Q принадлежат к разным полупространствам (лежат по разные стороны от гиперплоскости (8)), то отрезок $\overline{PQ}$ пересекает гиперплоскость (8) в одной точке. Доказательства этих утверждений совершенно аналогичны доказательствам теоремы 2 (§ 6) главы V и теоремы 7 (§ 7) главы X.

§ 6. Аффинные преобразования n-мерного аффинного пространства R^n

Они определяются совершенно так же, как в частных случаях $n=2$ и $n=3$. Чтобы определить аффинное преобразование n-мерного пространства, надо, наряду с одной исходной системой координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\ldots\mathbf{e}_n$, задать вторую, новую систему координат $O^*\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\ldots\mathbf{e}_n^*$; этим определится преобразование, ставящее в соответствие каждой точке M и каждому вектору $\mathbf{u}$ точку M^* и вектор $\mathbf{u}^*$, имеющие в новой системе $O^*\mathbf{e}_1^*\ldots\mathbf{e}_n^*$ те самые координаты, которые точка M и вектор $\mathbf{u}$ имели в старой системе координат. Формулы, выражающие координаты преобразованной точки M^* через координаты точки M (в одной и той же системе координат), совершенно аналогичны формулам для трехмерного пространства (только вместо матриц третьего порядка у нас теперь будут матрицы n-го порядка).

При аффинном преобразовании пространства R^n векторное пространство V^n (состоящее из векторов пространства R^n) испытывает линейное преобразование (матрица которого совпадает с матрицей данного аффинного преобразования).

Так же как и в трехмерном случае, вводится понятие ориентации n-мерного аффинного пространства.

ГЛАВА XV

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ. КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ И КОМПЛЕКСНОЕ ПРОСТРАНСТВО

§ 1. Определение алгебраических линий и поверхностей

Алгебраическим уравнением от переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется уравнение вида

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{1}$$

в котором левая часть $F(x_1, \ldots, x_n)$ есть многочлен[1]) от этих переменных. Степень многочлена $F(x_1, \ldots, x_n)$ называется *степенью уравнения* (1).

Множество всех точек $(x_1, \ldots, x_n)$ *арифметического* n*-мерного пространства*[2]), *координаты которых удовлетворяют уравнению* (1), *называется многообразием решений этого уравнения или нулевым многообразием многочлена* $F(x_1, \ldots, x_n)$.

Замечание. Если многочлен $F(x_1, \ldots, x_n)$ является однородным, то решение $x_1, \ldots, x_n$ уравнения (1) часто целесообразно рассматривать не как точку, а как вектор пространства R^n (с выбранной в нем системой координат).

В аналитической геометрии линии на плоскости и поверхности в трехмерном пространстве принято определять соответственно как многообразия решений алгебраических уравнений

$$F(x, y) = 0 \text{ для линий,} \tag{1_2}$$

$$F(x, y, z) = 0 \text{ для поверхностей.} \tag{1_3}$$

Примеры нам известны: прямая линия и плоскость суть соответственно нулевые многообразия многочленов первой степени от двух и трех переменных; известные нам кривые — эллипс, гипербола, парабола — суть многообразия решений своих канонических уравнений;

---

[1]) Определение многочлена от n переменных дано в подстрочном примечании на стр. 322.

[2]) Или любого аффинного n-мерного пространства с выбранной в нем системой координат.

сфера с центром в начале прямоугольной системы координат есть множество решений уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

где r есть радиус сферы. Само собою разумеется, для того чтобы эти определения линий и поверхностей имели смысл, необходимо, чтобы в плоскости (в пространстве) была выбрана определенная система координат. При этом, *если уравнение* (1_2), *соответственно* (1_3), *определяющее данную линию* (*или поверхность*), *имеет степень* m, *то говорят, что эта линия* (*или поверхность*) *имеет порядок* m.

Однако с определением линии и поверхности не все обстоит так просто, как кажется на первый взгляд. Множество всех точек плоскости, удовлетворяющих уравнению $x^2 = 0$, совпадает с множеством точек, удовлетворяющих уравнению $x = 0$, и есть ось ординат координатной системы, положенной в основу наших рассуждений. Получается, что прямая линия (в данном случае прямая $x = 0$) определяется не только своим «естественным» уравнением первом степени, но еще и некоторыми уравнениями более высоких степеней. Однако в аналитической геометрии считают, и к этому имеются серьезные основания, что уравнение $x^2 = 0$ есть уравнение не просто оси ординат, а «дважды взятой оси ординат» — кривой второго порядка, являющейся парой слившихся прямых, каждая из которых есть прямая $x = 0$. Далее, нулевое многообразие каждого из многочленов $x^2 + y^2 + 1$ и $2x^2 + 3y^2 + 7$ есть пустое множество; приравнивая эти многочлены нулю, мы получим уравнения, не определяющие никаких реальных линий. Это второе затруднение устраняется пополнением плоскости, соответственно пространства, так называемыми *мнимыми точками*, что приводит к *комплексной плоскости* и к *комплексному пространству*, где уже не будет уравнений с пустым множеством решений.

Уже первое замечание — об уравнении $x^2 = 0$ — приводит к важному утверждению. Ясно, что два пропорциональных между собою многочлена от данного числа переменных, т. е. два многочлена, каждый из которых получается из другого умножением его на некоторый числовой множитель $\lambda \neq 0$, имеют одно и то же нулевое многообразие. Возникает обратный вопрос: можно ли утверждать, что два многочлена одной и той же степени (хотя бы только от двух или от трех переменных), имеющие одно и то же нулевое многообразие, пропорциональны между собою? Оказывается, что ответ на этот вопрос положителен, если под решениями x, y, соответственно x, y, z, понимать наборы комплексных (не непременно действительных) чисел. Однако это утверждение представляет собою совсем не очевидную и вовсе не так просто доказываемую теорему алгебры, и доказательство ее в общем виде выходит за пределы этих лекций; лишь для многочленов второй степени от двух и трех переменных теорема эта под названием «теоремы единственности»

будет доказана в главе XVII (§§ 2 и 10) для линий и в главе XX (§ 5) для поверхностей второго порядка. Только после того, как эта теорема будет доказана, и после того, как произойдет пополнение плоскости и пространства мнимыми точками, *определение линии и поверхности второго порядка как множества точек, являющихся решениями уравнения второй степени от двух, соответственно от трех, переменных,* станет на твердую почву. Пока же в уверенности, что разыгравшаяся маленькая драма получит счастливую развязку, мы вынуждены пользоваться следующим, так сказать, рабочим определением:

Задать алгебраическую линию на плоскости — значит задать некоторое алгебраическое уравнение (1_2) с двумя переменными и некоторую аффинную систему Oxy координат на плоскости; тогда те и только те точки $M=(x, y)$, координаты которых в данной координатной системе удовлетворяют уравнению (1_2), считаются лежащими на данной линии (или принадлежащими ей).

Аналогично для поверхностей: задать алгебраическую поверхность в трехмерном пространстве — значит задать алгебраическое уравнение от трех переменных (1_3) и систему координат в трехмерном пространстве. Те и только те точки $M=(x, y, z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению (1_3), называются точками, лежащими на данной поверхности.

При этом мы считаем, что *два уравнения тогда и только тогда определяют одну и ту же линию или поверхность, когда одно из этих уравнений получается из другого почленным умножением на некоторый числовой множитель* λ.

Если на плоскости дана система координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, то левая часть уравнения (1_2) — многочлен $F(x, y)$ — определяет *функцию от точки плоскости*[1]): каждой точке M, имеющей в данной системе координат координаты x, y, соответствует число $F(M)\equiv F(x, y)$. Если мы перейдем к другой системе координат $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$, то та же точка M, имевшая в системе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ координаты x, y, получит в системе $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$ новые координаты x', y', связанные со старыми формулами преобразования координат:

$$\left.\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_1, \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

с матрицей

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

и детерминантом

$$\det C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}\neq 0.$$

[1]) Ср. гл. XIII, § 1.

Для того чтобы вычислить значение того же числа $F(M)$ через новые координаты x', y' точки M, надо в многочлен $F(x, y)$ вместо x и y подставить выражения (2) этих переменных через x' и y'; от этого многочлен $F(x, y)$ тождественно преобразуется в многочлен $F'(x', y')$ от новых переменных x', y':

$$F(M) \equiv F(x, y) \equiv F(c_{11}x' + c_{12}y' + c_1,\ c_{21}x' + c_{22}y' + c_2) \equiv \equiv F'(x', y'). \quad (3)$$

Координаты x', y' какой-либо точки M в системе $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$ тогда и только тогда удовлетворяют уравнению

$$F'(x', y') = 0, \quad (1_2')$$

когда координаты x, y той же точки в системе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ удовлетворяют уравнению

$$F(x, y) = 0. \quad (1_2)$$

Таким образом, задавая какую-нибудь алгебраическую линию ее уравнением (1_2) в данной системе координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, мы сразу же можем написать и ее уравнение $(1_2')$ в любой другой системе координат $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$—оба уравнения (1_2) и $(1_2')$, рассматриваемые соответственно относительно координатных систем $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ и $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$, задают одну и ту же алгебраическую линию. При этом, если алгебраическая линия задана в данной системе координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ уравнением (1_2) степени m, то и во всякой другой системе координат $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$ она задается уравнением $(1_2')$ той же степени m. В самом деле, при подстановке (2) каждый член ax^py^q многочлена $F(x, y)$ переходит в выражение

$$a(c_{11}x' + c_{12}y' + c_1)^p(c_{21}x' + c_{22}y' + c_2)^q,$$

которое после раскрытия скобок и приведения подобных членов дает нам некоторую совокупность членов многочлена $F'(x', y')$, каждый из которых имеет степень $\leqslant p+q$. Итак, при переходе от координатной системы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ к координатной системе $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$ степень многочлена $F(x, y)$ не может повыситься. Но она не может и понизиться, так как тогда при обратном переходе от $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$ к $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ степень многочлена должна была бы повыситься.

Итак, степень уравнения (1_2), задающего (в какой-нибудь системе координат) данную алгебраическую линию, есть число, не зависящее от выбора системы координат; это число и называется *порядком алгебраической линии*, задаваемой уравнением (1_2).

Все сказанное о кривых дословно переносится и на случай поверхностей: при переходе от координатной системы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ к координатной системе $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$, в многочлене $F(x, y, z)$, являющемся левой частью уравнения

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1_3)$$

данной поверхности, происходит преобразование, или, как говорят, *замена переменных:*

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + c_1, \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + c_2, \\ z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + c_3, \end{aligned} \qquad \det C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

При этой замене переменных многочлен $F(x, y, z)$ тождественно преобразуется в многочлен $F'(x', y', z')$, причем степень многочлена $F'(x', y', z')$ равна степени многочлена $F(x, y, z)$. Поверхность, определявшаяся в системе координат $Oe_1e_2e_3$ уравнением (1_3), определяется в системе координат $O'e_1'e_2'e_3'$ уравнением $F'(x', y', z') = 0$. Степень уравнения, определяющего данную алгебранческую поверхность, не зависит от выбора системы координат; она называется *порядком данной алгебраической поверхности.*

§ 2. Преобразование многочлена второй степени при преобразовании координат

Так как мы в дальнейшем будем заниматься лишь линиями и поверхностями второго порядка, то многочлены второй степени имеют для нас преимущественный интерес.

Каждый многочлен второй степени от двух переменных

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 \qquad (1_2)$$

может быть записан в виде

$$F(x, y) = \varphi(x, y) + 2l(x, y) + a_0, \qquad (1_2')$$

где

$$\varphi(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \qquad (2_2)$$

есть квадратичная форма старших членов многочлена $F(x, y)$, а

$$l(x, y) = a_1x + a_2y$$

— линейная форма, состоящая из членов первой степени многочлена $F(x, y)$.

Полагая $a_{21} = a_{12}$, получаем симметричную матрицу второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

— матрицу квадратичной формы

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2;$$

детерминант

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

есть дискриминант формы $\varphi(x, y)$.

Подобное же положение вещей мы имеем и в случае многочлена второй степени от трех переменных. Общий вид такого многочлена есть

$$F(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0, \quad (1_3)$$

причем члены второго порядка этого многочлена образуют квадратичную форму

$$\varphi(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2, \quad (2_3)$$

а члены первого порядка — линейную форму $2l(x, y, z)$, где

$$l(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z,$$

так что весь многочлен $F(x, y, z)$ может быть записан в виде

$$F(x, y, z) \equiv \varphi(x, y, z) + 2l(x, y, z) + a_0.$$

Нас интересует вопрос, как преобразуются многочлены $F(x, y)$, соответственно $F(x, y, z)$, при преобразовании координат. Как мы знаем, каждое преобразование координат слагается из однородного преобразования, которое в случае двух переменных x, y записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y', \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y', \end{aligned}\right\}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad \det C \neq 0, \qquad (3)$$

и из сдвига

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + x_0, \\ y &= y' + y_0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Однородное преобразование (3) соответствует переходу от первоначального репера Oe_1e_2 к реперу $Oe_1'e_2'$ с тем же началом, а преобразование (4) — сдвигу начала координат на вектор $\overrightarrow{OO'} = \{x_0, y_0\}$.

Посмотрим сначала, как преобразуется многочлен $F(x, y)$ при сдвиге (4).

Подставляя в $F(x, y)$ значения $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, получаем (считая всегда $a_{21} = a_{12}$)

$$\begin{aligned} F(x, y) \equiv F(x' + x_0, y' + y_0) \equiv a_{11}(x' + x_0)^2 + 2a_{12}(x' + x_0)(y' + y_0) + \\ + a_{22}(y' + y_0)^2 + 2a_1(x' + x_0) + 2a_2(y' + y_0) + a_0 \equiv \\ \equiv a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x' + \\ + 2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y' + a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + \\ + 2a_1x_0 + 2a_2y_0 + a_0 \equiv F'(x', y'). \end{aligned}$$

Обозначая, как всегда, преобразованный многочлен через

$$F'(x', y') \equiv a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0, \quad (1'_2)$$

имеем:

$$\left.\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}, \\ a'_{12} &= a_{12}, \\ a'_{22} &= a_{22}, \\ a'_1 &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1, \\ a'_2 &= a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2, \\ a'_0 &= F(x_0, y_0). \end{aligned}\right\} \quad (5_2)$$

На эти формулы мы будем много раз ссылаться. Первые три из равенств (5_2), а именно $a'_{11} = a_{11}$, $a'_{12} = a_{12}$, $a'_{22} = a_{22}$, означают, что *при сдвиге* (4) *коэффициенты при старших членах многочлена* $F(x, y)$ *не меняются.*

Все это можно повторить и для случая трех переменных: многочлен $F(x, y, z)$ переходит в

$$\begin{aligned} F'(x', y', z') \equiv a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x'z' + \\ + 2a'_{23}y'z' + a'_{33}z'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + 2a'_3z' + a'_0, \end{aligned} \quad (1'_3)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &a'_{11} = a_{11},\ a'_{12} = a_{12},\ a'_{22} = a_{22},\ a'_{13} = a_{13},\ a'_{23} = a_{23},\ a'_{33} = a_{33}, \\ &a'_1 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1, \\ &a'_2 = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2, \\ &a'_3 = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_3, \\ &a'_0 = F(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}\right\} \quad (5_3)$$

Что касается однородного преобразования (3), то нас интересуют в первую очередь квадратичные формы $\varphi'(x', y')$ и $\varphi'(x', y', z')$, в которые при этом преобразовании тождественно переходят формы $\varphi(x, y)$ и $\varphi(x, y, z)$. Исчерпывающий ответ на интересующий нас вопрос дает доказанная в главе XIII

Теорема. *Матрица* A' *квадратичной формы* $\varphi'(x', y')$, *соответственно* $\varphi'(x', y', z')$, *выражается через матрицу* A *формы* $\varphi(x, y)$,

соответственно $\varphi(x, y, z)$, *и через матрицу* C *преобразования следующим образом:*

$$A' = C^* A C, \tag{6}$$

где C^*, *как всегда, есть матрица, транспонированная к* C.

Так как $\det C^* = \det C$, то из формулы (6) вытекает

$$\det A' = \det A \cdot (\det C)^2. \tag{7}$$

Если обе координатные системы, старая и новая, прямоугольны, то матрица C ортогональна, $\det C = \pm 1$ и

$$\det A' = \det A. \tag{8}$$

§ 3. Аффинная эквивалентность линий и поверхностей

Пусть на плоскости выбрана аффинная система координат Oe_1e_2. Мы знаем (гл. XI, § 1), что задать аффинное преобразование $\mathcal{A}$ плоскости — значит задать, наряду с исходным репером Oe_1e_2, новый репер $O'e_1'e_2'$: аффинное преобразование $\mathcal{A}$, определенное этим репером, ставит в соответствие каждой точке M точку M', имеющую относительно репера $O'e_1'e_2'$ те самые координаты, которые точка M имела относительно исходного репера Oe_1e_2.

Рассмотрим теперь какую-нибудь линию, определенную (в исходной системе координат Oe_1e_2) уравнением

$$F(x, y) = 0. \tag{1_2}$$

При аффинном преобразовании $\mathcal{A}$ каждая точка M, лежащая на этой кривой, перейдет в точку M', лежащую на линии, имеющей то же уравнение (1_2), но уже относительно системы координат $O'e_1'e_2'$.

В соответствии с этим мы говорим, что при аффинном преобразовании $\mathcal{A}$ кривая I, заданная уравнением (1_2) в системе координат Oe_1e_2, переходит в кривую II, заданную тем же уравнением, но в системе координат $O'e_1'e_2'$. Очевидно, кривая II переходит в кривую I при аффинном преобразовании $\mathcal{A}^{-1}$, обратном к преобразованию $\mathcal{A}$.

Говорят также, что кривая II является *образом* кривой I при преобразовании $\mathcal{A}$.

Определение. Две кривые I и II называются *аффинно эквивалентными*, если одна из них переходит в другую при некотором аффинном преобразовании $\mathcal{A}$.

Легко видеть (читатель должен это проверить), что отношение аффинной эквивалентности удовлетворяет условиям рефлексивности, симметрии и транзитивности. Поэтому, в частности, две кривые, аффинно эквивалентные одной и той же третьей, аффинно эквивалентны между собою.

Из сказанного выше непосредственно следует:

Пусть дана алгебраическая кривая I своим уравнением

$$F(x, y) = 0 \qquad (1_2)$$

в системе координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Тогда *аффинно эквивалентными кривой* I *будут те и только те кривые* II, *которые в какой-нибудь системе координат* $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$ *имеют то же уравнение* (1_2).

Пусть в плоскости дана система координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Тогда, как мы знаем, всякое аффинное отображение задается формулами

$$\left.\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_1, \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_2, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

выражающими для каждой данной точки $M(x, y)$ координаты x', y' преобразованной точки M' (в той же системе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$).

Теперь легко решить задачу: пусть дана кривая I своим уравнением (1_2) в координатной системе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Найти (в той же системе координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$) уравнение кривой II, в которую перейдет кривая I при данном аффинном преобразовании (2).

Решение просто: ведь надо найти уравнение, которому удовлетворяют x' и y', связанные с x и y соотношениями (2), если эти x и y удовлетворяют уравнению (1_2). Искомое уравнение получится, если выразить x и y через x' и y' из (2) и подставить полученные значения в уравнение (1_2).

Пример. В какую кривую переходит при аффинном преобразовании

$$x' = \frac{1}{a}x, \quad y' = \frac{1}{b}y \qquad (3)$$

эллипс, заданный (в прямоугольной, канонической для него системе координат) уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1? \qquad (4)$$

Для этого находим из (3)

$$x = ax', \quad y = by' \qquad (3')$$

и подставляем в (4). Получаем уравнение $x'^2 + y'^2 = 1$, или [1]) $x^2 + y^2 = 1$. Итак, при аффинном преобразовании (3) эллипс с уравнением (4) переходит в окружность $x^2 + y^2 = 1$.

Попутно мы доказали важный факт:

Всякий эллипс аффинно эквивалентен окружности (следовательно, *всякие два эллипса аффинно эквивалентны между собою*).

---

[1]) Ведь x', y' суть координаты (произвольной) точки M' относительно той же системы координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$.

Совершенно аналогично доказывается, что всякая гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

аффинно эквивалентна равнобочной гиперболе

$$x^2-y^2=1.$$

Так как отношение аффинной эквивалентности двух кривых удовлетворяет условиям рефлексивности, симметрии и транзитивности, то оно порождает распадение любого множества $\mathfrak{M}$ кривых на «*аффинные классы*» таким образом, что две кривые из множества $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда аффинно эквивалентны между собою, когда они принадлежат к одному и тому же аффинному классу.

Все сказанное о кривых можно повторить и в применении к поверхностям: если аффинное преобразование пространства задается переходом от репера $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ к реперу $O\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$, то поверхность, заданная (в координатной системе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$) уравнением

$$F(x, y, z)=0, \qquad (1_3)$$

переходит в поверхность, имеющую то же уравнение, но уже в системе координат $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$.

Две поверхности называются *аффинно эквивалентными*, если одна из них переходит в другую при некотором аффинном преобразовании пространства; другими словами: *те и только те поверхности аффинно эквивалентны поверхности, заданной* (*в некоторой координатной системе* $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$) *уравнением* (1_3), *которые в какой-нибудь координатной системе* $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ *имеют то же уравнение* (1_3).

Любое множество $\mathfrak{M}$ поверхностей разбивается на аффинные классы таким образом, что две поверхности, принадлежащие множеству $\mathfrak{M}$, тогда и только тогда аффинно эквивалентны между собою, когда они входят в один и тот же класс.

В следующей главе мы, в частности, решим задачу аффинной классификации кривых второго порядка, т. е. задачу перечисления всех аффинных классов, на которые распадается множество всех кривых второго порядка.

В главе XX мы решим аналогичную задачу аффинной классификации всех поверхностей второго порядка.

§ 4. Комплексная плоскость

Вся суть аналитической геометрии заключается в том, что, выбрав (скажем, на плоскости) систему координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, мы подменяем точки плоскости парами (x, y) координат этих точек, а линии задаем их уравнениями вида

$$F(x, y)=0.$$

Однако уже из школьного курса алгебры мы знаем, сколь убогим получается исследование даже уравнений второй степени с одним неизвестным, если при рассмотрении их решений пользоваться лишь вещественными числами. Поэтому неудивительно, что, ограничиваясь в аналитической геометрии вещественными значениями координат, мы не построим гармонической теории, так как будем постоянно натыкаться на досадные исключения, несносные для математика. Единственный радикальный способ их избежать — это допустить в качестве возможных значений координат точек любые комплексные числа.

Мы приходим, таким образом, к следующему построению.

Пусть дана обыкновенная («вещественная») плоскость и произвольная аффинная система координат Oe_1e_2 в ней[1]) (см. гл. III). Точку M плоскости мы отождествляем с парой ее координат x, y (что и находит свое выражение в записи $M=(x, y)$, которой мы все время широко пользовались, считая x и y произвольными вещественными числами). Теперь мы всякую пару x, y комплексных чисел также будем считать точкой (комплексной) плоскости, а самые числа x, y будем называть координатами точки M комплексной плоскости относительно данной системы координат Oe_1e_2. При этом точку $M=(x, y)$ будем называть *мнимой точкой* плоскости, если хотя бы одна из ее координат есть комплексное число, не являющееся вещественным.

Дальше все идет автоматически. Пара точек $M_1=(x_1, y_1)$ и $M_2=(x_2, y_2)$, данных в определенном порядке (M_1 — первая, M_2 — вторая точка), называется *вектором*, приложенным к точке M_1 или закрепленным в этой точке, и обозначается через $\mathfrak{u}=\overrightarrow{M_1M_2}$. Точка M_1 называется *начальной точкой*, а точка M_2 — *конечной точкой* (*концом*) вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$. Комплексные числа

$$x=x_2-x_1, \qquad y=y_2-y_1$$

называются *координатами вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Два вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1'M_2'}$ называются *равными*, если равны их соответственные координаты. Таким образом, множество всех векторов комплексной плоскости распадается на классы равных между собою векторов (любые два вектора одного класса равны между собою, никакие два вектора, принадлежащие к разным классам, не равны между собою). Эти классы, как раньше (когда мы пользовались только вещественными числами), называются *свободными*

---

[1]) Речь идет при этом лишь об обыкновенных, «вещественных» репера Oe_1e_2.

векторами; они обозначаются так:

$$\mathbf{u} = \{x, y\},$$

где x, y — пара координат какого-нибудь (закрепленного) вектора, входящего в данный класс равных между собою векторов.

Таким образом, мы можем сказать: любая пара комплексных чисел x, y определяет, во-первых, точку $M = (x, y)$, во-вторых свободный вектор $\mathbf{u} = \{x, y\}$ с координатами x, y. Каждая пара точек $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$ определяет свободный вектор $\mathbf{u} = \{x, y\}$ с координатами $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$; точка $M_1 = (x_1, y_1)$ и вектор $\mathbf{u} = \{x, y\}$ определяют точку $M_2 = (x_1 + x, y_1 + y)$ — «конец вектора $\mathbf{u}$, приложенного к точке M_1».

Суммой двух векторов $\mathbf{u} = \{x, y\}$ и $\mathbf{u}' = \{x', y'\}$ называется вектор $\mathbf{u} + \mathbf{u}' = \{x + x', y + y'\}$; *произведением вектора* $\mathbf{u} = \{x, y\}$ *на произвольное* (*комплексное*) *число* λ называется вектор $\lambda\mathbf{u} = \{\lambda x, \lambda y\}$.

Вектор $\mathbf{0} = \{0, 0\}$ по-прежнему называется *нулевым вектором*; вектор $-\mathbf{u} = \{-x, -y\}$ называется вектором, *противоположным* вектору $\mathbf{u} = \{x, y\}$.

Понятия *линейной зависимости* и *линейной независимости* вводятся для векторов с комплексными координатами совершенно так же, как раньше, только, разумеется, в качестве коэффициентов в линейных комбинациях векторов теперь допускаются любые комплексные числа. При этом все алгебраические теоремы о линейной независимости, составляющие содержание § 5 главы II, сохраняют свою силу вместе с их доказательствами. В частности, два вектора $\mathbf{u}_1 = \{x_1, y_1\}$ и $\mathbf{u}_2 = \{x_2, y_2\}$ тогда и только тогда линейно зависимы, когда координаты одного вектора пропорциональны координатам другого, т. е. когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Два линейно зависимых вектора мы будем называть *коллинеарными* (мы увидим, что геометрический смысл этого наименования сохраняется и для векторов с комплексными координатами). Важно сразу же установить и для векторов с комплексными координатами основное предложение.

Три вектора на комплексной плоскости всегда линейно зависимы (и, следовательно, один из них есть линейная комбинация двух других).

В самом деле, это утверждение справедливо (гл. II, § 5, предложение 2), если среди трех данных векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ какие-нибудь два, например $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$, линейно зависимы. Пусть векторы $\mathbf{u}_1 = \{\xi_1, \eta_1\}$ и $\mathbf{u}_2 = \{\xi_2, \eta_2\}$ линейно независимы. Докажем, что тогда всякий третий вектор $\mathbf{u} = \{\xi, \eta\}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$:

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2,$$

причем коэффициенты x_1 и x_2 в этой линейной комбинации однозначно определены.

В самом деле, из линейной независимости векторов $\mathbf{u}_1 = \{\xi_1, \eta_1\}$ и $\mathbf{u}_2 = \{\xi_2, \eta_2\}$ следует, что

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

А тогда система уравнений (относительно неизвестных x_1 и x_2)

$$\xi = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2,$$
$$\eta = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2$$

(равносильная одному уравнению $\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2$) имеет единственное решение относительно x_1 и x_2, что и доказывает наше утверждение.

Существенным является следующее

Замечание. Мы определили комплексную плоскость, взяв обыкновенную, вещественную плоскость с заданной в ней аффинной системой координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Эта система координат лежит в основе самого определения комплексной плоскости и будет называться ее «*основной*» *системой координат*. Начало этой системы координат есть вещественная точка $O = (0, 0)$, а единичными векторами являются векторы $\mathbf{e}_1 = \{1, 0\}$ и $\mathbf{e}_2 = \{0, 1\}$. Каждый вектор комплексной плоскости может быть записан, и притом единственным образом, в виде

$$\mathbf{u} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2, \tag{1}$$

где x и y — комплексные числа.

Задать в комплексной плоскости какую-нибудь «новую» (т. е. отличную от основной) вещественную [1]) систему аффинных координат — значит задать вещественную точку

$$O' = (a, b)$$

— начало новой системы координат и пару линейно независимых вещественных векторов

$$\mathbf{e}_1' = \{c_{11}, c_{21}\} = c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{21}\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{e}_2' = \{c_{12}, c_{22}\} = c_{12}\mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2$$

(все числа c_{ik} $(i, k = 1, 2)$ при этом являются вещественными). Тогда вектор $\mathbf{u}$, записывающийся в основной системе координат в виде (1), однозначно записывается и в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{e}_1'$ и $\mathbf{e}_2'$:

$$\mathbf{u} = x'\mathbf{e}_1' + y'\mathbf{e}_2'. \tag{1'}$$

---

[1]) Только такие будут рассматриваться.

Коэффициенты x' и y' в этой линейной комбинации называются *координатами вектора* $\mathbf{u}$ в системе координат $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$ (они, как и в случае вещественных векторов, не зависят от выбора начала O'). Координаты точки M в системе координат $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$ суть координаты вектора $\overrightarrow{O'M}$ в этой системе координат. При определении этих координат остаются в силе все рассуждения главы VIII, и итогом этих рассуждений являются формулы

$$\left.\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + a, \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + b, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

т. е. формулы преобразования координат, полученные на стр. 191. Эти формулы в комплексной плоскости таковы же, как в вещественной, и коэффициенты c_{11}, c_{12}; c_{21}, c_{22}; a, b в них — вещественные числа.

§ 5. Прямая линия на комплексной плоскости

Прямую линию на комплексной плоскости естественно определять как линию первого порядка, т. е. задавать ее уравнением первой степени

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

(«*общее уравнение прямой*»). При этом весьма частным случаем общих теорем об уравнениях первой степени, доказанных в главе XIV, § 5, является следующее предложение.

Теорема 1. *Два уравнения* (1) *и*

$$A'x + B'y + C' = 0 \tag{1'}$$

тогда и только тогда имеют одно и то же множество решений («*определяют одну и ту же прямую*»), *когда их коэффициенты пропорциональны, т. е. когда при некотором* $k \neq 0$ *имеем*

$$A' = kA, \quad B' = kB, \quad C' = kC. \tag{2}$$

Уравнения (1) *и* (1′) *тогда и только тогда несовместны* (*задаваемые ими прямые параллельны в собственном смысле*), *когда*

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} \neq \frac{C'}{C}. \tag{3}$$

Доказываем элементарно. Если уравнения (1) и (1′) эквивалентны, то при некотором $k \neq 0$ имеют место соотношения (2). В самом деле, из предположения следует, что система двух уравнений (1), (1′) имеет бесконечное множество решений, значит, детерминант системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

т. е. при некотором k имеем $A' = kA$, $B' = kB$. Если при этом $C' \neq kC$, то, как легко убедиться, уравнения (1), (1′) были бы несовместны. Итак, из эквивалентности уравнений (1) и (1′) следует пропорциональность их коэффициентов. Обратное утверждение очевидно. Остается доказать: из несовместности уравнений (1) и (1′) вытекает условие (3). Но из несовместности уравнений (1) и (1′) вытекает прежде всего равенство (4), т. е. пропорция

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B}.$$

Если бы она продолжалась до пропорции

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C},$$

то уравнения (1) и (1′) были бы эквивалентны и, значит, совместны, поэтому имеет место (3) — и все доказано.

Замечание. Из теоремы 1 вытекает, что те трудности, которые возникают при определении алгебраической линии как множества решений алгебраического уравнения $F(x, y) = 0$, не возникают, когда степень этого уравнения равна 1, — прямую линию мы сейчас уже в праве определить как множество всех точек $M = (x, y)$ плоскости, удовлетворяющих уравнению (1). Это было законно на обыкновенной, вещественной плоскости и продолжает быть законным на комплексной плоскости.

Во многих случаях, однако, прямую на комплексной плоскости удобнее задавать не ее «общим» уравнением (1), а параметрически, т. е. как множество точек $M = (x, y)$ комплексной плоскости, определяемых равенствами

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + at, \\ y &= y_0 + bt, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

когда t пробегает все комплексные числовые значения (x_0, y_0, a, b — любые данные комплексные числа, лишь случай $a = b = 0$ исключен).

Докажем, что оба способа определения прямой эквивалентны между собою.

1° Пусть прямая задана уравнением (1). Как и на вещественной плоскости, назовем *направляющим вектором* прямой (1) вектор $\{-B, A\}$ и всякий ему коллинеарный ненулевой вектор $\mathbf{u}_0 = \lambda\{-B, A\}$. Другими словами, направляющим вектором прямой (1) называется всякий вектор $\mathbf{u}_0 = \{a, b\}$, удовлетворяющий уравнению

$$Aa + Bb = 0.$$

Докажем следующее предложение:

Если $M_0 = (x_0, y_0)$ — какая-нибудь точка прямой (1), а $\mathbf{u}_0 = \{a, b\}$ — какой-нибудь направляющий вектор этой прямой, то точками

прямой (1) являются те и только те точки $M=(x, y)$, координаты которых могут быть записаны в виде (5).

В самом деле, если точка $M=(x, y)$ при некотором t записывается в виде (5), то

$$Ax+By+C\equiv(Ax_0+By_0+C)+(Aa+Bb)t=0+0=0,$$

т. е. точка M лежит на прямой (1).

Обратно, пусть $M=(x, y)$ — какая-нибудь точка, лежащая на прямой (1). Так как $M_0=(x_0, y_0)$ тоже лежит на этой прямой, то имеем множество

$$Ax_0+By_0+C=0,$$

и, значит,

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{6}$$

Так как $\{a, b\}$ — направляющий вектор прямой (1), т. е.

$$Aa+Bb=0, \tag{7}$$

то из (6) и (7) вытекает

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=-\frac{A}{B}=\frac{b}{a}$$

или

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}, \tag{8}$$

что и означает, что при некотором t имеем

$$x-x_0=at, \quad y-y_0=bt.$$

2° Рассмотрим множество всех точек $M=(x, y)$, которые при каких-нибудь постоянных x_0, y_0, a, b (исключен лишь случай $a=b=0$) допускают запись (5). Эта запись означает, что имеет место пропорция (8), т. е. что точка $M=(x, y)$ лежит на прямой

$$bx-ay+(ay_0-bx_0)=0. \tag{9}$$

Тогда $M_0=(x_0, y_0)$ тоже лежит на прямой (9), а вектор $\{a, b\}$ является ее направляющим вектором. Следовательно, данная с самого начала система уравнений (5) является системой параметрических уравнений именно этой прямой.

Эквивалентность двух способов задавать прямую — общим уравнением (1) или системой параметрических уравнений (5) — доказана.

Как и раньше, будем разрешать себе вместо «система параметрических уравнений прямой» говорить просто «параметрическое уравнение прямой».

Прямая, проходящая через две данные точки. Пусть прямая дана своим уравнением (1) и, значит, эквивалентным ему параметрическим уравнением (5). Если $M_1=(x_1, y_1)$ — точка,

лежащая на нашей прямой (5) и отличная от точки M_0, то, полагая $a = x_1 - x_0$, $b = y_1 - y_0$, получим направляющий вектор $\{a, b\}$ прямой (1) [1]; следовательно, ее параметрическое уравнение (5) может быть записано в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + (x_1 - x_0)\, t, \\ y &= y_0 + (y_1 - y_0)\, t. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Уравнение (8) при этом принимает вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0},$$

или

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0,$$

или, наконец,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

— получаем уравнение прямой, проходящей через точки $M_0 = (x_0, y_0)$ и $M_1 = (x_1, y_1)$.

По аналогии со случаем вещественной плоскости говорят, что точка $M = (x, y)$ делит отрезок $\overrightarrow{M_0M_1}$ в отношении $\alpha:\beta$, если $\frac{\overrightarrow{M_0M}}{\overrightarrow{MM_1}} = \frac{\alpha}{\beta}$, откуда

$$x = \frac{\beta x_0 + \alpha x_1}{\alpha + \beta}, \qquad y = \frac{\beta y_0 + \alpha y_1}{\alpha + \beta}.$$

В частности, при $\alpha = \beta$ получаем точку $M = \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}\right)$, называемую *серединой отрезка* $\overrightarrow{M_0M_1}$.

§ 6. Замечание о действительных и мнимых линиях

Если прямая задана каким-нибудь уравнением

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

то все уравнения вида

$$(kA)\, x + (kB)\, y + (kC) = 0,$$

где k — какое-нибудь комплексное число, и только эти уравнения задают ту же прямую. Если среди этих уравнений имеется уравне-

[1]) В самом деле, $A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = (Ax_1 + By_1) - (Ax_0 + By_0) = -C + C = 0$.

ние, все коэффициенты которого kA, kB, kC вещественны, то прямая (1) называется *вещественной*; в противном случае она называется *мнимой*.

Например, прямая

$$2ix + 3iy - i = 0$$

есть вещественная прямая: она может быть задана уравнением

$$2x + 3y - 1 = 0.$$

Прямая

$$x + iy = 0$$

является мнимой.

Вообще, алгебраическая кривая, заданная уравнением

$$F(x, y) = 0,$$

где $F(x, y)$ — какой-нибудь многочлен от двух переменных, называется *вещественной*, если комплексное число $\lambda \neq 0$ может быть подобрано таким образом, что в многочлене $\lambda F(x, y)$ все коэффициенты суть вещественные числа. Может, однако, случиться, что на вещественной кривой не лежит ни одной вещественной точки. Так, например, кривая, задаваемая уравнением

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

есть вещественная кривая, однако на ней нет ни одной вещественной точки. Эта кривая называется *окружностью радиуса i* (причина такого названия читателю, вероятно, ясна [1]).

Кривая, задаваемая в прямоугольной системе координат уравнением

$$x^2 + y^2 = 0, \tag{2}$$

называется *окружностью нулевого радиуса*. Она имеет единственную вещественную точку $O = (0, 0)$. Эта кривая распадается на пару мнимых прямых

$$x + iy = 0, \qquad x - iy = 0, \tag{3}$$

так как

$$x^2 + y^2 \equiv (x + iy)(x - iy).$$

---

[1]) К сожалению, общепринятая терминология (с которой невозможно не считаться) в этом пункте непоследовательна: окружность $x^2 + y^2 + 1 = 0$ мнимого радиуса i обычно называется *мнимой окружностью*; вообще, кривая, задаваемая уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$, называется *мнимым эллипсом*, хотя она согласно только что данному общему определению является действительной кривой!

Среди всех линий на плоскости мы в этих лекциях будем рассматривать, кроме прямых, лишь вещественные кривые второго порядка и будем всегда задавать их уравнениями

$$F(x, y) = 0,$$

все коэффициенты в которых вещественны.

§ 7. Комплексное пространство

Пополнение трехмерного пространства мнимыми элементами — мнимыми точками и мнимыми векторами — происходит совершенно аналогично введению мнимых точек и векторов на плоскости (см. § 4). Предполагается, что в обыкновенном («вещественном») трехмерном пространстве дана произвольная аффинная система координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Это позволяет каждую точку M пространства отождествить с тройкой вещественных чисел, ее координат:

$$M = (x, y, z).$$

После этого мы всякую тройку x, y, z комплексных чисел также объявляем *«комплексной» точкой* пространства, а сами комплексные числа x, y, z — называем *координатами точки* M в координатной системе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Множество всех комплексных точек образует комплексное трехмерное пространство. Все вновь присоединенные точки, т. е. все точки $M = (x, y, z)$, у которых хотя бы одна из трех координат является невещественным числом, называются *мнимыми точками* комплексного трехмерного пространства.

Упорядоченная пара точек $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ комплексного пространства называется *вектором, приложенным к точке* M_1 (или *закрепленным* в ней). Комплексные числа $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$ называются *координатами закрепленного вектора*. Два вектора *равны*, если соответственно равны их координаты. Классы равных между собою векторов называются *свободными векторами*; они взаимно однозначно соответствуют тройкам комплексных чисел x, y, z — тройкам координат всевозможных закрепленных векторов, являющихся элементами данного класса. Свободные векторы обозначаются так:

$$\mathbf{u} = \{x, y, z\}.$$

Линейные операции — сложения векторов и умножения вектора на комплексное число — определяются так же, как и в случае плоскости, т. е. «покоординатно», только координат сейчас три, а не две, в этом вся разница. Автоматически вводится и исследуется

также и понятие линейной независимости векторов. Как и в случае точек, мы называем *вещественными* лишь те векторы $\mathbf{u}=\{x, y, z\}$, у которых все три координаты x, y, z суть вещественные числа. Все остальные векторы называются *мнимыми*.

Существенно отметить, что в комплексном пространстве, так же как и в комплексной плоскости, мы рассматриваем наряду с основной системой координат (введенной при самом определении комплексного пространства) и другие системы координат $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$, но *всегда лишь вещественные*; это значит, что и новое начало O' есть вещественная точка пространства и векторы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ суть вещественные векторы. Поэтому переход от одной координатной системы к другой задается формулами линейного преобразования, все коэффициенты в которых суть вещественные числа. Словом, все происходит так, как в случае плоскости, с единственной разницей, что вместо размерности $n=2$ теперь имеем $n=3$.

Прямая в комплексном пространстве задается, так же как и в вещественном, своим параметрическим уравнением, т. е. точкой $M_0=(x_0, y_0, z_0)$, и направляющим вектором $\mathbf{u}_0=\{a, b, c\}$, которые могут быть произвольными комплексными точкой и вектором. Плоскость определяется уравнением первой степени (или параметрическим уравнением); эквивалентность этих обоих способов задания плоскости и вообще основные теоремы §§ 1—6 главы X сохраняются и в случае комплексного пространства.

Вещественной поверхностью мы называем такую алгебраическую поверхность, которая задается уравнением

$$F(x, y, z)=0$$

с вещественными коэффициентами.

Замечание. Определенное в этой главе «комплексное» пространство следовало бы называть *комплексным пространством с выделенным в нем вещественным подпространством* (которое переходит в себя при всех аффинных преобразованиях с вещественной матрицей C, никаких других мы, как неоднократно упоминалось, рассматривать не будем). Такое же замечание можно сделать, разумеется, и о комплексной плоскости. Аналогично можно было бы определить и n-мерное комплексное пространство с выделенным в нем вещественным подпространством.

Однако можно было бы определить и просто комплексное (векторное и точечно-векторное) n-мерное пространство дословно так же, как мы определяли в главах XII и XIV соответственные вещественные пространства, но допуская (в аксиоматических определениях § 1 главы XII) умножение векторов на *любое комплексное число* λ и сохраняя все аксиомы, которым это умножение подчинено. Но в этих лекциях мы будем пользоваться лишь определениями, приведенными в настоящей главе.

§ 8. Распадающиеся линии и поверхности. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения

1. Распадающиеся линии и поверхности. Если многочлен $F(x, y)$ есть произведение двух многочленов $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$:

$$F(x, y) = F_1(x, y) \cdot F_2(x, y),$$

то те и только те точки лежат на линии

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

которые лежат хотя бы на одной из двух линий

$$F_1(x, y) = 0, \tag{2_1}$$
$$F_2(x, y) = 0. \tag{2_2}$$

В этом случае говорят, что кривая (1) *распадается* на кривые (2_1) и (2_2).

Например, кривая второго порядка, заданная уравнением

$$x^2 - y^2 = 0,$$

распадается на пару действительных прямых

$$x + y = 0 \quad \text{и} \quad x - y = 0,$$

а кривая

$$x^2 + y^2 = 0,$$

как упомянуто выше, распадается на пару мнимых прямых

$$x + iy = 0, \quad x - iy = 0,$$

называемых *сопряженными*.

То же имеет место и для поверхностей. Если

$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z) \cdot F_2(x, y, z),$$

то поверхность

$$F(x, y, z) = 0$$

распадается на пару поверхностей

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

Так, например, поверхность второго порядка

$$x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 0$$

распадается на пару плоскостей

$$x + y + z = 0 \quad \text{и} \quad x + y - z = 0.$$

2. Цилиндрические поверхности. Определение. Алгебраическая поверхность называется *цилиндрической* (или *цилиндром*), если в некоторой аффинной системе координат она может быть задана уравнением, не содержащим одну из координат, например уравнением

$$f(x, y) = 0, \tag{3}$$

не содержащим координату z [1]).

Кривая, определяемая уравнением (3) в плоскости Oxy, называется иногда *основанием* или *направляющей цилиндра* [2]).

Если точка $M = (x, y, z)$ лежит на цилиндре (3) (рис. 155), то все точки $M' = (x, y, z')$, где z' совершенно произвольно, тоже лежат на цилиндре (3). Все эти точки образуют прямую, проведенную через одну из них, например через точку $M_0 = (x, y, 0)$, параллельно оси Oz. Таким образом, всякая прямая, проведенная параллельно оси Oz через какую-нибудь точку $M_0 = (x, y, 0)$ цилиндра, всеми своими точками лежит на цилиндре; все эти прямые называются *образующими* цилиндра. Их объединение и образует множество всех точек, лежащих на цилиндре.

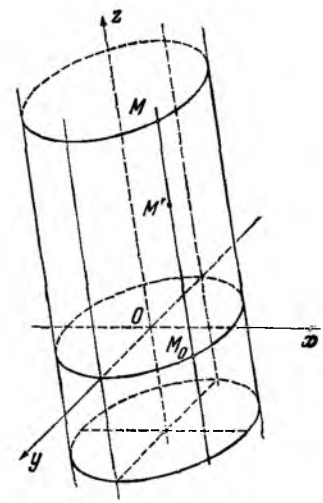


Рис. 155.

Обратно, пусть дана алгебраическая поверхность S, обладающая тем свойством, что всякая прямая, параллельная некоторому (одному и тому же) направлению и проходящая через какую-нибудь точку этой поверхности, всеми своими точками лежит на ней.

Покажем, что эта поверхность является цилиндрической. В самом деле, не ограничивая общности рассуждений, можно предположить, что направление, о котором идет речь, есть направление оси z некоторой системы координат.

Пусть уравнение поверхности S есть $F(x, y, z) = 0$. Всякий многочлен $F(x, y, z)$ от трех переменных может быть записан в виде

$$F(x, y, z) \equiv z^k g(x, y, z) + f(x, y),$$

где $k \geqslant 1$. Докажем, что в нашем случае $g(x, y, z) \equiv 0$.

---

[1]) Очевидно, что, переименовав, если нужно, оси координат, всегда можно предположить, что уравнение данной цилиндрической поверхности не содержит именно координату z.

[2]) Говорят также, что данный цилиндр есть цилиндр *над* кривой, являющейся его основанием.

В противном случае пусть существуют такие значения x_0, y_0, z_0, что $g(x_0, y_0, z_0) = A \neq 0$. Тогда

$$F(x_0, y_0, z_0) \equiv Az_0^k + f(x_0, y_0)$$

и существует лишь конечное число значений z, для которых $F(x_0, y_0, z) = 0$. Пусть z_1 — одно из них. Тогда точка $M_0 = (x_0, y_0, z_1)$ лежит на поверхности S, но прямая

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0, \\ y &= y_0, \end{aligned}\right\}$$

проходящая через эту точку в направлении оси z, уже не лежит целиком на поверхности S — вопреки нашим предположениям. Итак, действительно $g(x, y, z) \equiv 0$, и уравнение поверхности S имеет вид

$$f(x, y) = 0,$$

чем и доказано, что S — цилиндрическая поверхность.

Мы будем в дальнейшем рассматривать лишь цилиндрические поверхности второго порядка; их основаниями являются кривые второго порядка.

3. Конические поверхности. Определение. *Конической поверхностью n-го порядка* называется алгебраическая поверхность, задаваемая в некоторой аффинной системе координат $Oxyz$ уравнением

$$\Phi(x, y, z) = 0, \qquad (4)$$

где $\Phi(x, y, z)$ есть однородный многочлен (форма n-й степени от переменных x, y, z).

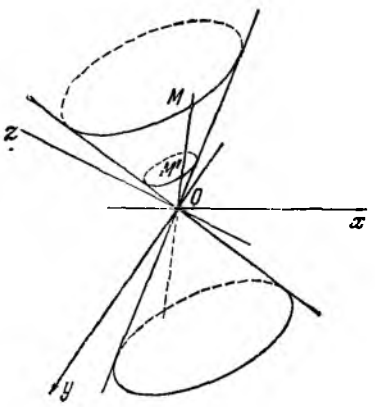


Рис. 156.

Легко доказывается следующее основное свойство конических поверхностей:

(*). Если точка $M = (x, y, z)$ лежит на конической поверхности (4) (рис. 156), то и вся прямая OM лежит на этой поверхности (O при этом есть начало координат).

В самом деле, если точка $M' = (x', y', z')$ — какая-нибудь точка прямой OM, то для вектора $\overrightarrow{OM'}$ имеем равенство $\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$ при некотором числовом множителе λ. А это значит, что $x' = \lambda x$, $y' = \lambda y$, $z' = \lambda z$. Так как $\Phi(x, y, z)$ — однородный многочлен n-й степени, то $\Phi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n \Phi(x, y, z)$; так как точка $M = (x, y, z)$ лежит на поверхности (4), то

$\Phi(x, y, z)=0$, значит, и $\Phi(x', y', z')=\lambda^n\Phi(x, y, z)=0$, т. е. точка M' также лежит на поверхности (4). Итак, всякая коническая поверхность слагается целиком из прямых, проходящих через точку O.

Замечание. Имеет место и обратное предложение, которое сообщаем без доказательства: всякая алгебраическая поверхность, обладающая свойством (*), есть поверхность коническая.

Для поверхностей второго порядка это утверждение можно вывести из результатов главы XIX, § 5.

Сопоставим только что данное общее определение конической поверхности с элементарным «построением конуса над данной плоской кривой». Речь идет о следующем построении. Пусть дана кривая K, лежащая в некоторой плоскости π, и точка O, лежащая вне этой плоскости (рис. 157). Проведем через точку O и каждую точку M кривой K прямую OM. Совокупность всех этих прямых заполняет некоторую поверхность S, которую обыкновенно и называют конусом с вершиной O и направляющей K или конусом, построенным над кривой K. В соответствии с этим множество всех точек конической поверхности второго порядка

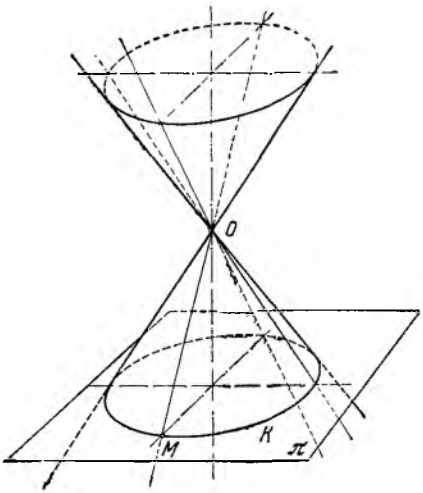


Рис. 157.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (5)$$

есть конус с вершиной $O=(0, 0, 0)$, построенный над эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad z=c,$$

лежащим в плоскости $z=c$ (рис. 158) и являющимся сечением поверхности (5) и плоскости $z=c$.

Сечением конической поверхности (5) с плоскостью $y=b$ (рис. 159) является гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad y=b.$$

Однако конус с вершиной в начале координат O, построенный над этой гиперболой, уже не совпадает с множеством всех точек поверхности (5); чтобы получить это множество, надо к конусу, построен-

ному над гиперболой, присоединить еще все точки двух прямых

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0, \quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0,$$

лежащих в плоскости $y=0$ и входящих в состав поверхности (5).

Итак, если взять какое-нибудь сечение K конической поверхности (5) плоскостью, параллельной одной из координатных плоскостей, то конус S с вершиной O, построенный над кривой K,

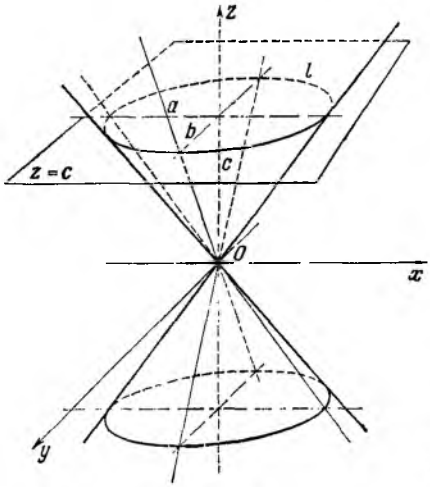


Рис. 158.

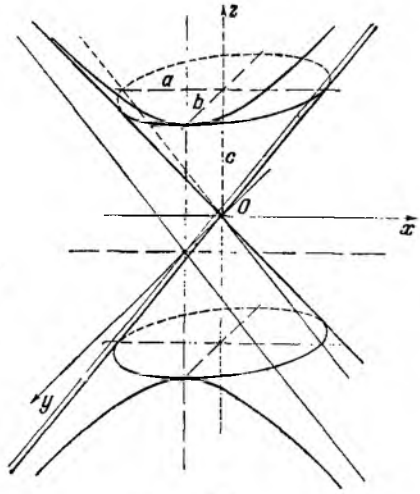


Рис. 159.

может не заполнить множества всех вещественных точек, лежащих на поверхности (5); придется присоединить еще точки этой поверхности, лежащие на соответствующей координатной плоскости. Лишь в главе XXII, при переходе к проективной точке зрения, нам удастся, по крайней мере в случае кривых K второго порядка, пополнить кривую K ее бесконечно удаленными точками и этим восстановить утраченную гармонию: множество всех вещественных точек конуса (5) совпадет тогда с конусом, построенным над любым плоским сечением поверхности (5), являющимся невырожденной вещественной кривой второго порядка.

После рассмотрения примера (5) вернемся к общему случаю конуса S с вершиной O, построенного над любой алгебраической кривой K, лежащей в данной плоскости π, не содержащей точку O (рис. 160). Возьмем систему координат $Oe_1e_2e_3$ с началом O и единичными векторами e_1, e_2, параллельными плоскости π; вектор e_3 определим как какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OO'}$, конец которого лежит в

плоскости π. Таким образом, в этой плоскости определена координатная система $O'\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, а сама плоскость π в системе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ имеет уравнение $z=1$. Пусть кривая K, лежащая в плоскости π, имеет в координатной системе $O'\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ уравнение

$$F(x,\ y)=0, \qquad z=1 \tag{6}$$

степени n. Пусть $M=(x,\ y,\ z)$ — какая-нибудь точка поверхности S. Тогда прямая OM пересекает плоскость π в точке $M_0=(x_0,\ y_0,\ 1)$, координаты x_0, y_0 которой удовлетворяют равенству

$$F(x_0,\ y_0)=0. \tag{7}$$

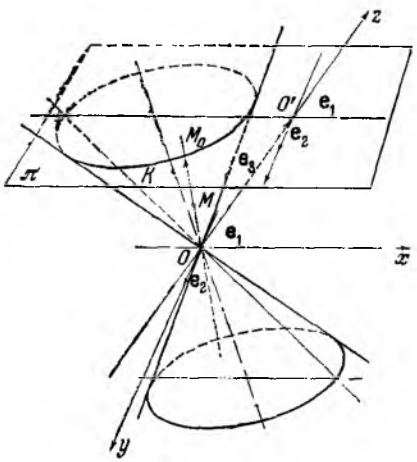


Рис. 160.

Вектор $\overrightarrow{OM_0}=\{x_0,\ y_0,\ 1\}$ является направляющим вектором прямой OM, следовательно, ее параметрическое уравнение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0t,\\ y&=y_0t,\\ z&=1\cdot t. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Так как лежащая на прямой (8) точка $M=(x,\ y,\ z)$ есть произвольная точка поверхности S, то мы доказали следующее предложение: для того чтобы точка $M=(x,\ y,\ z)$ лежала на поверхности S, необходимо и достаточно, чтобы ее координаты удовлетворяли при некотором t уравнениям (8), где x_0, y_0 удовлетворяют уравнению (6).

Подставляя в (7) значения

$$x_0=\frac{x}{t}, \quad y_0=\frac{y}{t}, \quad t=z$$

из (8), переписываем уравнение (7) в виде

$$F\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)=0.$$

Именно этому уравнению удовлетворяют все (отличные от точки O) точки $M=(x,\ y,\ z)$ поверхности S. Многочлен $F\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)$ есть многочлен n-й степени относительно $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, значит, многочлен

$$\Phi(x,\ y,\ z)=z^nF\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)$$

есть однородный многочлен относительно x, y, z. Среди точек $M=(x, y, z)$, не лежащих в плоскости $z=0$, уравнению

$$\Phi(x, y, z)=0 \tag{4}$$

удовлетворяют все точки поверхности S и только они. Само уравнение (4) определяет коническую поверхность порядка n, множество точек которой получается присоединением к поверхности S точек, лежащих в плоскости $z=0$ и удовлетворяющих уравнению $\Phi(x, y, z)=0$.

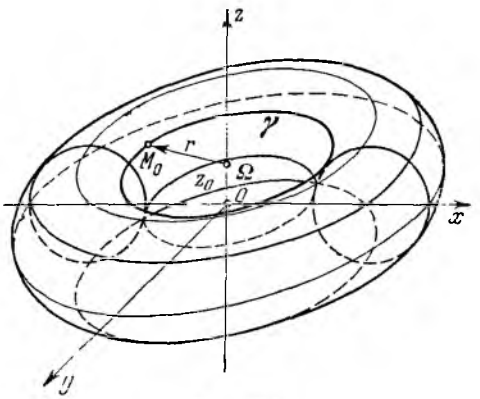


Рис. 161.

4. Поверхности вращения. Пусть в пространстве дана прямоугольная система координат $Oxyz$.

Рассмотрим многочлен $F(u, z)$ от двух переменных, одно из которых, а именно u, есть x^2+y^2, так что

$$F(u, z)\equiv F(x^2+y^2, z).$$

Очевидно, выражение $F(x^2+y^2, z)$ тождественно равно некоторой сумме одночленов от трех переменных x, y, z, т. е. некоторому многочлену $f(x, y, z)$ от этих переменных.

Если потребовать, чтобы многочлен $f(x, y, z)$ был при этом второй степени, то в выражение $F(x^2+y^2, z)$ аргумент x^2+y^2 может входить только в первой степени, а z может входить во второй и в первой степени. Итак, общий вид многочлена второй степени $f(x, y, z)$, допускающего запись $f(x, y, z)\equiv F(x^2+y^2, z)$, есть

$$f(x, y, z)\equiv F(x^2+y^2, z)\equiv A(x^2+y^2)+az^2+2bz+c.$$

Но вернемся к общему случаю многочлена $f(x, y, z)$ любой степени, допускающего запись вида $f(x, y, z)\equiv F(x^2+y^2, z)$, и рассмотрим алгебраическую поверхность S, задаваемую уравнением

$$F(x^2+y^2, z)=0. \tag{9}$$

Пусть точка $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности (9). В плоскости $z=z_0$, проходящей через точку M_0 параллельно плоскости Oxy (рис. 161), возьмем окружность γ с центром $\Omega=(0, 0, z_0)$, проходящую через точку M_0. Радиус этой окружности, очевидно, есть $r=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$, а ее уравнение

$$x^2+y^2=r^2, \qquad z=z_0.$$

Так как точка M_0 лежит на поверхности (9), то $F(r^2, z)=0$, а так как во всех точках $M=(x, y, z)$ окружности γ имеем $x^2+y^2=r^2$, $z=z_0$, то все эти точки лежат на поверхности (9). Итак, если данная точка M_0 лежит на поверхности (9), то на той же поверхности лежат и все точки M, в которые попадает точка M_0 при вращении пространства вокруг оси z. Поэтому *поверхности, уравнения которых при надлежащем выборе прямоугольной системы координат могут быть записаны в виде* (9), *называются поверхностями вращения*. В частности, уравнение поверхности второго порядка, являющейся поверхностью вращения, записывается в виде

$$A(x^2+y^2)+az^2+2bz+c=0.$$

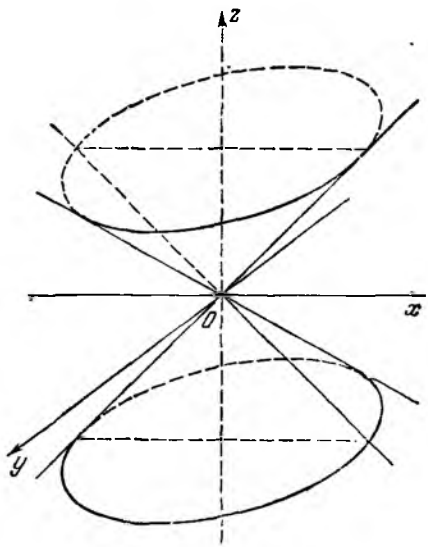


Рис. 162.

Линия, получающаяся при пересечении поверхности вращения плоскостью, проходящей через ось вращения (в нашем случае через ось z), называется *меридианом* этой поверхности вращения. Например, меридианом поверхности вращения

$$F(x^2+y^2, z)=0$$

является сечение этой поверхности с плоскостью $y=0$, т. е. линия

$$F(x^2, z)=0,$$
$$y=0.$$

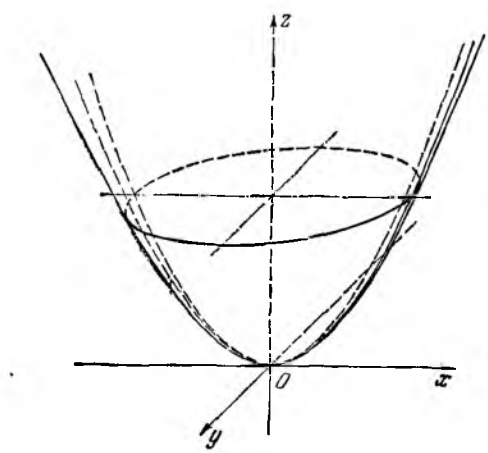


Рис. 163.

Поверхность вращения описывается при вращении линии, являющейся ее меридианом, около оси вращения.

Рассмотрим, например, коническую поверхность

$$x^2+y^2-z^2=0. \quad (10)$$

Ее меридианом, лежащим в плоскости $y=0$, является пара прямых

$$x^2-z^2\equiv(x+z)(x-z)=0, \quad y=0;$$

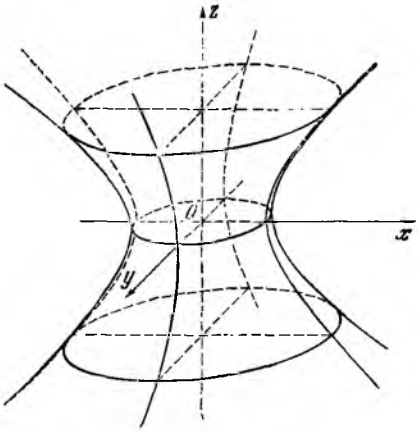


Рис. 164.

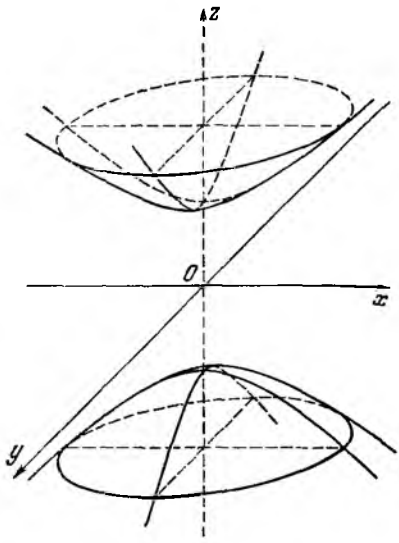


Рис. 165.

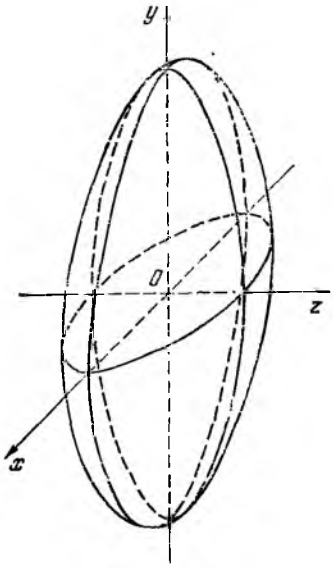


Рис. 166.

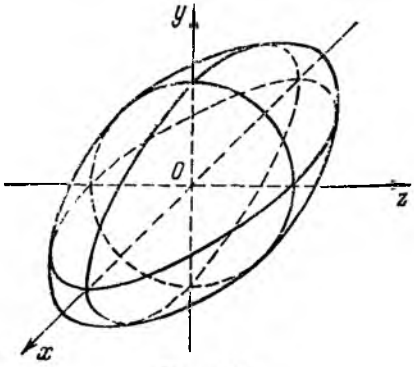


Рис. 167.

конус (10) описывается при вращении этой пары прямых вокруг оси z (рис. 162).

Рассмотрим в качестве второго примера поверхность, задаваемую уравнением

$$z = x^2 + y^2$$

(система координат все время прямоугольная). Это снова поверхность второго порядка, являющаяся поверхностью вращения. Она получается вращением около оси z параболы

$$z = x^2, \qquad y = 0;$$

вид полученной поверхности вращения совершенно ясен, эта поверхность изображена на рис. 163; она называется *параболоидом вращения*.

Поверхности, заданные уравнениями

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1,$$

соответственно

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1,$$

получаются, как легко проверит читатель, при вращении вокруг оси z равнобочной гиперболы, лежащей в плоскости $y = 0$ и имеющей ось z соответственно своей второй и первой осью (рис. 164, рис. 165).

Читатель сам напишет уравнения поверхностей, получающихся от вращения эллипса вокруг его осей (рис. 166, рис. 167).

§ 9. Несколько заключительных замечаний о линиях и поверхностях

Алгебраические линии и поверхности, определенные в этой главе, образуют весьма специальный класс среди линий и поверхностей, рассматриваемых в различных частях математики. Однако общий принцип определения линий и поверхностей посредством уравнений вида

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

на плоскости и

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

в пространстве находит применение в очень широких предположениях о функциях, образующих левую часть уравнений (1) и (2), и очень распространен в математическом анализе.

Каждый раз, когда определен какой-нибудь класс функций $F(x, y)$ или $F(x, y, z)$ соответственно от двух или трех переменных, можно определить посредством уравнений вида (1) и (2) и соответствующий класс линий на плоскости и поверхностей в пространстве [1]. Так, например, можно рассматривать функции $F(x, y)$

[1] Разумеется, задание плоской кривой как графика непрерывной функции $y = f(x)$ есть частный случай определения кривой уравнением (1)— достаточно положить $F(x, y) \equiv y - f(x) = 0$.

и $F(x, y, z)$, имеющие частные производные по всем своим аргументам, вплоть до данного порядка k, можно рассматривать бесконечно дифференцируемые функции и т. д. Наиболее широким представляется класс линий и поверхностей, который получается, если от функций $F(x, y)$ и $F(x, y, z)$ не требовать ничего, кроме их непрерывности; однако этот класс оказывается слишком обширным: если определять линии на плоскости как множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y)=0$, где $F(x, y)$ — любая непрерывная функция, то получаются и такие множества точек, которые никак не отвечают нашему наглядному представлению о линии; достаточно, например, рассмотреть на плоскости уравнение

$$F(x, y) \equiv x + |x| = 0$$

— ему удовлетворяют все точки левой полуплоскости $x \leqslant 0$.

Предположим, мы определили тот или иной класс линий на плоскости, задав соответствующий класс «допустимых» функций $F(x, y)$. Имея в пространстве какую-нибудь систему координат $Oe_1e_2e_3$ и задав в плоскости Oxy линию тем или иным уравнением (1), мы автоматически получаем и цилиндрическую поверхность, имеющую эту линию своим основанием, с образующими, параллельными оси Oz; эта поверхность состоит из всех точек $M=(x, y, z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению (1).

Итак, понятие цилиндрической поверхности можно не ограничивать требованием, чтобы кривая, лежащая в основании цилиндра, была алгебраической.

Аналогичное замечание можно сделать и о понятии конуса, построенного над данной кривой, с данной вершиной и вообще о понятии конической поверхности: для общего определения конической поверхности надо только дать общее определение однородной функции $F(x, y, z)$ от трех переменных как функции, удовлетворяющей при некотором фиксированном натуральном числе k условию

$$F(tx, ty, tz) = t^k F(x, y, z)$$

для всех вещественных чисел t; построенное для данной функции натуральное число k называется *степенью* или *порядком однородности функции* F. Для многочленов это общее определение однородности совпадает с элементарным определением, данным на стр. 322 в подстрочном примечании. После того как определен класс «допустимых функций» $F(x, y, z)$, служащий для того, чтобы посредством уравнений вида (2) задавать «допустимые» поверхности, мы среди этих допустимых поверхностей выделяем конические поверхности, как такие, которые в некоторой системе координат могут быть заданы уравнением (2), левая часть которого есть однородная

допустимая функция. Естественно назвать начало соответствующей системы координат вершиной конической поверхности [1]). Основное свойство конических поверхностей оказывается выполненным и при этом общем определении: если O—вершина конуса, а M—любая его точка, то вся прямая OM лежит на конусе.

Определение алгебраических линий и вообще определение линий посредством уравнений вида (1) применимо лишь к линиям, лежащим на плоскости.

Линии в пространстве можно определять, задавая два уравнения

$$F_1(x,\ y,\ z)=0, \tag{2_1}$$
$$F_2(x,\ y,\ z)=0, \tag{2_2}$$

как пересечение поверхностей, определенных соответственно этими уравнениями.

Пример такого определения линии мы имели, когда задавали прямую в пространстве ее так называемым «общим уравнением», т. е. как пересечение двух плоскостей

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Вообще же, задавая линию в пространстве системой двух уравнений вида (2_1), (2_2), приходится принимать некоторые предосторожности, так как не всегда пересечение двух поверхностей естественно называть линией.

Широко применяется в математике и задание линий посредством параметрических уравнений:

двух:

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(t),\\ y&=f_2(t)\end{aligned}\right\} \tag{3_2}$$

— на плоскости;

трех:

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(t),\\ y&=f_2(t),\\ z&=f_3(t)\end{aligned}\right\} \tag{3_3}$$

— в пространстве.

Большим достоинством этого способа задавать линии является его всеобщность — он в равной мере применим и к плоским,

[1]) Следует, однако, отметить, что вершина конической поверхности, вообще говоря, не является однозначно определенной: так, пара пересекающихся плоскостей является конической поверхностью, за вершину которой можно принять любую точку прямой пересечения этих плоскостей.

и к пространственным линиям (и даже к линиям в n-мерном пространстве).

Читатель, вероятно, оценил удобства параметрического задания линий даже на простейшем рассмотренном в этих лекциях примере — параметрического уравнения прямой. Налагая те или иные условия на класс «допустимых» функций $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, мы получаем соответствующие классы линий. Среди них особенно важным является класс дифференцируемых линий, определяемых уравнениями (3_2), (3_3), в которых правыми частями являются дифференцируемые функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$. Дифференцируемые линии характеризуются наличием у них касательной в каждой точке. Если у функций $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ в каждой точке (рассматриваемого отрезка $a \leqslant t \leqslant b$) существуют непрерывные производные, то линии (3_2) и (3_3) называются *гладкими* (или «кривыми с непрерывно вращающейся касательной»).

Кривые «*гладкости k*» определяются требованием, чтобы функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ имели непрерывные производные до порядка k включительно.

Полученные таким образом классы кривых изучаются в элементарной дифференциальной геометрии.

В противоположность этой все возрастающей специализации понятия кривой, противоположный подход — стремление найти наиболее широкий класс множеств, еще заслуживающих названия линий, и изучение этих наиболее общих линий — с успехом осуществляется в топологии. Задача определения и изучения линий в общетопологическом смысле слова была впервые поставлена Д. Ф. Егоровым[1]) еще в 1911 г. и была решена П. С. Урысоном (а также австрийским математиком К. Менгером) в 1921 г.[2]). Начальные сведения об этих вещах (а также о созданной П. С. Урысоном теории размерности) читатель может получить в превосходной и очень доступно написанной книжке А. С. Пархоменко «Что такое линия?».

В заключение заметим, что поверхности можно также определять параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(u, v), \\ y &= \varphi_2(u, v), \\ z &= \varphi_3(u, v), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

---

[1]) Д. Ф. Егоров (1869—1930) — выдающийся русский и советский математик, работы которого относятся к различным областям математики (дифференциальной геометрии, теории функций, различным вопросам анализа); вместе со своим учеником Н. Н. Лузиным является основателем современной московской математической школы.

[2]) П. С. Урысон (1898—1924) — один из крупнейших топологов теоретико-множественного направления, основатель советской топологической школы.

где непрерывные функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ определены в некоторой области плоскости, например в квадрате

$$0 \leqslant u \leqslant 1, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1.$$

Замечание. Если требовать лишь непрерывности функций при параметрическом определении (как кривых, так и поверхностей), то снова получается слишком широкий класс геометрических объектов; поэтому в случае определения поверхностей уравнениями (4) требуют, например, существования частных производных функций φ_1, φ_2, φ_3.

Общая проблема топологического определения поверхностей также решена П. С. Урысоном в построенной им теории размерности.

ГЛАВА XVI

Различные виды кривых второго порядка

В § 1 этой главы будет показано, что единственными кривыми второго порядка являются:

эллипсы (включая так называемые *мнимые эллипсы*, определяемые в надлежащей системе координат уравнениями вида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$),

гиперболы,

параболы

и кривые, распадающиеся на *пару прямых* (пересекающихся, параллельных или совпадающих); при этом прямые могут быть действительные или мнимые сопряженные [1]); прямая в паре совпадающих прямых всегда действительна.

В §§ 2, 3, 4 будет показано, как определить вид кривой по ее общему уравнению.

В § 5 будет дана аффинная классификация кривых второго порядка.

Рассмотрим уравнение

$$F(x,\ y)=0,$$

где

$$F(x,\ y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0 \qquad (1)$$

— общий многочлен второй степени. Мы хотим найти прямоугольную координатную систему, в которой уравнение кривой $F(x,\ y)=0$ приняло бы возможно простой — «канонический» — вид.

Начальную координатную систему будем предполагать прямоугольной (если бы она не была таковой, мы бы перешли к новой прямоугольной системе координат и этим преобразовали бы первоначальный многочлен $F(x,\ y)$ в новый многочлен, тоже второй степени, с которого и начали бы наши дальнейшие рассуждения).

---

[1]) Две мнимые прямые называются *сопряженными*, если они могут быть заданы уравнениями $Ax+By+C=0$ и $\bar{A}x+\bar{B}y+\bar{C}=0$, в которых коэффициенты A и $\bar{A}$, B и $\bar{B}$, C и $\bar{C}$ являются взаимно сопряженными комплексными числами.

§ 1. О линиях, определяемых уравнениями второй степени с двумя неизвестными

1. Приведение квадратичной формы от двух переменных к каноническому виду при помощи преобразований прямоугольных координат. Первый шаг заключается в том, чтобы поворотом начального прямоугольного репера Oe_1e_2 на некоторый угол α преобразовать квадратичную форму $\varphi(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ старших членов многочлена

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 \qquad (1)$$

к каноническому виду

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2.$$

Итак, делаем преобразование координат

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Получаем тождественно

$$\begin{aligned} F(x, y) \equiv a_{11}(x'^2\cos^2\alpha - 2x'y'\cos\alpha\sin\alpha + y'^2\sin^2\alpha) + \\ + 2a_{12}(x'^2\cos\alpha\sin\alpha - x'y'\sin^2\alpha - y'^2\sin\alpha\cos\alpha + x'y'\cos^2\alpha) + \\ + a_{22}(x'^2\sin^2\alpha + 2x'y'\cos\alpha\sin\alpha + y'^2\cos^2\alpha) + \\ + 2a_1x'\cos\alpha - 2a_1y'\sin\alpha + 2a_2x'\sin\alpha + 2a_2y'\cos\alpha + a_0 \equiv \\ \equiv F'(x', y') \equiv a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a_0, \end{aligned}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha, \\ a'_{12} &= -a_{11}\cos\alpha\sin\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + a_{22}\cos\alpha\sin\alpha, \\ a'_{22} &= a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\cos^2\alpha, \\ a'_1 &= a_1\cos\alpha + a_2\sin\alpha, \\ a'_2 &= -a_1\sin\alpha + a_2\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Определим угол α требованием, чтобы было $a'_{12} = 0$, т. е. требованием

$$a_{12}\cos^2\alpha + (a_{22} - a_{11})\cos\alpha\sin\alpha - a_{12}\sin^2\alpha = 0 \qquad (4)$$

или

$$a_{12}\operatorname{tg}^2\alpha + (a_{11} - a_{22})\operatorname{tg}\alpha - a_{12} = 0, \qquad (4')$$

причем естественно предположить, что $a_{12} \neq 0$ (при $a_{12} = 0$ нечего было бы делать — форма $\varphi(x, y)$ уже имела бы вид $a_{11}x^2 + a_{22}y^2$).

Из (4') получаем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}. \qquad (5)$$

Так как $(a_{22}-a_{11})^2+4a_{12}^2>0$, то по формуле (5) нужный нам угол α всегда можно определить.

Замечание. Можно определить угол α и так: перепишем (4′) в виде

$$a_{12}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+\frac{a_{22}-a_{11}}{2}\,2\cos\alpha\sin\alpha=0,$$

т. е.

$$a_{12}\cos 2\alpha+\frac{a_{22}-a_{11}}{2}\sin 2\alpha=0,$$

откуда

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}. \qquad (5')$$

Так как $\operatorname{ctg}2\alpha$ может принимать всевозможные действительные значения, то найти нужное α всегда можно.

Полагая для сокращения письма $a'_{11}=\lambda_1$, $a'_{22}=\lambda_2$, сформулируем полученный результат.

Поворотом координатной системы Oe_1e_2 на угол α (определяемый из (5) или (5′), можно преобразовать квадратичную форму

$$\varphi(x,\ y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$$

к каноническому виду

$$\varphi'(x',\ y')=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2,$$

а весь многочлен $F(x,\ y)$ — к виду

$$F'(x',\ y')\equiv\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+2a'_1x'+2a'_2y'+a_0. \qquad (1')$$

Оба коэффициента λ_1 и λ_2 не могут одновременно быть нулями: если бы было $\lambda_1=\lambda_2=0$, то многочлен второй степени $F(x,\ y)$ при преобразовании (2) перешел бы в многочлен первой степени, что, как мы знаем, невозможно.

Итак, возможны два основных случая:

1° $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$.

2° Один из двух коэффициентов λ_1, λ_2 отличен от нуля, другой равен нулю.

2. Первый осиовной случай: $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$. При переносе начала координат в какую-нибудь точку $O'=(x'_0,\ y'_0)$, т. е. при преобразовании

$$x'=x''+x'_0,$$
$$y'=y''+y'_0,$$

многочлен $F'(x',\ y')$ принимает вид

$$F'(x',\ y')=F''(x'',\ y'')=$$
$$=\lambda_1x''^2+\lambda_2y''^2+2(\lambda_1x'_0+a'_1)x''+2(\lambda_2y'_0+a'_2)y''+a'_0, \qquad (6)$$

где свободный член a_0' есть (гл. XV, § 2)

$$a_0' = \lambda_1 x_0'^2 + \lambda_2 y_0'^2 + 2a_1' x_0' + 2a_2' y_0' + a_0 \equiv F'(x_0', y_0').$$

Подберем теперь такие координаты x_0', y_0' нового начала O'', чтобы коэффициенты при x'' и y'' в (6) обратились в нуль, т. е. чтобы

$$\lambda_1 x_0' + a_1' = 0, \quad \lambda_2 y_0' + a_2' = 0. \tag{7}$$

Так как $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, то уравнения (7) дают нужные значения для x_0', y_0'. Итак, в системе координат $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$ первоначальное уравнение $F(x, y) = 0$ нашей кривой преобразуется к виду

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_0' = 0. \tag{8}$$

Переходим к исследованию уравнения (8). Имеем два случая:

Случай А — гиперболический: коэффициенты λ_1 и λ_2 разных знаков.

Случай Б — эллиптический: коэффициенты λ_1 и λ_2 одного и того же знака.

А. Гиперболический случай. Пусть сначала $a_0' \neq 0$, один из коэффициентов λ_1, λ_2 имеет тот же знак, что и a_0'; пусть это будет, например, λ_2; тогда λ_1 и a_0' противоположны по знаку.

Переписываем уравнение (8) в виде

$$\frac{x''^2}{-\frac{a_0'}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{-\frac{a_0'}{\lambda_2}} = 1. \tag{8'}$$

Знаменатель $-\frac{a_0}{\lambda_1}$ в первом члене есть положительное число; обозначаем его через a^2; знаменатель $-\frac{a_0'}{\lambda_2}$ отрицателен; обозначаем его через $-b^2$. Уравнение (8′), т. е. уравнение (8), приняло вид

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1.$$

Это — *каноническое уравнение гиперболы.*

Если в гиперболическом случае $a_0' = 0$, то можно без ограничения общности предположить, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$; введем обозначения $\lambda_1 = a^2$, $\lambda_2 = -b^2$; уравнение (8) переписывается в виде

$$a^2 x''^2 - b^2 y''^2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad (ax'' + by'')(ax'' - by'') = 0. \tag{9}$$

Это — *уравнение пары прямых*, пересекающихся в начале координат O'. Уравнение (9) считаем каноническим уравнением кривой, распадающейся на пару действительных пересекающихся прямых.

Итак, в гиперболическом случае уравнение (8) определяет гиперболу, или пару пересекающихся прямых.

Б. Эллиптический случай. Теперь λ_1 и λ_2 одного знака. Сиова предполагаем сначала, что $a_0' \neq 0$. Если общий знак чисел λ_1 и λ_2 противоположен знаку a_0', то, переписав уравнение (8) в виде (8′), видим, что оба знаменателя $-\frac{a_0'}{\lambda_1}$ и $-\frac{a_0'}{\lambda_2}$ положительны; обозначив их соответственно через a^2 и b^2, получим

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1$$

— *каноническое уравнение эллипса* с полуосями a, b.

Если же общий знак λ_1 и λ_2 совпадает со знаком a_0', то знаменатели в (8′) отрицательны, и мы получаем уравнение

$$-\frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=1. \tag{10}$$

Это — *уравнение «мнимого эллипса»*, или эллипса с мнимыми полуосями ai и bi; нет ни одной действительной точки плоскости, которая бы этому уравнению удовлетворяла.

Пусть теперь в эллиптическом случае $a_0'=0$. Уравнение (8) принимает вид

$$\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2=0.$$

Так как λ_1 и λ_2 одного знака, то это уравнение можно переписать в виде

$$a^2x''^2+b^2y''^2=0 \text{ или в виде } (ax''+biy'')(ax''-biy'')=0. \tag{11}$$

Это — каноническое уравнение кривой, распадающейся на пару пересекающихся *мнимых сопряженных прямых;* оно удовлетворяется единственной действительной точкой O' — точкой пересечения двух мнимых сопряженных прямых

$$ax''+iby''=0, \quad ax''-iby''=0.$$

Итак, в эллиптическом случае уравнение (8) — а значит, и начальное уравнение (6) — определяет или обычный эллипс («действительный»), или «мнимый» эллипс, или пару мнимых сопряженных прямых с одной общей действительной точкой.

3. Второй основной случай: $\lambda_1\lambda_2=0$. Пусть из коэффициентов λ_1, λ_2 в уравнении (1′) один, например λ_1, отличен от нуля, а $\lambda_2=0$. Тогда в системе координат $Oe_1'e_2'$ уравнение

$$F(x,\ y)=0$$

приняло бы вид

$$F'(x',\ y')\equiv\lambda_1 x'^2+2a_1'x'+2a_2'y'+a_0=0. \tag{12}$$

Имеются две дальнейшие возможности:

А. $a_2' \neq 0$. Тогда уравнение (12) можно решить относительно y', т. е. представить его в виде

$$y' = px'^2 + qx' + r,$$

— наша кривая есть график трехчлена второй степени, т. е. *парабола.*

Б. $a_2' = 0$. Тогда уравнение (12) есть

$$\lambda_1 x'^2 + 2a_1' x' + a_0 = 0. \tag{13}$$

Это — квадратное уравнение относительно x'; оно имеет два решения:

$$x' = x_1', \quad x' = x_2' \tag{14}$$

— мы имеем *пару параллельных прямых* (14) — *действительных*, если корни x_1' и x_2' квадратного уравнения (13) действительны, *мнимых и сопряженных,* если таковы корни x_1' и x_2' уравнения (13). Наконец, если $x_1' = x_2'$, то говорят, что уравнение (12), а значит и уравнение (1), определяет *пару слившихся* (или *совпадающих*) действительных прямых.

Подведем общий итог.

Всякая кривая второго порядка есть

или эллипс (*действительный или мнимый*),

или гипербола,

или парабола,

или пара прямых: *пересекающихся* (*действительных или мнимых сопряженных*),

параллельных (*в собственном смысле*) (*действительных или мнимых сопряженных*),

совпадающих (*действительных*).

Приведенное доказательство этого результата содержит в себе и способ определения вида кривой по ее уравнению, однако практически удобным этот способ не является; удобный способ будет дан в следующих параграфах.

§ 2. Инварианты многочлена второй степени

Пусть дан какой-нибудь многочлен второй степени от переменных x, y:

$$F(x, y) \equiv \varphi(x, y) + 2l(x, y) + a_0, \tag{1}$$

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \quad l(x, y) = a_1 x + a_2 y. \tag{2}$$

Обозначим через δ детерминант

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

т. е. дискриминант квадратичной формы $\varphi(x, y)$.

При переходе от прямоугольной системы координат Oxy к новой прямоугольной системе координат $O'x'y'$ многочлен $F(x, y)$ переходит в многочлен

$$F'(x', y') \equiv \varphi'(x', y') + 2l'(x', y') + a'_0. \qquad (1')$$

Так как общее преобразование координат сводится к переносу начала и к переходу к новой координатной системе с тем же началом, то рассмотрим отдельно оба этих частных случая. Как мы знаем (гл. XV, § 2, (5_2) на стр. 370), при переносе начала, т. е. при преобразовании $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} при старших членах многочлена $F(x, y)$ остаются неизменными. Другими словами, остается неизменной матрица квадратичной формы $\varphi(x, y)$, а значит, и ее дискриминант δ.

Если же новая координатная система имеет то же начало $O' = O$, что и старая, то

$$\varphi'(x', y') \equiv a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2,$$
$$l'(x', y') \equiv a'_1x' + a'_2y',$$

причем (как мы видели в гл. XV, § 2, (8) на стр. 371) имеем

$$\delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \delta.$$

Теперь сформулируем два определения, из которых первое уже известно из главы VIII.

Определение 1. Общее (неоднородное) преобразование

$$\left.\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_1, \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

называется *ортогональным*, если ортогональна его матрица

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

т. е. матрица, составленная из коэффициентов при переменных.

Определение 2. Пусть дана целая рациональная функция [1]) $J(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0)$ от коэффициентов многочлена

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0.$$

При произвольном ортогональном преобразовании (3) многочлен $F(x, y)$ тождественно переходит в

$$F(x', y') \equiv a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0.$$

---

[1]) *Целая рациональная функция* (от каких-то переменных ξ, η, ζ, ...) — это просто многочлен от этих переменных. В данном случае $\xi = a_{11}$, $\eta = a_{12}$ и т. д.

Если при этом всегда, т. е. для любого ортогонального преобразования (3), при любом наборе значений a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0

$$J(a'_{11},\ a'_{12},\ a'_{22},\ a'_1,\ a'_2,\ a'_0) = J(a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ a_1,\ a_2,\ a_0), \quad (4)$$

то функция J называется *ортогональным инвариантом* многочлена $F(x,\ y)$.

Примером ортогонального инварианта многочлена может служить

$$\delta = \delta(a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ a_1,\ a_2,\ a_0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Точно так же ортогональным инвариантом является и функция

$$S = S(a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ a_1,\ a_2,\ a_0) = a_{11} + a_{22}.$$

В самом деле, если преобразование (3) есть поворот координатного репера (на какой-то угол α), то из первой и третьей формул (3) § 1 (стр. 399) следует, что

$$S' = S.$$

Но функция S, очевидно, не меняется и при отражении

$$x = x',$$
$$y = -y',$$

а также при переносе начала координат, следовательно, и при любом ортогональном преобразовании.

Докажем, наконец, инвариантность функции

$$\Delta = \Delta(a_{11},\ a_{12},\ a_{22},\ a_1,\ a_2,\ a_0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Для этого наряду с многочленом $F(x,\ y)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\Phi(x,\ y,\ t) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1xt + 2a_2yt + a_0t^2,$$

а наряду с преобразованием (3) рассмотрим преобразование

$$\left.\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_1t', \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_2t', \\ t &= 0x' + 0y' + 1\cdot t'. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

При этом преобразовании квадратичная форма $\Phi(x,\ y,\ t)$ переходит в квадратичную форму

$$\Phi'(x',\ y',\ t') = a'_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x't' + 2a'_2y't' + a'_0t'^2$$

(где коэффициенты a'_{11}, a'_{12} и т. д. те же, что и в многочлене $F'(x',\ y')$). Дискриминант квадратичной формы $\Phi(x,\ y,\ t)$ есть наш

детерминант

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

При преобразовании (5) он помножается на квадрат детерминанта этого преобразования, т. е. на

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}^2 = 1,$$

откуда и следует, что $\Delta(a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_1, a'_2, a') = \Delta(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0)$. Нами доказана

Теорема 1. *Функции*

$$S = a_{11} + a_{22}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

от коэффициентов многочлена (1) *являются ортогональными инвариантами этого многочлена.*

Замечание 1. Из наших рассуждений следует: если многочлен $F(x, y)$ удовлетворяет какому-нибудь из условий $\delta \gtreqless 0$, $\Delta \gtreqless 0$, то при переходе к любой аффинной координатной системе $O'x'y'$ он преобразуется в многочлен $F'(x', y')$, удовлетворяющий тому же условию (потому что детерминанты δ', Δ', построенные для $F'(x', y')$, получаются соответственно из δ и Δ умножением на положительное число — квадрат детерминанта преобразования).

При этом, если квадратичная форма $\varphi(x, y)$ старших членов многочлена $F(x, y)$ является определенной (см. гл. XIII, § 5), то коэффициенты a_{11} и a_{22}, а значит, и их сумма $S = a_{11} + a_{22}$ сохраняют свой знак при любом невырожденном линейном преобразовании. Для неопределенной формы $\varphi(x, y)$ это не так.

Из теоремы 1 мы выведем сейчас такое фундаментальное

Следствие. *Если каким бы то ни было ортогональным преобразованием*

$$x = c_{11}x' + c_{12}y',$$
$$y = c_{21}x' + c_{22}y'$$

мы привели форму

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

к каноническому виду

$$\varphi'(x', y') \equiv a_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2, \qquad (2')$$

то коэффициенты a'_{11} и a'_{22} непременно являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0. \tag{6}$$

В самом деле, из инвариантности S и δ следует, что

$$\left.\begin{aligned} S &= a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22}, \\ \delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{vmatrix} = a'_{11}a'_{22}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

т. е. что сумма чисел a'_{11} и a'_{22} равна S, а их произведение равно δ. А это и значит, что сами эти числа суть корни уравнения (6). Уравнение (6) называется *характеристическим уравнением квадратичной формы* $\varphi(x, y)$. Оно всегда имеет действительные корни, что сразу следует из того, что дискриминант уравнения (6) есть

$$S^2 - 4\delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geqslant 0. \tag{8}$$

Замечание 2. Этот дискриминант равен нулю тогда и только тогда, когда одновременно

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0. \tag{9}$$

Равенства (9) выражают условие, необходимое и достаточное, для того чтобы корни характеристического уравнения были равны между собою.

Мы знаем, что поворотом на угол α (определяемым из формулы (5) § 1) квадратичная форма

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

преобразуется в $\varphi'(x', y') = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2$, причем a'_{11} и a'_{22} всегда суть корни характеристического уравнения (6). Но если корни этого уравнения суть λ_1 и λ_2, то мы не знаем, какой из них есть коэффициент при x'^2 (т. е. a'_{11}), а какой — коэффициент при y'^2.

Считая, что корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения даны, найдем угол α, на который надо повернуть систему координат, чтобы форма $\varphi(x, y)$ перешла именно в $\lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2$ (а не в $\lambda_2x'^2 + \lambda_1y'^2$). Этот угол будет вместе с тем углом наклона новой оси абсцисс (оси Ox') к старой Ox. Для этого переписываем первые два равенства (3) из § 1:

$$a'_{11} = \lambda_1 = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha,$$
$$a'_{12} = 0 = -a_{11}\cos\alpha\sin\alpha + a_{12}\cos^2\alpha - a_{12}\sin^2\alpha + a_{22}\cos\alpha\sin\alpha.$$

Умножаем первое из этих равенств на $\cos\alpha$, второе на $-\sin\alpha$ и складываем. Получаем

$$\lambda_1\cos\alpha = a_{11}(\cos^3\alpha + \cos\alpha\sin^2\alpha) + 2a_{12}\cos^2\alpha\sin\alpha - a_{12}\cos^2\alpha\sin\alpha + a_{12}\sin^3\alpha + a_{22}(\sin^2\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin^2\alpha),$$

т. е.

$$\lambda_1 \cos\alpha = a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}. \tag{10}$$

Это и есть угловой коэффициент новой оси абсцисс! Заметим, что если $a_{12}=0$, то форма $\varphi(x, y)$ уже имеет канонический вид и нет надобности ни в каком повороте системы координат.

§ 3. Центральный случай

Итак, поворотом первоначальной прямоугольной системы координат на угол α, определяемый из формулы (10) предыдущего параграфа, мы приводим многочлен

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 \tag{1}$$

к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + a_0. \tag{1'}$$

Дальнейшее исследование кривой $F(x, y)=0$ заключалось в разборе двух случаев: центрального (когда $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$) и параболического (когда лишь одно из двух чисел λ_1, λ_2 отлично от нуля). Так как $\lambda_1\lambda_2 = \delta$, то центральный случай есть случай $\delta \neq 0$, а параболический — $\delta = 0$.

Предположим, что $\delta \neq 0$. Докажем, что в этом случае можно до всякого поворота системы координат Oxy переносом начала, т. е. преобразованием

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi + x_0, \\ y &= \eta + y_0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

преобразовать многочлен $F(x, y)$ в

$$F^*(\xi, \eta) = a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 + a_0^*. \tag{1*}$$

При этом x_0, y_0 в (2), т. е. координаты нового начала $O' = (x_0, y_0)$, являются однозначно определенными. В самом деле, подставим $x = \xi + x_0$, $y = \eta + y_0$ в (1). Получим

$$F(x, y) \equiv a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)\xi + \\ + 2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)\eta + F(x_0, y_0).$$

Теперь определяем x_0 и y_0 так, чтобы коэффициенты при ξ и η обратились в нуль, т. е. чтобы

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 &= 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Так как по предположению

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то уравнения (3) решаются однозначно и дают нам искомые x_0, y_0.

Теперь, имея корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0,$$

нам остается только определить угол α из формулы (10) предыдущего параграфа и — посредством поворота координатной системы $O'\xi\eta$ на этот угол α — преобразовать многочлен (1) в

$$F'(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + a^*. \tag{I}$$

Определим свободный член a^*. Для этого воспользуемся инвариантностью детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^* \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 a_0^* = \delta a_0^*,$$

откуда

$$a_0^* = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Итак, при переходе от первоначальной системы координат Oxy к новой системе $O'x'y'$ многочлен $F(x, y)$ тождественно преобразовался в

$$F(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\delta}.$$

Нами доказана следующая

Теорема 2. *Пусть в произвольной прямоугольной системе координат Oxy дана кривая второго порядка своим уравнением*

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a_0 = 0,$$

у которого

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Возьмем новую систему координат $O'x'y'$, начало которой есть точка $O' = (x_0, y_0)$, определенная уравнениями (3), а ось абсцисс $O'x'$ наклонена к оси Ox под углом α, определенным уравнением (10) предыдущего параграфа. В системе координат $O'x'y'$ кривая $F(x, y) = 0$ имеет уравнение

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{4}$$

Замечание 1. Как видно из уравнения (4), точка $O' = (x_0, y_0)$, являющаяся началом новой координатной системы $O'x'y'$, есть центр

симметрии нашей кривой. Мы увидим в следующей главе, что в случае $\delta \neq 0$ кривая $F(x, y) = 0$ имеет единственный центр симметрии. Поэтому кривая $F(x, y) = 0$ называется в этом случае *центральной*.

Замечание 2. Существенно отметить, что и новую систему координат $O'x'y'$ (т. е. ее начало и наклон оси $O'x'$ к старой оси абсцисс Ox), и все три коэффициента λ_1, λ_2, $\frac{\Delta}{\delta}$ уравнения (4) мы непосредственно, без всяких сложных вычислений определяем по коэффициентам первоначального уравнения

$$F(x, y) = 0$$

нашей кривой [1]).

Уравнение (4) называется *приведенным уравнением центральной кривой*. Его исследование быстро доводится до конца (по существу, повторением рассуждений § 1, п. 2).

При $\Delta = 0$ уравнение (4) имеет вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 0 \tag{4'}$$

и определяет пару прямых, пересекающихся в начале координат O' (т. е. в центре кривой). Эти прямые действительные при $\delta = \lambda_1\lambda_2 < 0$, мнимые (сопряженные) при $\delta = \lambda_1\lambda_2 > 0$.

Пусть $\Delta \neq 0$, уравнение (4) (т. е. уравнение (8) § 1, в котором положено $a'_0 = \frac{\Delta}{\delta}$) переписывается тогда в виде

$$\frac{x'^2}{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}} + \frac{y'^2}{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}} = 1. \tag{5}$$

Имеем два случая:

а) Случай гиперболический. $\delta = \lambda_1\lambda_2 < 0$; обозначая через λ_1 тот из двух корней характеристического уравнения, знак которого совпадает со знаком Δ, полагаем

$$a^2 = -\frac{\Delta}{\delta\lambda_1} > 0, \quad -b^2 = -\frac{\Delta}{\delta\lambda_2} < 0, \tag{6}$$

получаем уравнение гиперболы

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1. \tag{6'}$$

---

[1]) Поэтому и надо было сначала производить перенос начала, т. е. решать уравнения (3), а потом делать поворот системы координат: в противном случае координаты нового начала определялись бы по формулам (7) из § 1 (стр. 401), в которые входят коэффициенты a', a'_2, для вычисления которых нужны последние две формулы (3) из § 1 (стр. 399).

б) Случай эллиптический. $\delta = \lambda_1\lambda_2 > 0$, числа λ_1 и λ_2 одного знака, и этот знак совпадает со знаком их суммы S.

Если этот знак S противоположен знаку Δ, то можно положить (обозначая через λ_1 тот из двух корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения, для которого $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2|$)

$$a^2 = -\frac{\Delta}{\delta\lambda_1} > 0, \quad b^2 = -\frac{\Delta}{\delta\lambda_2} > 0, \tag{7}$$

получаем уравнение эллипса

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1; \tag{7'}$$

если же знак S (т. е. знак λ_1 и λ_2) совпадает со знаком Δ, то полагаем

$$a^2 = \frac{\Delta}{\delta\lambda_1}, \quad b^2 = \frac{\Delta}{\delta\lambda_2}, \tag{8}$$

уравнение (5) превращается в уравнение

$$-\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \tag{8'}$$

мнимого эллипса.

Рассмотрим частный случай $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда в (7′), соответственно в (8′), имеем $a^2 = b^2$, и мы получаем уравнение окружности:

действительной

$$x'^2 + y'^2 = a^2 \quad \text{(окружность радиуса } a\text{)}$$

или мнимой

$$x'^2 + y'^2 = -a^2 \quad \text{(окружность мнимого радиуса } ia\text{)}.$$

Как было сказано в § 2, замечание 2, корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения равны между собою тогда и только тогда, когда одновременно

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0.$$

Так как при этом исходная система координат — совершенно произвольная прямоугольная система, то *уравнение окружности в любой прямоугольной системе координат имеет вид*

$$A(x^2 + y^2) + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \tag{9}$$

или (по сокращении на $A = a_{11} = a_{22} \neq 0$)

$$x^2 + y^2 + 2a_1'x + 2a_2'y + a_0' = 0. \tag{9'}$$

Обратно, *если в какой-нибудь прямоугольной системе координат кривая определена уравнением* (9), *то эта кривая есть окружность;* для получения ее канонического уравнения достаточно перенести начало координат в точку $O' = (x_0, y_0)$, определяемую уравнениями (3),

которые теперь (для кривой (9′)) имеют вид

$$x_0 + a_1' = 0,$$
$$y_0 + a_2' = 0.$$

И действительно, полагая в (9′)

$$x = x' - a_1',$$
$$y = y' - a_2',$$

получаем (после приведения подобных членов)

$$x'^2 + y'^2 = a_1'^2 + a_2'^2 - a',$$

что дает действительную окружность при $a_1'^2 + a_2'^2 > a'$, мнимую при $a_1'^2 + a_2'^2 < a'$. При $a_1'^2 + a_2'^2 = a'$ получаем

$$x'^2 + y'^2 = 0,$$

т. е.

$$(x' + iy')(x' - iy') = 0$$

—пару мнимых прямых с угловыми коэффициентами $\pm i$; такие прямые называются *изотропными*. Итак, окружность нулевого радиуса есть пара изотропных прямых, пересекающихся в одной действительной точке (центре окружности).

Подведем итог.

В центральном случае, $\delta \neq 0$, имеем такие возможности:

	$\Delta = 0$, случай вырождения	$\Delta \neq 0$
Гиперболический случай, $\delta < 0$	Пара пересекающихся действительных прямых	Гипербола
Эллиптический случай, $\delta > 0$	Пара мнимых сопряженных пересекающихся прямых	Эллипс: действительный, если S и Δ разных знаков; мнимый, если S и Δ одного знака

Замечание 3. Мы видели (замечание 1 § 2), что если многочлен $F(x, y)$ удовлетворяет какому-нибудь из условий $\delta = 0$, $\delta \neq 0$, $\delta > 0$, $\delta < 0$, $\Delta = 0$, $\Delta \neq 0$, $\Delta > 0$, $\Delta < 0$, то тому же условию удовлетворяет и многочлен $F'(x', y')$, в который перешел многочлен $F(x, y)$ при переходе от координатной системы Oxy к произвольной аффинной координатной системе $O'x'y'$. Аналогичное утверждение верно и для инварианта S (в случае определенной квадра-

тичной формы $\varphi(x, y)$ см. замечание 1 § 2 на стр. 406). Поэтому только что приведенная таблица, решающая вопрос о том, находимся ли мы в центральном или нецентральном (параболическом) случае, а также в эллиптическом или гиперболическом, вырождающемся или невырождающемся случае, сохраняет свою силу при произвольно выбранной аффинной координатной системе.

§ 4. Параболический случай: $\delta = 0$

В любом случае, в том числе и параболическом, можно поворотом координатной системы на угол α, определяемый из равенства (10) § 2, преобразовать уравнение

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \qquad (1)$$

исследуемой кривой к виду

$$F'(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + a_0 = 0. \qquad (1')$$

При этом $\delta = \lambda_1\lambda_2$.

Так как теперь $\delta = 0$, то один из корней характеристического уравнения равен нулю.

Пусть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Тогда $S = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2$, и уравнение (1′) может быть написано в виде

$$F'(x', y') \equiv Sy'^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + a = 0. \qquad (1^*)$$

В уравнении (10) § 2 надо положить $\lambda_1 = 0$, так что для определения угла α получается особенно простая формула:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} \qquad (2)$$

$\left(\text{последнее равенство следует из } \delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \text{ т. е. } \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}\right)$.

Исследование уравнения (1*) начнем с вычисления инварианта Δ. Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1' \\ 0 & S & a_2' \\ a_1' & a_2' & a_0 \end{vmatrix} = -a_1'^2 \cdot S,$$

откуда

$$a_1'^2 = -\frac{\Delta}{S}, \quad |a_1'| = \sqrt{-\frac{\Delta}{S}}, \qquad (3)$$

так что a_1' тогда и только тогда обращается в нуль, когда $\Delta = 0$ [1]).

[1]) Так как a_1' — вещественное число, то из формулы (3) следует, что в параболическом случае детерминант Δ или противоположен по знаку числу S, или равен нулю.

Рассмотрим сначала случай $\Delta = 0$, т. е. $a_1' = 0$, тогда уравнение (1*) имеет вид

$$Sy'^2 + 2a_2'y' + a = 0. \tag{4}$$

Это — квадратное уравнение; обозначая его корни через y_1', y_2', видим, что линия (4) есть пара прямых

$$y' = y_1', \quad y' = y_2',$$

параллельных оси Ox'.

Их угловой коэффициент относительно исходной системы координат Oxy есть

$$k = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Для полного определения этих прямых достаточно найти их точки пересечения с одной из старых осей координат Ox или Oy, для чего достаточно решить первоначальное уравнение $F(x, y) = 0$ совместно с $x = 0$ или $y = 0$.

Однако удобнее рассуждать так.

Уравнение (1*) переписываем в виде

$$F(x', y') \equiv Sy'^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + a_0 \equiv$$

$$\equiv S\left(y' + \frac{a_2'}{S}\right)^2 + a_0' = 0, \tag{5}$$

где

$$a_0' = a_0 - \frac{a_2'^2}{S}.$$

Посредством сдвига

$$x'' = x',$$

$$y'' = y' + \frac{a_2'}{S}$$

системы координат преобразуем уравнение (5) к виду

$$Sy''^2 + a_0' = 0. \tag{5'}$$

Положим

$$\left|\frac{a_0'}{S}\right| = b^2.$$

Теперь возможны три случая:

1° $\frac{a_0'}{S} > 0$, $\frac{a_0'}{S} = b^2$,

уравнение (5') записывается в виде

$$y'' = \pm bi,$$

имеем пару параллельных мнимых сопряженных прямых.

2° $\frac{a_0'}{S}<0$, $\frac{a_0'}{S}=-b^2$,

уравнение (5′) записывается в виде

$$y''=\pm b$$

и определяет пару различных действительных параллельных прямых.

3° $\frac{a_0'}{S}=0$,

уравнение (5′) принимает вид

$$y''^2=0$$

и определяет пару слившихся прямых.

Переходим ко второму случаю: $\Delta\neq 0$, т. е. $a_1'\neq 0$. Кривая $F(x, y)=0$ имеет в системе координат $O'x'y'$ уравнение

$$F'(x', y')\equiv Sy'^2+2a_1'x'+2a_2'y'+a_0=0, \qquad (1^*)$$

т. е. является (так как $a_1'\neq 0$) параболой (что нам известно уже из § 1, п. 3).

Найдем ее параметр p. Для этого сделаем перенос начала координат

$$\left.\begin{aligned} x'&=\xi+x_0,\\ y'&=\eta+y_0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Внося (6) в (1*), получаем

$$F'(x', y')\equiv S(\eta+y_0)^2+2a_1'(\xi+x_0)+2a_2'(\eta+y_0)+a_0\equiv$$
$$\equiv S\eta^2+2a_1'\xi+2(Sy_0+a_2')\eta+Sy_0^2+2a_1'x_0+2a_2'y_0+a_0=0.$$

Так как $S=\lambda_2\neq 0$, то, приравнивая коэффициент при η нулю, получаем уравнение

$$Sy_0+a_2'=0,$$

из которого определяем y_0:

$$y_0=-\frac{a_2'}{S}. \qquad (7)$$

После этого приравниваем нулю выражение

$$Sy_0^2+2a_1'x_0+2a_2'y_0+a_0.$$

Так как $a_1'\neq 0$, получаем уравнение относительно x_0:

$$Sy_0^2+2a_1'x_0+2a_2'y_0+a_0=0, \qquad (8)$$

откуда и определяем x_0.

В системе координат $O'\xi\eta$ уравнение $F(x, y)=0$ принимает вид $S\eta^2+2a_1'\xi=0$ или

$$\eta^2=-2\frac{a_1'}{S}\xi. \qquad (9)$$

Меняя, если нужно, положительное направление оси $O'\xi$ на противоположное, всегда можно добиться того, чтобы число

$$p=-\frac{a_1'}{S}$$

было положительным. Окончательно записываем уравнение (9) в виде

$$\eta^2=2p\xi,\ p>0, \qquad (10)$$

где (на основании формулы (3))

$$p=\sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}} \qquad (11)$$

(корень берется, конечно, положительный).

Направление оси параболы есть (с точностью до знака) направление оси $O'\xi$, т. е. направление оси Ox'. Ее угловой коэффициент (по отношению к старой системе координат Oxy) есть

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{a_{11}}{a_{12}}=-\frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Для полного определения расположения параболы нужно знать еще координаты вершины [1]) $O'=(x_0, y_0)$, а также, в какую сторону парабола обращена вогнутостью (т. е. каково должно быть положительное направление оси $O'\xi$, чтобы числа $a_1'=a_1\cos\alpha+a_2\sin\alpha$ и S имели противоположные знаки).

Простое решение этих вопросов будет дано в главе XVII, § 11.

§ 5. Аффинная классификация кривых второго порядка

Мы сейчас покажем, что аффинная классификация кривых второго порядка дается самими наименованиями кривых, т. е. что *аффинными классами кривых второго порядка являются классы:*

действительных эллипсов;

мнимых эллипсов;

гипербол;

пар действительных пересекающихся прямых;

---

[1]) Вычисление которых по формулам (7) и (8) затруднительно (из-за вхождения в них коэффициентов a_1' и a_2').

пар мнимых (сопряженных) пересекающихся;
парабол;
пар параллельных действительных прямых;
пар параллельных мнимых сопряженных прямых;
пар совпадающих действительных прямых.

Надо доказать два утверждения:

А. Все кривые одного наименования (т. е. все эллипсы, все гиперболы и т. д.) аффинно эквивалентны между собою.

Б. Две кривые различных наименований никогда не являются аффинно эквивалентными.

Доказываем утверждение А. В главе XV, § 3, уже было доказано, что все эллипсы аффинно эквивалентны одному из них, а именно окружности $x^2+y^2=1$, а все гиперболы — гиперболе $x^2-y^2=1$. Значит, все эллипсы, соответственно все гиперболы, аффинно эквивалентны между собою. Все мнимые эллипсы, будучи аффинно эквивалентны окружности $x^2+y^2=-1$ радиуса i, также аффинно эквивалентны между собою.

Докажем аффинную эквивалентность всех парабол. Мы докажем даже больше, а именно что все *параболы подобны между собою.* Достаточно доказать, что парабола, данная в некоторой системе координат своим каноническим уравнением

$$y^2=2px,$$

подобна параболе

$$y^2=2x.$$

Для этого подвергнем плоскость преобразованию подобия с коэффициентом $\frac{1}{p}$:

$$\xi=\frac{1}{p}x, \quad \eta=\frac{1}{p}y.$$

Тогда $x=p\xi$, $y=p\eta$, так что при нашем преобразовании кривая

$$y^2=2px$$

переходит в кривую

$$p^2\eta^2=2p\cdot p\cdot\xi,$$

т. е. в параболу

$$\eta^2=2\xi,$$

что и требовалось доказать.

Переходим к распадающимся кривым. В § 1 (п. 2, формулы (9) и (11), стр. 401 и 402) было доказано, что кривая, распадающаяся на пару пересекающихся прямых, в некоторой (даже прямоугольной) системе координат имеет уравнение

$a^2x^2-b^2y^2=0$, если она действительная,
$a^2x^2+b^2y^2=0$, если она мнимая.

Делая дополнительное преобразование координат

$$x = ax', \quad y = by',$$

видим, что всякая кривая, распадающаяся на пару пересекающихся действительных, соответственно мнимых сопряженных, прямых, имеет в некоторой аффинной системе координат уравнение

$$x^2 - y^2 = 0, \quad \text{соответственно} \quad x^2 + y^2 = 0.$$

Что касается кривых, распадающихся на пару параллельных прямых, то каждая из них может быть (даже в некоторой прямоугольной системе координат) задана уравнением

$$y^2 - b^2 = 0$$

для действительных, соответственно

$$y^2 + b^2 = 0$$

для мнимых, прямых. Преобразование координат $x = bx'$, $y = y'$ позволяет в этих уравнениях положить $b = 1$ (или для совпадающих прямых $b = 0$). Отсюда следует аффинная эквивалентность всех распадающихся кривых второго порядка, имеющих одно и то же наименование.

Переходим к доказательству утверждения Б.

Заметим прежде всего: при аффинном преобразовании плоскости порядок алгебраической кривой остается неизменным. Далее: всякая распадающаяся кривая второго порядка есть пара прямых, а при аффинном преобразовании прямая переходит в прямую, пара пересекающихся прямых переходит в пару пересекающихся, а пара параллельных — в пару параллельных; кроме того, действительные прямые переходят в действительные, а мнимые — в мнимые. Это вытекает из того, что все коэффициенты c_{ik} в формулах (3) (гл. XI, § 3), определяющих аффинное преобразование, суть действительные числа.

Из сказанного следует, что линия, аффинно эквивалентная данной распадающейся кривой второго порядка, есть распадающаяся кривая того же наименования.

Переходим к нераспадающимся кривым. Опять-таки при аффинном преобразовании действительная кривая не может перейти в мнимую, и обратно. Поэтому класс мнимых эллипсов аффинно инвариантен.

Рассмотрим классы действительных нераспадающихся кривых: эллипсов, гипербол, парабол.

Среди всех кривых второго порядка всякий эллипс, и только эллипс, лежит в некотором прямоугольнике, тогда как параболы и гиперболы (равно как и все распадающиеся кривые) простираются в бесконечность. При аффинном преобразовании прямоугольник

$ABCD$, содержащий данный эллипс, перейдет в параллелограмм[1]), содержащий преобразованную кривую, которая, таким образом, не может уходить в бесконечность и, следовательно, является эллипсом.

Итак, кривая, аффинно эквивалентная эллипсу, есть непременно эллипс. Из доказанного следует, что кривая, аффинно эквивалентная гиперболе или параболе, не может быть эллипсом (а также, как мы знаем, не может быть и распадающейся кривой. Поэтому остается лишь доказать, что при аффинном преобразовании плоскости гипербола не может перейти в параболу, и наоборот. Это, пожалуй, проще всего следует из того, что у параболы нет центра симметрии, а у гиперболы он есть. Но так как отсутствие центра симметрии у параболы будет доказано лишь в следующей главе[2]), то мы сейчас дадим второе, тоже очень простое доказательство аффинной неэквивалентности гиперболы и параболы.

Лемма. *Если парабола имеет общие точки с каждой из двух полуплоскостей, определяемых в плоскости данной прямой d, то она имеет хотя бы одну общую точку и с прямой d.*

---

[1]) Докажем, что при аффинном преобразовании плоскости всякий параллелограмм $ABCD$ переходит в некоторый параллелограмм $A^*B^*C^*D^*$ (рис. 168), так что стороны и внутренние точки одного параллелограмма соответственно переходят в стороны и внутренние точки другого. В самом деле, две пары параллельных прямых AB и CD и AD и BC переходят в две пары параллельных прямых A^*B^* и C^*D^* и A^*D^* и B^*C^*, причем отрезки AB, CD, AD, BC переходят соответственно в отрезки A^*B^*, C^*D^*, A^*D^*, B^*C^* и становятся сторонами параллелограмма $A^*B^*C^*D^*$. Всякая внутренняя точка M параллелограмма $ABCD$ лежит на некотором отрезке PQ, концы которого P и Q лежат на параллельных сторонах AB и CD. При аффинном

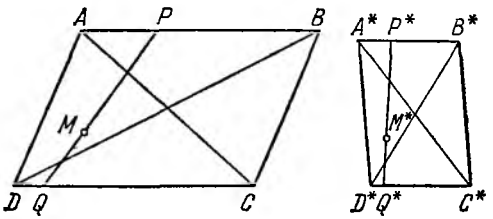


Рис. 168.

преобразовании отрезок PQ перейдет в отрезок P^*Q^*, концы которого лежат на A^*B^* и C^*D^*, а все остальные точки — внутрь параллелограмма $A^*B^*C^*D^*$. Значит, всякая внутренняя точка параллелограмма $ABCD$ перейдет во внутреннюю точку параллелограмма $A^*B^*C^*D^*$.

[2]) Впрочем, читатель уже сейчас может сам попытаться придумать элементарное доказательство этого факта.

В самом деле, мы видели, что существует такая система координат, в которой данная парабола имеет уравнение

$$y^2 = x.$$

Пусть относительно этой системы координат прямая d имеет уравнение

$$Ax + By + C = 0. \tag{1}$$

По предположению на параболе $y^2 = x$ имеются две точки $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$, из которых одна, положим M_1, лежит в положительной, а другая, M_2, — в отрицательной полуплоскости относительно уравнения (1). Поэтому, помня, что $x_1 = y_1^2$, $x_2 = y_2^2$, можем написать

$$Ay_1^2 + By_1 + C > 0, \quad Ay_2^2 + By_2 + C < 0,$$

так что многочлен $Ay^2 + By + C$ принимает в двух концах y_1 и y_2 отрезка $[y_1, y_2]$ числовой прямой значения, противоположные по знаку. Но тогда существует значение $y = y_0$, лежащее между y_1 и y_2, при котором многочлен $Ay^2 + By + C$ принимает значение нуль:

$$Ay_0^2 + By_0 + C = 0.$$

Точка $M(x_0, y_0)$, где $x_0 = y_0^2$, лежит на параболе $y^2 = x$ и на прямой $Ax + By + C = 0$. Лемма доказана.

Пусть при некотором аффинном преобразовании $\mathcal{A}$ гипербола K переходит в кривую K'; докажем, что K' не может быть параболой. Для этого обозначим через d вторую (так называемую «мнимую») ось гиперболы K (см. гл. VI, § 5). При преобразовании $\mathcal{A}$ прямая d перейдет в некоторую прямую d', а полуплоскости, определяемые прямой d, перейдут в полуплоскости, определяемые прямой d'. Гипербола K не имеет ни одной общей точки с прямой d, но имеет общие точки с каждой из двух полуплоскостей, на которые прямая d разбивает плоскость; кривая K' обладает теми же свойствами относительно прямой d'. Поэтому, в силу только что доказанной леммы, кривая K' не может быть параболой — и утверждение об аффинной неэквивалентности гиперболы и параболы доказано. Вместе с тем и закончена аффинная классификация кривых второго порядка.

§ 6. Несколько заключительных замечаний

Еще в школьном курсе геометрии учат, что два треугольника и вообще две плоские фигуры равны между собою, если они совмещаются при наложении.

Другими словами: две плоские фигуры равны, если одна из них может быть переведена в другую посредством движения. При этом рассматривается вся группа движений, состоящая как из собственных, так и несобственных движений плоскости (мы помним «третий слу-

чай равенства треугольников», из которого вытекает, что треугольники, симметричные по отношению к некоторой прямой, считаются равными между собою). И это с точки зрения элементарной геометрии естественно: ведь при «совмещении» двух фигур разрешается всякое их перемещение в пространстве, в частности и поворот в пространстве вокруг какой-нибудь прямой на угол π, посредством которого данный треугольник переходит в симметричный ему. Иное дело — симметрия в пространстве: две треугольные пирамиды, симметричные относительно какой-нибудь плоскости, уже нельзя совместить, перемещая их в трехмерном пространстве, а выйти за его пределы — значит выйти и за пределы физически осуществимых движений.

Всякая группа преобразований (плоскости или пространства) порождает свое понятие эквивалентности геометрических фигур: две фигуры считаются *эквивалентными* (по отношению к данной группе), если одна из них переходит в другую посредством преобразования, входящего в данную группу. С другой стороны, всякая геометрическая дисциплина предполагает то или иное свойственное ей понятие эквивалентности изучаемых в ней фигур.

Выдающийся немецкий математик Феликс Клейн (1849—1925) впервые обратил внимание на то, что различные определения эквивалентности геометрических фигур, применяемые в тех или иных областях геометрии, являются определениями эквивалентности по отношению к той или иной группе преобразований. В замечательной речи, произнесенной в 1871 г. при вступлении в должность профессора Эрлангенского университета, Клейн провозгласил общий принцип: определить какую-нибудь геометрическую дисциплину, какую-нибудь «геометрию» — значит определить некоторую группу преобразований пространства и изучать те свойства геометрических фигур, которые сохраняются при преобразованиях, входящих в эту группу, т. е. которые, принадлежа одной какой-нибудь фигуре, принадлежат и всем фигурам, эквивалентным данной по отношению к рассматриваемой группе преобразований. Такие свойства Клейн называл инвариантными по отношению к преобразованиям данной группы или, короче, *инвариантами* этой группы. Клейн кратко сформулировал свою точку зрения в фразе, получившей широкую известность: «Всякая геометрия есть теория инвариантов некоторой группы преобразований» [1]). Так, метрическая геометрия изучает ортогональные инварианты, т. е. инварианты группы движений. Рассмотрим некоторые примеры таких инвариантов. Нетрудно проверить, что две параболы тогда и только тогда метрически эквивалентны, т. е. переходят друг в друга посредством движения, когда равны их параметры, а два эллипса или

[1]) Этим Клейн как бы дал программу систематизации геометрических дисциплин, поэтому упомянутая его речь получила название «эрлангенской программы».

две гиперболы, — когда полуоси одной кривой равны полуосям другой: с точки зрения метрической геометрии эллипс и гипербола вполне характеризуются своими полуосями, а парабола — своим параметром [1]).

Заметим теперь, что из формул (6), (7), (8) § 3 следует, что полуоси нераспадающейся центральной кривой полностью определены числами λ_1, λ_2, Δ, значит, и числами δ, Δ, S (так как λ_1 и λ_2, как корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0,$$

выражаются через δ и S).

Ввиду уравнения (4′) того же § 3 кривая, распадающаяся на пару пересекающихся прямых, также определена (с точностью до своего положения на плоскости) числами λ_1, λ_2, т. е. теми же инвариантами δ, Δ и S. Заметим, однако, что для пары параллельных прямых это уже не так: при любом b для уравнения вида $y^2 \pm b^2 = 0$ имеем одни и те же $\delta = \Delta = 0$. Наконец, параметр параболы, в силу формулы (11) из § 4, записывается в виде

$$p = \sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}},$$

т. е. выражается через Δ и S.

Итак, имеем следующий результат:

Пусть в некоторой прямоугольной координатной системе Oxy даны две (не распадающиеся на пары параллельных прямых) кривые второго порядка своими уравнениями

$$F(x, y) = 0 \text{ и } F'(x, y) = 0,$$

и пусть инварианты δ, Δ, S многочлена $F(x, y)$ равны соответствующим инвариантам многочлена $F'(x, y)$. Тогда кривые $F(x, y) = 0$ и $F'(x, y) = 0$ изометричны между собою (т. е. эквивалентны по отношению к группе движений плоскости).

Мы вернемся к этому вопросу в главе XVII, § 10.

Группа движений есть подгруппа группы преобразований подобия. Изучение инвариантов этой более широкой группы составляет содержание геометрии подобия.

Две невырождающиеся кривые второго порядка тогда и только тогда подобны между собою, когда у них один и тот же эксцентриситет e. Докажем достаточность этого условия. Случай $e = 1$ уже был рассмотрен: подобие всех парабол между собою было установлено в § 5. При $e = 0$ получаем окружности, которые, очевидно,

[1]) Полная метрическая характеристика эллипса, гиперболы и параболы дается также фокальным параметром p и эксцентриситетом e этих кривых; чтобы убедиться в этом, достаточно задать эти кривые их уравнениями «при вершине» (гл. VI, § 8), т. е. $y^2 = 2px + qx^2$, $q = e^2 - 1$.

также все подобны между собою. Остаются эллипсы ($e < 1$) и гиперболы ($e > 1$). Пусть даны два эллипса своими уравнениями в канонических для них системах координат:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1. \tag{2}$$

Любые две прямоугольные координатные системы (с одним и тем же масштабом) переходят друг в друга посредством движения собственного или несобственного; поэтому можно предположить, что у обоих эллипсов (1) и (2) одна и та же каноническая система координат. Положим

$$\frac{a}{a'} = \lambda.$$

Так как $b^2 = a^2(1 - e^2)$ и $b'^2 = a'^2(1 - e'^2)$, то при равенстве эксцентриситетов, $e = e'$, имеем $\frac{b}{b'} = \lambda$. Отсюда следует, что эллипс (1) переходит в эллипс (2) посредством подобного преобразования

$$x = \lambda x', \quad y = \lambda y'.$$

Совершенно так же доказывается, что и всякие две гиперболы с одинаковым эксцентриситетом подобны между собою.

Доказательство обратного утверждения: всякие две подобные между собою невырождающиеся кривые второго порядка имеют один и тот же эксцентриситет — может быть предоставлено читателю.

Доказанные факты формулируют иногда и так:

Фокальный параметр и эксцентриситет невырождающейся кривой второго порядка образуют полную систему ее метрических инвариантов; полная система инвариантов кривой второго порядка относительно группы подобия состоит из одного инварианта — эксцентриситета кривой.

Мы видим, что с точки зрения геометрии подобия размеры фигур совершенно несущественны. Но то, что мы при наглядном геометрическом восприятии разумеем под формой кривой, вполне улавливается группой подобия: два эллипса с одним и тем же эксцентриситетом могут иметь различные размеры, но они имеют одну и ту же форму, они в одинаковой степени растянуты, в одинаковой степени похожи или не похожи на окружность.

Инварианты группы аффинных преобразований составляют предмет изучения аффинной геометрии. С точки зрения аффинной геометрии все эллипсы эквивалентны между собою, так же как и все гиперболы и все параболы; как мы видели в § 5, полная система аффинных инвариантов этих кривых дается уже самими их названиями, которые характеризуют, если так можно выразиться, наиболее грубые свойства их формы; действительно, все эллипсы в каком-то первом приближении

похожи друг на друга. Младший школьник, еще совершенно незнакомый с аналитической геометрией, все же скажет, что эллипс есть «вытянутая окружность», но едва ли найдет сходство между эллипсом и гиперболой.

Однако, дойдя в главе XXII до рассмотрения кривых второго порядка на проективной плоскости[1]), мы узнаем, что парабола есть эллипс, так бесконечно растянувшийся, что он коснулся бесконечно удаленной прямой плоскости, а гипербола есть не что иное, как тот же эллипс, но пересекший бесконечно удаленную прямую и разрезанный ею на две ветви. Мы узнаем, что все три эти кривые эквивалентны между собою по отношению к группе проективных преобразований проективной плоскости — группе еще более обширной, чем группа аффинных преобразований. Обо всем этом будет речь в главах XXI и XXII.

---

[1]) Мы вскользь упомянули о ней в § 5 главы V и подробно займемся ею в главе XXI.

ГЛАВА XVII

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Пересечение алгебраической кривой с прямой. Асимптотические направления и асимптоты алгебраической кривой

Если две алгебраические линии заданы своими уравнениями

$$F_1(x,\ y)=0,\quad F_2(x,\ y)=0,$$

то их пересечение образуют те точки $M=(x,\ y)$, которые лежат и на той, и на другой линии, т. е. удовлетворяют обоим уравнениям $F_1(x,\ y)=0$ и $F_2(x,\ y)=0$.

Мы будем рассматривать в этом параграфе лишь пересечение вещественной алгебраической линии, заданной уравнением

$$F(x,\ y)=0 \tag{1}$$

n-й степени, с прямой; эту последнюю нам удобно задать ее параметрическим уравнением

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+\alpha t,\\ y&=y_0+\beta t,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

причем $\{\alpha,\ \beta\}$—направляющий вектор прямой (2).

Прямая (2) может быть при этом как вещественной, так и мнимой. Нахождение точек, лежащих на обеих линиях (1) и (2), сводится к совместному решению уравнений (1) и (2): значения x и y, выраженные посредством равенств (2) через t, подставим в (1); тогда получим алгебраическое уравнение

$$\theta(t)=0 \tag{3}$$

относительно одного неизвестного; решив его, найдем одно или несколько значений t, которые, будучи подставлены в (2), определят координаты искомых точек пересечения кривой (1) с прямой (2). Все дело при этом в подсчете степени уравнения (3). Ясно, что степень многочлена $\theta(t)$ не может быть больше числа n, являющегося степенью многочлена $F(x,\ y)$. Посмотрим, в каких случаях степень многочлена $\theta(t)$ может оказаться меньше n. Соберем вместе

все члены многочлена $F(x, y)$, каждый из которых имеет высшую степень, т. е. n. Сумму этих членов обозначим через $\varphi(x, y)$. Это — однородный многочлен степени n, т. е. форма n-й степени от двух переменных x и y — «форма старших членов многочлена $F(x, y)$». Теперь мы можем написать тождество

$$F(x, y) \equiv \varphi(x, y) + P(x, y), \tag{4}$$

где $P(x, y)$ есть многочлен от x и y степени $< n$, состоящий из членов, не вошедших в форму $\varphi(x, y)$.

Подставляя (2) в (4) и делая приведение подобных членов, получим многочлен

$$0(t) \equiv A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \ldots + A_1 t + A_0, \tag{5}$$

в котором некоторые коэффициенты, быть может, равны нулю.

Займемся старшим коэффициентом A_n. При подстановке (2) в (4) только члены вида $ax^p y^q$ степени $p+q=n$, т. е. члены, входящие в $\varphi(x, y)$, могут дать член степени n относительно t; так как при нашей подстановке член $ax^p y^q$ перейдет в $a(x_0+\alpha t)^p (y_0+\beta t)^q$, $p+q=n$, то он даст единственный член степени n относительно t, а именно $a\alpha^p\beta^q t^n$. Таким образом, каждый член $ax^p y^q$ многочлена $\varphi(x, y)$ и только члены этого многочлена дадут нам члены степени n в $0(t)$. Сумма всех этих членов будет поэтому иметь вид $\varphi(\alpha, \beta) t^n$, и это будет старший член многочлена $\theta(t)$. Итак, $A_n = \varphi(\alpha, \beta)$. Для того чтобы этот коэффициент был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы направляющий вектор $\{\alpha, \beta\}$ прямой (2) удовлетворял условию

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0. \tag{6}$$

Определение 1. Ненулевой вектор $\{\alpha, \beta\}$, удовлетворяющий равенству (6), называется *вектором асимптотического направления* относительно кривой (1).

Замечание. Множество всех ненулевых векторов (комплексной) плоскости распадается на классы коллинеарных векторов. Эти классы нам теперь удобно будет называть *направлениями:* два вектора $\mathbf{u} = \{\alpha, \beta\}$ и $\mathbf{u}' = \{\alpha', \beta'\}$ тогда и только тогда имеют, или определяют, одно и то же направление, когда они коллинеарны, т. е. когда $\alpha : \beta = \alpha' : \beta'$. Таким образом, в отличие от прежнего словоупотребления, мы теперь считаем, что два взаимно противоположных вектора определяют одно и то же направление. Направление, определяемое вектором $\{\alpha, \beta\}$, обозначаем через $\{\alpha : \beta\}$; все направляющие векторы данной прямой определяют одно и то же направление, называемое *направлением* этой *прямой*. После этого замечания можно говорить о числе асимптотических направлений, определяемых данной кривой.

Пусть прямая (2) не есть прямая асимптотического направления относительно кривой (1). Тогда для определения ее точек

пересечения с кривой (1) мы имеем уравнение

$$\theta(t)=0 \tag{3}$$

степени n. Число корней этого уравнения (считаемых с их кратностью) равно n, и каждому корню t_m ($m=1, 2, \ldots, n$) соответствует (по формулам (2)) определенная точка пересечения (вещественная или мнимая) нашей прямой с кривой (1); при этом, если кратность корня t_m равна p_m, то мы будем говорить, что и соответствующая точка пересечения прямой (2) с кривой (1) имеет кратность p_m, и тогда общее число точек пересечения кривой (1) с прямой (2), считаемых с их кратностями, равно n.

Итак, мы можем сформулировать следующее основное предложение.

Теорема 1. *Алгебраическая кривая порядка n имеет со всякой прямой неасимптотического направления точки пересечения (вещественные или мнимые), общее число которых (если их считать с их кратностями) равно n.*

К этой теореме мы (без доказательства) добавляем еще следующее

Замечание. Если многочлен степени n, стоящий в левой части уравнения алгебраической кривой, разлагается на неприводимые [1]) множители кратности 1, то каково бы ни было направление, неасимптотическое для данной алгебраической кривой порядка n, существует прямая, имеющая это направление и пересекающая данную кривую в n различных точках.

Посмотрим теперь, что происходит, если прямая (2) имеет асимптотическое направление. Тогда коэффициент A_n в уравнении

$$0(t)\equiv A_nt^n+A_{n-1}t^{n-1}+\ldots+A_1t+A_0=0, \tag{5'}$$

определяющем точки пересечения прямой (2) с кривой (1), равен нулю. Может случиться, что не только коэффициент A_n, но и все коэффициенты уравнения (5′) окажутся нулями:

$$A_n=A_{n-1}=\ldots=A_1=A_0=0.$$

Тогда все уравнение (5′) превратится в тождество $0=0$, означающее, что всякая точка прямой (2) удовлетворяет уравнению (1), т. е. лежит на нашей кривой: *прямая* (2) *входит в состав кривой* (1). Это действительно может иметь место, например, в случае кривых второго порядка, распадающихся на пару прямых (см. гл. XVI, § 1). Это же может иметь место и в случае кривой любого порядка, левая часть уравнения которой есть произведение множителей, по крайней мере один из которых — первой степени:

$$F(x,\ y)\equiv(Ax+By+C)\cdot F_1(x,\ y).$$

---

[1]) Многочлен степени m называется *неприводимым*, если он не может быть представлен в виде произведения многочленов степени $< m$.

Перейдем к следующему случаю, когда

$$A_n = \ldots = A_1 = 0, \text{ но } A_0 \neq 0.$$

Тогда уравнение (5′) превращается в противоречивое тождество:

$$A_0 = 0 \text{ при } A_0 \neq 0.$$

Это значит, что уравнения (1) и (2) несовместны, и, следовательно, не существует никакой точки — ни вещественной, ни мнимой, — лежащей одновременно на кривой (1) и на прямой (2). Если $n = 2$, то в этом случае прямая (2) называется *асимптотой* к кривой второго порядка [1]).

Остается рассмотреть случай, когда первый в ряду коэффициент

$$A_n,\ A_{n-1},\ \ldots,\ A_1,\ A_0,$$

отличный от нуля, есть коэффициент A_m, где $n-1 \geqslant m > 0$. Тогда для определения точек пересечения кривой (1) с прямой (2) мы имеем уравнение (5′) степени m, $1 \leqslant m < n$, и общее число точек пересечения (считаемых с их кратностями) меньше n.

Итак, имеет место

Теорема 2. *Для прямой* (2), *имеющей относительно данной алгебраической кривой* (1) *порядка n асимптотическое направление, возможны следующие случаи:*

1. *Прямая* (2) *целиком входит в состав кривой* (1).

2. *Прямая* (2) *не имеет с кривой* (1) *ни одной общей точки* (*ни действительной, ни мнимой*).

3. *Общее число точек пересечения кривой* (1) *с прямой* (2), *считаемых вместе с их кратностями, равно k, где* $1 \leqslant k \leqslant n-1$; *если при этом* $k \leqslant n-2$, *то прямая называется асимптотой.*

Закончим этот параграф доказательством следующего предложения.

Теорема 3. *Для того чтобы прямая, заданная уравнением*

$$Ax + By + C = 0, \tag{7}$$

всеми своими точками содержалась в кривой

$$F(x,\ y) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы многочлен $F(x, y)$ *без остатка делился на многочлен* $Ax + By + C$, *т. е. чтобы имело место тождество*

$$F(x,\ y) \equiv (Ax + By + C) \cdot F_1(x,\ y), \tag{8}$$

где $F_1(x, y)$ — *некоторый многочлен* (*степени* $n-1$).

---

[1]) Вообще, прямая называется *асимптотой* алгебраической кривой порядка n, если число точек ее пересечения с этой кривой (считаемых с их кратностями) не превосходит $n-2$.

Условие, очевидно, достаточно; докажем, что оно необходимо.

Доказательство. Из коэффициентов A, B в уравнении (7) по крайней мере один отличен от нуля. Пусть, например, $B \neq 0$. Расположим многочлен $F(x, y)$ по степеням y, т. е. напишем его в виде

$$F(x, y) \equiv c_0(x)\, y^k + c_1(x)\, y^{k-1} + \ldots + c_{k-1}(x) y + c_k(x),$$

где $c_0(x)$, $c_1(x)$, $\ldots$, $c_k(x)$ — многочлены от одного переменного x. Многочлен $Ax + By + C$ также расположим по степеням y, т. е. запишем его в виде

$$D(x, y) \equiv By + (Ax + C).$$

Рассматривая расположенные по степеням y многочлены $F(x, y)$ и $D(x, y)$ как многочлены от переменного y, разделим первый из этих многочленов на второй, т. е. найдем те (однозначно определенные) многочлены $F_1(x, y)$ и $R(x)$ — частное и остаток, которые удовлетворяют тождеству [1])

$$F(x, y) \equiv F_1(x, y)\ D(x, y) + R(x). \tag{9}$$

Теорема 3 будет доказана, если мы покажем, что $R(x) \equiv 0$. Докажем это от противного. Пусть число x_0 таково, что $R(x_0) \neq 0$. Подставив $x = x_0$ в уравнение (7), находим из него $y = y_0$, так что $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Подставим найденные значения x_0, y_0 в тождество (9). Получим

$$F(x_0, y_0) = F_1(x_0, y_0)\,(Ax_0 + By_0 + C) + R(x_0) = 0 + R(x_0) \neq 0;$$

точка $M_0 = (x_0, y_0)$, будучи точкой прямой (7), в то же время не лежит на кривой $F(x, y) = 0$ — вопреки предположению.

Теорема 3 доказана. Из нее вытекает такое

Следствие. *Для того чтобы кривая второго порядка распадалась на пару прямых, необходимо и достаточно, чтобы левая часть ее уравнения разлагалась на два линейных множителя.*

§ 2. Теорема единственности для кривых второго порядка. Пучок кривых второго порядка

1. Теорема единственности. Теперь мы прервем последовательность нашего изложения, чтобы доказать для кривых второго порядка так называемую «теорему единственности», сформулированную еще в § 1 главы XV, и этим навести в наших рассуждениях об этих кривых должный порядок. Но сначала докажем следующее предложение.

---

[1]) При этом остаток должен иметь (относительно y) степень меньшую, чем делитель $D(x, y)$, т. е. в нашем случае должен вовсе не содержать y.

Теорема 4. *Пусть на плоскости даны пять точек:*

$$M_1=(x_1, y_1),\ M_2=(x_2, y_2),\ M_3=(x_3, y_3),\ M_4=(x_4, y_4),\ M_5=(x_5, y_5),$$

из которых никакие четыре не лежат на одной прямой. Тогда однозначно, с точностью до числового множителя, определены коэффициенты $a_{11}=A$, $a_{12}=B$, $a_{22}=C$, $a_1=D$, $a_2=E$, $a_0=H$ *в уравнении*

$$F(x, y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0 \qquad (1)$$

кривой второго порядка, проходящей через эти точки, откуда следует, что кривая эта существует и единственна.

При этом, если данные пять точек действительны, то и проходящая через них единственная кривая второго порядка действительна.

Доказательство. Напишем условие того, что каждая из точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 лежит на кривой, заданной уравнением (1) с пока еще неизвестными коэффициентами $a_{11}=A$, $a_{12}=B$, $a_{22}=C$, $a_1=D$, $a_2=E$, $a_0=H$. Получаем систему пяти уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2Dx_1+2Ey_1+H=0,\\
&Ax_2^2+2Bx_2y_2+Cy_2^2+2Dx_2+2Ey_2+H=0,\\
&Ax_3^2+2Bx_3y_3+Cy_3^2+2Dx_3+2Ey_3+H=0,\\
&Ax_4^2+2Bx_4y_4+Cy_4^2+2Dx_4+2Ey_4+H=0,\\
&Ax_5^2+2Bx_5y_5+Cy_5^2+2Dx_5+2Ey_5+H=0
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

относительно неизвестных A, B, C, D, E, H. Это — система пяти линейных однородных уравнений с шестью неизвестными. При этом, если точки $M_1, \ldots, M_5$ действительны, то и коэффициенты x_1^2, $2x_1y_1$ и т. д. в уравнениях (2) действительны. Если система (2) — независима, то, в силу замечания в главе XII, § 8, неизвестные A, B, C, D, E, H определены однозначно с точностью до числового множителя, и теорема доказана.

Предположим, что система (2) зависима. Тогда одно из уравнений, пусть пятое, есть линейная комбинация остальных четырех. Следовательно, всякая шестерка чисел A, B, C, D, E, H, удовлетворяющая первым четырем уравнениям (2), удовлетворяет и пятому уравнению (2), а это значит, что всякая кривая (1), проходящая через четыре точки M_1, M_2, M_3, M_4, проходит и через пятую точку M_5. Покажем сначала, что в этом случае три точки из числа четырех M_1, M_2, M_3, M_4 лежат на одной прямой. В самом деле, в противном случае мы могли бы провести через точки M_1, M_2, M_3, M_4 две пары прямых, т. е. две распадающиеся кривые второго порядка:

во-первых, M_1M_2 и M_3M_4,
во-вторых, M_1M_3 и M_2M_4.

Обе эти распадающиеся кривые проходят через четыре точки M_1, M_2, M_3, M_4 и не имеют других общих точек (рис. 169); между тем у них должна была бы быть еще и пятая общая точка, а именно точка M_5. Противоречие! Итак, утверждение доказано: из четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 три, пусть M_1, M_2, M_3, лежат на одной прямой d.

Докажем, что на той же прямой d лежит и четвертая точка (M_4 или M_5). Пусть ни M_4, ни M_5 не лежат на прямой d (рис. 170).

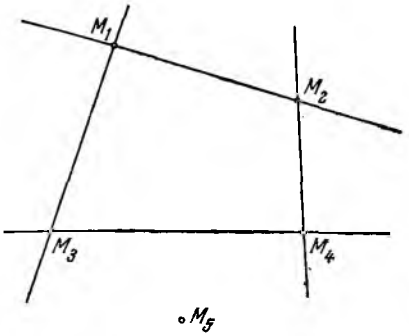


Рис. 169.

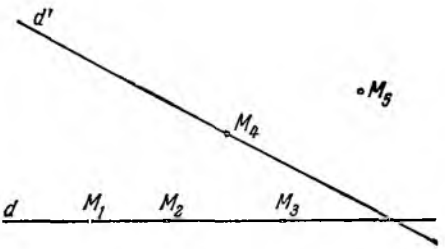


Рис. 170.

Проведем через точку M_4 произвольную прямую d', не проходящую через точку M_5. Имеем снова кривую второго порядка, а именно пару прямых d и d', проходящую через точки M_1, M_2, M_3, M_4, но не проходящую через M_5, — опять получили противоречие.

Итак, мы доказали: если уравнения (2) зависимы, то из точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 четыре лежат на одной прямой. Теорема 4 доказана.

Теорема 5 (теорема единственности). *Если два уравнения второй степени*

$$F(x,\ y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \qquad (1)$$

и

$$F'(x,\ y) \equiv a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_1x + 2a'_2y + a'_0 = 0 \qquad (1')$$

удовлетворяются одним и тем же множеством точек С комплексной плоскости, то одно из этих уравнений получается из другого почленным умножением на некоторой числовой множитель.

Добавление к теореме 5. *Если известно лишь, что множество действительных точек плоскости, удовлетворяющих уравнениям* (1) *и* (1'), *одно и то же и состоит более чем из одной точки, то утверждение теоремы* 5 *остается в силе* (*каждое из уравнений* (1), (1') *получается из другого умножением на числовой множитель*).

Докажем сначала частный случай этой теоремы, а именно случай, когда множество всех точек, удовлетворяющих уравнению (1),

есть некоторая прямая d (т. е. когда линия, определяемая этим уравнением, есть пара совпадающих, непременно действительных, прямых). Перейдя к системе координат, осью ординат которой является прямая d, можем предположить, что ее уравнение есть $x=0$. Достаточно доказать, что в этом случае $F(x, y)=a_{11}x^2$.

Уравнение (1), по предположению, удовлетворяется точками $M=(0, y)$ при любом y, и только этими точками. Поэтому, подставив в (1) значение $x=0$, получим тождество относительно y:

$$a_{22}y^2+2a_2y+a_0=0.$$

Это значит, что $a_{22}=a_2=a_0=0$ и уравнение (1) имеет вид

$$F(x, y)\equiv x(a_{11}x+2a_{12}y+2a_1)=0. \qquad (1_0)$$

Оно удовлетворяется, кроме точек оси ординат, еще и всеми точками прямой d':

$$a_{11}x+2a_{12}y+2a_1=0.$$

Но уравнение (1_0) должно удовлетворяться только точками оси ординат, поэтому прямая d' совпадает с прямой $x=0$, что имеет место лишь при $a_{11}\neq 0$, $a_{12}=a_1=0$.

Тождество $F(x, y)\equiv a_{11}x^2$, а вместе с тем и разбираемый частный случай теоремы 5 доказаны.

Пусть теперь кривая, определяемая уравнением (1), не есть пара совпадающих прямых. Тогда на ней можно найти пять точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, из которых никакие четыре не лежат на одной прямой. Это очевидно, если кривая (1) нераспадающаяся: тогда никакие три ее точки не лежат на одной прямой, и, следовательно, в качестве точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 можно взять любые пять точек, удовлетворяющих уравнению (1). Если же кривая (1) распадается на пару различных прямых d и d', то достаточно взять три точки на одной из этих прямых, а две другие — на другой. Точки (из которых никакие четыре не лежат на одной прямой) лежат и на кривой (1), и на кривой (1′); поэтому, в силу теоремы 4, левые части уравнений (1) и (1′) могут отличаться лишь постоянным множителем. Теорема 5 доказана.

Если (1) не есть мнимый эллипс или пара мнимых (сопряженных) прямых, т. е. если она содержит более одной действительной точки, то множество ее действительных точек бесконечно, и поэтому точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 в предыдущем рассуждении могут быть предположены действительными. Этим доказано и добавление к теореме 5.

2. Пучок кривых второго порядка. Пусть M_1, M_2, M_3, M_4 — четыре точки, не лежащие на одной прямой. Задавая по произволу еще одну точку M_5 (не коллинеарную никаким трем из точек M_1, M_2, M_3, M_4), получим, по теореме 4, единственную кривую второго порядка, проходящую через точки M_1, M_2, M_3, M_4 и точку M_5.

Поэтому множество всех кривых второго порядка, проходящих через четыре точки M_1, M_2, M_3, M_4, бесконечно. Это множество кривых называется *пучком кривых второго порядка, определяемым точками* M_1, M_2, M_3, M_4.

Будем обозначать кривую той же буквой F, которой обозначена левая часть $F(x, y)$ ее уравнения (1), так что F и λF при любом $\lambda \neq 0$ — это одна и та же кривая. Если

$$F(x, y) = \lambda_1 F_1(x, y) + \lambda_2 F_2(x, y),$$

то будем говорить, что кривая F есть *линейная комбинация* (с коэффициентами λ_1 и λ_2) кривых F_1 и F_2. Аналогичной терминологией мы уже пользовались в § 5 главы V в рассуждениях о пучке прямых [1]). Если кривые F_1 и F_2 принадлежат пучку, определяемому точками $M_i = (x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, то уравнения $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$ удовлетворяются, если в них подставить значения $x = x_i$, $y = y_i$ при любых $i = 1, 2, 3, 4$. Но тогда и уравнение $\lambda_1 F_1(x, y) + \lambda_2 F_2(x, y) = 0$ будет при $x = x_i$, $y = y_i$ удовлетворяться. Другими словами, *всякая кривая, являющаяся линейной комбинацией двух (или более) кривых, принадлежащих данному пучку, принадлежит этому пучку.* Докажем обратное предложение. *Пусть в пучке кривых второго порядка выбраны две определенные кривые* F_1 *и* F_2. *Тогда всякая кривая* F *данного пучка есть линейная комбинация этих двух кривых* F_1 *и* F_2.

Пусть пучок определен четверкой точек M_1, M_2, M_3, M_4. Возьмем на кривой F какую-нибудь точку M_5, не коллинеарную ни с какими тремя из точек M_1, M_2, M_3, M_4. Кривая F есть единственная кривая второго порядка, проходящая через точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5. Поэтому для доказательства сделанного утверждения достаточно найти такую линейную комбинацию $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$, чтобы кривая

$$\lambda_1 F_1(x, y) + \lambda_2 F_2(x, y) = 0 \tag{3}$$

проходила через точку $M_5 = (x_5, y_5)$, т. е. достаточно определить λ_1 и λ_2, вернее, их отношение $\lambda_1 : \lambda_2$, из условия

$$\lambda_1 F_1(x_5, y_5) + \lambda_2 F_2(x_5, y_5) = 0, \tag{4}$$

т. е.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{F_2(x_5, y_5)}{F_1(x_5, y_5)}.$$

Итак, *любой пучок кривых второго порядка вполне определен, если даны две какие-нибудь кривые* F_1 *и* F_2 *из этого пучка: он состоит из всех кривых, являющихся линейными комбинациями* $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ *двух данных.* Все эти кривые определяются значениями одного параметра — отношением $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$ двух коэффициентов в линейной

[1]) Читателю рекомендуется освежить в памяти этот параграф.

комбинации $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$. Другими словами, *пучок кривых второго порядка является одномерным многообразием кривых* — совершенно в том же смысле, в каком пучок прямых (гл. V, § 5) является одномерным многообразием прямых (а пучок плоскостей — одномерным многообразием плоскостей).

Понятие пучка кривых позволяет очень просто найти уравнение кривой второго порядка, проходящей через заданные пять точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 (в предположении, что среди них нет четырех точек, лежащих на одной прямой[1])). В самом деле, возьмем четыре точки из числа данных пяти, например M_1, M_2, M_3, M_4. Легко написать уравнения прямых:

d_1: M_1M_2, d_1': M_3M_4,
d_2: M_1M_3, d_2': M_2M_4.

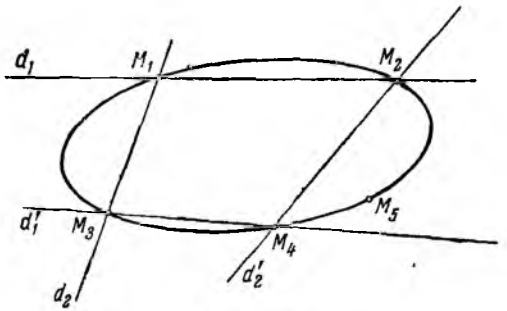


Рис. 171.

Теперь имеем две распадающиеся кривые второго порядка: кривую F_1, распадающуюся на пару прямых d_1 и d_1', и кривую F_2, распадающуюся на прямые d_2 и d_2' (рис. 171). Многочлены $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ суть произведения трехчленов первой степени, являющихся левыми частями уравнений, соответствующих прямым d_1 и d_1', d_2 и d_2'. Распадающиеся линии F_1 и F_2, очевидно, проходят через точки M_1, M_2, M_3, M_4, т. е. принадлежат пучку, определяемому этими точками. Остается только определить отношение $\lambda_1 : \lambda_2$ из условия, чтобы кривая $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ проходила через точку $M_5 = (x_5, y_5)$; этим условием является равенство (4), из которого находим

$$\lambda_1 : \lambda_2 = -F_2(x_5, y_5) : F_1(x_5, y_5).$$

§ 3. Асимптотические направления кривых второго порядка

В § 1 асимптотические направления были определены для любой алгебраической кривой. Сейчас мы повторим это определение для кривых второго порядка, которыми только и будем в дальнейшем заниматься.

---

[1]) Если четыре точки, положим M_1, M_2, M_3, M_4, лежат на одной прямой d, то существует бесконечное множество распадающихся кривых второго порядка, через них проходящих: достаточно взять пару прямых d, d', где d' — любая прямая, проходящая через точку M_5.

Рассмотрим кривую, заданную в произвольной аффинной системе координат Oe_1e_2 уравнением

$$F(x,\ y) \equiv \varphi(x,\ y) + 2l(x,\ y) + a_0 = 0, \tag{1}$$

где, как всегда,

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,\ y) &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \\ l(x,\ y) &= a_1x + a_2y. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

При переходе к новой системе координат $Oe'_1e'_2$ многочлен $F(x, y)$ тождественно переходит в многочлен $F'(x', y')$, а квадратичная форма $\varphi(x, y)$ старших членов многочлена $F(x, y)$ тождественно переходит в квадратичную форму $\varphi'(x', y')$ старших членов многочлена $F'(x', y')$. Поэтому квадратичная форма старших членов уравнения (1), задающего данную кривую второго порядка в любой аффинной системе координат, определяет одну и ту же квадратичную функцию

$$\Phi(\mathbf{u}) \equiv \varphi(\alpha,\ \beta) \quad \text{для} \quad \mathbf{u} = \{\alpha,\ \beta\};$$

в системе $Oe'_1e'_2$ та же функция $\Phi(\mathbf{u})$ запишется в виде

$$\Phi(\mathbf{u}) = \varphi'(\alpha',\ \beta'),$$

если α', β' — координаты вектора $\mathbf{u}$ относительно базиса $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$.

Замечание. Мы рассматривали лишь координатные системы $Oe'_1e'_2$ с тем же началом, что и исходная система Oe_1e_2. Но перенос начала координат не оказывает влияния ни на координаты вектора $\mathbf{u} = \{\alpha, \beta\}$, ни на коэффициенты формы $\varphi(x, y)$. Поэтому вывод, к которому мы только что пришли, остается справедливым при переходе от исходного репера Oe_1e_2 к любому реперу $O'e'_1e'_2$.

Вектор $\mathbf{u} = \{\alpha, \beta\}$ имеет по отношению к кривой (1) асимптотическое направление, если

$$\Phi(\mathbf{u}) \equiv a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0. \tag{3}$$

Из сказанного следует, что *свойство вектора иметь асимптотическое направление по отношению к данной кривой зависит только от данного вектора и данной кривой и не зависит от координатной системы, в которой мы их рассматриваем.*

Из условия (3), определяющего асимптотические направления, легко следует, что всякая кривая второго порядка имеет два асимптотических направления, которые могут быть действительными и различными, действительными и совпадающими или мнимыми сопряженными. В самом деле, все три коэффициента a_{11}, a_{12}, a_{22} не могут быть одновременно равны нулю. Если $a_{11} \neq 0$, то для определения асимптотических направлений $\{\alpha:\beta\}$ имеем квадратное уравнение

$$a_{11}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + a_{22} = 0, \tag{3$_1$}$$

из которого находим два значения для отношения $\alpha:\beta$:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \qquad (4_1)$$

Если известно, что $a_{22}\neq 0$, то вместо (3_1) для определения $\alpha:\beta$ мы бы написали уравнение

$$a_{11}+2a_{12}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+a_{22}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=0, \qquad (3_2)$$

откуда

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{22}}. \qquad (4_2)$$

Пусть один из коэффициентов a_{11}, a_{22} равен нулю. Если, например $a_{11}=0$, то уравнение (3) превращается в

$$\beta(2a_{12}\alpha+a_{22}\beta)=0$$

и одним из двух асимптотических направлений является направление $\alpha\neq 0$, $\beta=0$, соответствующее оси абсцисс.

Наконец, при $a_{11}=a_{22}=0$, $a_{12}\neq 0$ условие (3) превращается в $2a_{12}\alpha\beta=0$, оно определяет направления $\alpha=0$, $\beta\neq 0$ и $\alpha\neq 0$, $\beta=0$, т. е. направления осей координат выбранной нами координатной системы.

Дискриминант квадратного уравнения (3_1) или (3_2) есть $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-\delta$, где, как всегда,

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

Итак, *асимптотические направления кривой второго порядка действительны и различны, когда* $\delta<0$, *т. е. когда кривая — гиперболического типа; они являются мнимыми и сопряженными в эллиптическом случае, т. е. когда* $\delta>0$; *наконец, кривые параболического типа* ($\delta=0$) *характеризуются тем, что у них имеются два совпадающих вещественных асимптотических направления*, а именно (как следует из (4_1) или (4_2) при $\delta=0$):

$$\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{a_{12}}{a_{11}}=-\frac{a_{22}}{a_{12}}. \qquad (5)$$

Рассмотрим частный случай окружности. Всякая окружность в любой координатной системе задается уравнением вида

$$x^2+y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0,$$

и всякое уравнение этого вида определяет окружность. Для нахождения асимптотических направлений $\{\alpha:\beta\}$ имеем условие $\alpha^2+\beta^2=0$,

из которого следует, что все окружности имеют одни и те же мнимые асимптотические направления, а именно направления, записывающиеся в любой прямоугольной системе координат в виде

$$\alpha:\beta=\pm i. \tag{6}$$

Эти направления называются *изотропными направлениями* на плоскости.

Асимптотические направления эллипса, заданного в канонической для него системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

суть $\alpha:\beta=\pm\frac{a}{b}i$, как сразу видно из определяющего эти направления условия $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=0$. Так как ни одно действительное направление не является для эллипса асимптотическим, то *всякая вещественная прямая пересекает эллипс в двух действительных или мнимых различных или совпадающих точках*. При этом ко всякой вещественной прямой можно найти параллельную ей прямую, пересекающую эллипс в двух различных вещественных точках, достаточно взять прямую, параллельную данной и проходящую через центр эллипса (т. е. через начало канонической для данного эллипса системы координат).

Для гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{7}$$

получаем асимптотические направления

$$\beta:\alpha=\pm b:a.$$

Это направления диагоналей основного прямоугольника гиперболы, т. е. прямых

$$y=\pm\frac{b}{a}x,$$

уже названных нами в главе VI асимптотами гиперболы; они и действительно являются асимптотами в общем, установленном в § 1 этой главы смысле: каждое из уравнений $y=\pm\frac{b}{a}x$, т. е.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0, \tag{8}$$

несовместно с уравнением (7), что делается очевидным, если уравнение (7) переписать в виде

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1.$$

Докажем, что никаких других асимптот, кроме прямых (8), у гиперболы (7) нет.

В самом деле, всякая асимптота должна иметь асимптотическое направление, т. е. направляющий вектор $\{a, \pm b\}$. Прямая с направляющим вектором $\{a, b\}$ имеет параметрическое уравнение

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + at, \\ y &= y_0 + bt. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Найдем общие точки гиперболы (7) и прямой (9). Подставляя значения x, y из (9) в (7), получаем для определения точек пересечения гиперболы с прямой (9) уравнение (относительно t)

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} + 2\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)t = 1.$$

Это уравнение имеет единственное решение, за исключением случая, когда

$$\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} = 0; \tag{10}$$

в этом случае оно превращается в противоречивое тождество $0 = 1$ и прямая (9) действительно оказывается асимптотой. Покажем, что ее уравнение есть $y = \frac{b}{a}x$. В самом деле, система параметрических уравнений (9) эквивалентна одному уравнению

$$a(y - y_0) = b(x - x_0), \tag{11}$$

а тождество (10) может быть переписано в виде $bx_0 = ay_0$, так что уравнение (11) получает вид

$$ay = bx, \text{ т. е. } y = \frac{b}{a}x.$$

Итак, единственная асимптота гиперболы (7), имеющая направляющий вектор $\{a, b\}$, есть давно известная нам асимптота $y = \frac{b}{a}x$.

Совершенно так же доказывается, что единственная асимптота гиперболы (7), имеющая направляющий вектор $\{a, -b\}$, есть асимптота $y = -\frac{b}{a}x$.

Других асимптот у гиперболы нет.

Для параболы

$$y^2 - 2px = 0 \tag{12}$$

квадратичная форма $\varphi(x, y)$ сводится к одному члену y^2; асимптотические направления $\beta:\alpha$ определяются из условия

$$\beta^2 = 0;$$

это два слившихся направления, каждое из которых совпадает с направлением $\beta = 0$, т. е. с направлением оси параболы.

Каждая прямая $y = c$ этого направления имеет с параболой единственную общую точку $\left(\frac{c^2}{2p}, c\right)$; таким образом, ни одна из прямых асимптотического направления не является асимптотой параболы — у параболы асимптот нет.

Рассмотрим, наконец, случай, когда кривая второго порядка распадается на пару прямых. Если эти прямые пересекающиеся, то их можно принять за оси координат некоторой аффинной системы Oxy и уравнением пары этих прямых будет

$$F(x, y) \equiv xy = 0.$$

Здесь $F(x, y) = \varphi(x, y)$ и асимптотические направления определяются из уравнения

$$\alpha\beta = 0.$$

Это направления $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ самих наших прямых.

Такой же результат мы получим и для кривой, распадающейся на пару параллельных (в широком смысле) прямых. Взяв систему координат, ось абсцисс которой является средней прямой между обеими данными, а ось ординат произвольна, видим, что получаем каноническое уравнение,— в надлежащей системе координат эта кривая имеет уравнение

$$y^2 \pm b^2 = 0.$$

Здесь (как и в случае параболы) $\varphi(x, y) \equiv y^2$, и мы получаем пару слившихся асимптотических направлений $\beta^2 = 0$, каждое из которых совпадает с общим направлением двух данных параллельных прямых.

Замечание о кривых высших порядков. Покажем, что *алгебраическая кривая n-го порядка, определяемая уравнением*

$$F(x, y) = \varphi(x, y) + P(x, y) = 0,$$

где $\varphi(x, y)$ есть однородный многочлен (форма) n-й степени, а $P(x, y)$ — многочлен степени $\leqslant n-1$, *имеет n асимптотических направлений (если каждое из них считать с его кратностью).*

В самом деле, многочлен $\varphi(\alpha, \beta)$ можно записать в виде

$$\varphi(\alpha, \beta) \equiv \alpha^{\mu}\beta^{\nu}\psi(\alpha, \beta), \qquad \mu \geqslant 0, \quad \nu \geqslant 0,$$

где $\psi(\alpha, \beta)$ уже не делится ни на α, ни на β (так что α^{μ}, соответственно β^{ν},— наивысшая степень α, соответственно β, на которую делятся все члены $\varphi(\alpha, \beta)$; эта степень может, в частности, быть и нулевой).

Степень многочлена $\psi(\alpha, \beta)$ есть

$$m = n - (\mu + \nu).$$

Асимптотическими направлениями являются:

1) направления $\alpha = 0$ (считаемые с кратностью μ), $\beta = 0$ (считаемые с кратностью ν);

2) направления, удовлетворяющие уравнению

$$\psi(\alpha, \beta) = 0;$$

это — m направлений $k=\frac{\beta}{\alpha}$, являющихся корнями уравнения $\psi_1(k)=0$, где многочлен $\psi_1(k)=\psi_1\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ есть частное от деления многочлена $\psi(\alpha, \beta)$ на α^m, т. е. определяется из равенства

$$\psi(\alpha, \beta)=\alpha^m\psi_1\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Всего имеем $(\mu+\nu)+m=n$ асимптотических направлений.

§ 4. Пересечение кривой второго порядка с прямой неасимптотического направления. Касательные

Берем снова кривую второго порядка, заданную (в произвольной аффинной системе координат) уравнением

$$F(x, y)\equiv\varphi(x, y)+2l(x, y)+a_0=0, \qquad (1)$$

где

$$\varphi(x, y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2,$$
$$l(x, y)\equiv a_1x+a_2y.$$

Введем еще следующие обозначения:

$$F_1(x, y)\equiv a_{11}x+a_{12}y+a_1,$$
$$F_2(x, y)\equiv a_{21}x+a_{22}y+a_2.$$

Решая уравнение (1) совместно с уравнением данной прямой

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+\alpha t,\\ y&=y_0+\beta t,\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

получим (в качестве уравнения (3) из § 1) уравнение

$$\theta(t)\equiv At^2+2Bt+C=0, \qquad (3)$$

где, как показывает легкий подсчет,

$$A=\varphi(\alpha, \beta), \quad B=F_1(x_0, y_0)\alpha+F_2(x_0, y_0)\beta, \quad C=F(x_0, y_0). \qquad (4)$$

Мы теперь предполагаем, что

$$A\equiv\varphi(\alpha, \beta)\neq 0,$$

так что уравнение (3) имеет два (различных или совпадающих) корня t_1, t_2. Пусть $t_1=t_2$; тогда прямая (2) пересекает кривую (1) в двух совпадающих точках и называется *касательной* к этой кривой: обе точки пересечения слились в одну точку касания. Для нахождения уравнения касательной удобно взять за точку $M_0=(x_0, y_0)$ прямой (2) как раз ту точку, которая принадлежит и кривой (1), и прямой (2).

Тогда

$$C=F(x_0, y_0)=0$$

и уравнение (3) принимает вид

$$t(At+2B)=0; \tag{3'}$$

оно имеет корень $t=0$. Если в точке $M_0=(x_0, y_0)$ сливаются обе точки пересечения кривой (1) и прямой (2), то оба корня уравнения (3') совпадают и равны нулю. А это может случиться лишь при

$$B=F_1(x_0, y_0)\,\alpha+F_2(x_0, y_0)\,\beta=0,$$

откуда

$$\alpha:\beta=-\frac{F_2(x_0, y_0)}{F_1(x_0, y_0)}.$$

Следовательно, уравнение (2) касательной, переписанное в виде

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta},$$

получает вид

$$\frac{x-x_0}{F_2(x_0, y_0)}=-\frac{y-y_0}{F_1(x_0, y_0)}$$

или

$$F_1(x_0, y_0)(x-x_0)+F_2(x_0, y_0)(y-y_0)=0, \tag{5}$$

где

$$F_1(x_0, y_0)=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1,$$
$$F_2(x_0, y_0)=a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2.$$

Подставляя в (5) эти значения $F_1(x_0, y_0)$, $F_2(x_0, y_0)$, раскрывая скобки и принимая во внимание, что $F(x_0, y_0)=0$, переписываем уравнение (5) в виде

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)\,x+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)\,y+a_1x_0+a_2y_0+a_0=0 \tag{6}$$

Замечание. Для нераспадающихся кривых второго порядка (для которых $F_1(x_0, y_0)$ и $F_2(x_0, y_0)$ не могут одновременно обратиться в нуль) уравнение касательной в виде (5) совпадает с уравнением, даваемым в курсах анализа: ведь

$$F_1(x, y)=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad F_2(x, y)=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Из уравнения (5) видим, что угловой коэффициент касательной есть

$$k=\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{F_1(x_0, y_0)}{F_2(x_0, y_0)}.$$

В случае эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

уравнение (6) касательной в точке $M_0=(x_0, y_0)$ получает вид

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1,$$

что и является самой удобной формой уравнения касательной к эллипсу в его точке $M_0=(x_0, y_0)$.

Аналогично в случае гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

из (6) получаем

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

Для параболы

$$y^2-2px=0$$

уравнение (6) касательной в точке $M_0=(x_0, y_0)$ имеет вид

$$-px+y_0y-px_0=0,$$

или, после очевидных преобразований,

$$y_0y=p(x+x_0).$$

§ 5. Пересечение кривой второго порядка с прямой асимптотического направления. Геометрическая характеристика асимптотических и неасимптотических направлений

Пусть дана кривая

$$F(x, y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0 \qquad (1)$$

и прямая

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+\alpha t,\\ y&=y_0+\beta t,\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

имеющая асимптотическое направление по отношению к кривой (1).

Это значит, что

$$A\equiv\varphi(\alpha, \beta)=a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2=0.$$

Уравнение (3) предыдущего параграфа, определяющее точки пересечения прямой (2) с кривой (1), превращается в

$$2Bt+C=0. \qquad (3)$$

Возможны следующие случаи (известные нам уже из § 1).

Случай I. $B\neq 0$; тогда уравнение (3) определяет одну-единственную точку пересечения прямой (2) с кривой (1).

Случай II. $B=0$, $C\neq 0$; прямая (2), не имея с кривой (1) ни одной точки пересечения, является асимптотой этой кривой.

Случай III. $B=C=0$; уравнение (3) есть тождество $0=0$, каждая точка прямой (2) лежит на кривой (1). Эта кривая распадается на пару прямых, одной из которых является прямая (2).

Итак, *прямая, имеющая по отношению к данной кривой второго порядка асимптотическое направление, либо целиком состоит из точек, лежащих на данной кривой, либо содержит не более одной такой точки. Если же прямая имеет неасимптотическое направление, то она пересекает кривую в двух вещественных (или мнимых сопряженных) точках, которые, однако, могут сливаться в одну точку — точку касания.*

Но пара слившихся точек геометрически ничем не отличается от одной точки, поэтому пока мы еще не умеем охарактеризовать асимптотические (соответственно неасимптотические) направления геометрически, не прибегая к уравнению кривой. Такая характеристика дается следующим предложением:

Теорема 6. *Пусть $F(x, y)=0$ — кривая второго порядка, не являющаяся парой слившихся прямых, и $\{\alpha: \beta\}$ есть направление, неасимптотическое по отношению к кривой* (1). *Тогда существует прямая направления $\{\alpha: \beta\}$, пересекающая кривую в двух различных точках P и Q. При этом, если кривая содержит более одной действительной точки (т. е. не является мнимым эллипсом или парой мнимых сопряженных прямых) и направление $\{\alpha: \beta\}$ действительно, то действительны и точки P, Q.*

Доказательство. Через каждую точку x_0, y_0 кривой (1) проведем прямую

$$x=x_0+\alpha t, \quad y=y_0+\beta t \tag{2}$$

неасимптотического направления $\{\alpha: \beta\}$.

Требуется доказать, что среди прямых (2), проведенных через всевозможные точки (x_0, y_0) кривой (1), имеется по крайней мере одна прямая, не являющаяся касательной к кривой (1) в точке (x_0, y_0). Но если прямая (2) есть касательная к кривой в точке (x_0, y_0), то, как мы знаем из предыдущего параграфа, должно быть

$$B \equiv F_1(x_0, y_0)\,\alpha + F_2(x_0, y_0)\,\beta \equiv$$
$$\equiv (a_{11}\alpha + a_{21}\beta)\,x_0 + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)\,y_0 + a_1\alpha + a_2\beta = 0.$$

Если это верно для каждой точки (x_0, y_0), лежащей на кривой (1), то все эти точки должны удовлетворять соотношению

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)\,x_0 + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)\,y_0 + (a_1\alpha + a_2\beta) = 0. \tag{4$_0$}$$

В этом равенстве коэффициенты $a_{11}\alpha + a_{12}\beta$ и $a_{21}\alpha + a_{22}\beta$ при x_0 и y_0 не могут быть одновременно равны нулю; в самом деле, умножая обе части равенств

$$a_{11}\alpha + a_{12}\beta = 0,$$
$$a_{21}\alpha + a_{22}\beta = 0$$

соответственно на α и β и складывая их, мы бы получили

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0,$$

что означает, что направление $\{\alpha: \beta\}$, вопреки нашим предположениям, является асимптотическим. Итак, равенство (4_0) есть уравнение первой степени относительно x_0 и y_0, которому удовлетворяют все точки (x_0, y_0) кривой (1); другими словами, все точки этой кривой должны лежать на прямой

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)\, x + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)\, y + (a_1\alpha + a_2\beta) = 0. \qquad (4)$$

Но среди кривых второго порядка лишь кривая, являющаяся парой слившихся прямых, обладает тем свойством, что все лежащие на ней точки принадлежат одной прямой; поэтому кривая (1), обладающая этим свойством, есть пара слившихся прямых, каждая из которых задана уравнением (4),— случай, который мы исключили.

Итак, существует точка $M_0 = (x_0, y_0)$ кривой (1), обладающая тем свойством, что проходящая через нее прямая d неасимптотического направления $\{\alpha: \beta\}$ не является касательной; значит, эта прямая пересекает кривую (1) в двух различных точках M_0 и M_1.

Если кривая содержит более одной и, следовательно, бесконечное множество действительных точек и $\{\alpha:\beta\}$ — действительное неасимптотическое направление, то, повторяя наше рассуждение лишь для действительных точек кривой M_0, видим, что найдется прямая, имеющая направление $\{\alpha: \beta\}$, проходящая через действительную точку M_0 кривой и пересекающая ее в двух различных точках. Но если точка $M_0 = (x_0, y_0)$ действительная, то действительной должна быть и вторая точка пересечения M_1. Теорема доказана.

Замечание. Среди прямых асимптотического направления асимптоты кривой характеризуются тем, что в уравнении (3) § 4 имеем $A = 0$, $B = 0$, но $C \neq 0$. Следовательно, если прямая (2) есть асимптота кривой (1), то, во-первых, ее направляющий вектор $\{\alpha, \beta\}$ имеет асимптотическое направление (так что $\varphi(\alpha, \beta) = 0$), а, во-вторых, для любой ее точки (x_0, y_0) выполнено тождество

$$F_1(x_0, y_0)\,\alpha + F_2(x_0, y_0)\,\beta = 0$$

— уравнение асимптоты есть уравнение

$$F_1(x, y)\,\alpha + F_2(x, y)\,\beta = 0, \qquad (4')$$

где вектор $\{\alpha, \beta\}$ имеет асимптотическое направление. Уравнение (4′) может быть переписано в виде

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)\, x + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)\, y + (a_1\alpha + a_2\beta) = 0. \qquad (4)$$

Читатель легко проверит, что в случае гиперболы (заданной каноническим уравнением) мы получаем наши старые уравнения асимптот.

§ 6. Центр кривой второго порядка

Пусть в произвольной аффинной системе координат дана кривая

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \qquad (1)$$

и прямая

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha t \\ y &= y_0 + \beta t \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

неасимптотического направления; обозначим через $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$ точки пересечения кривой (1) с прямой (2).

Решим следующую задачу: когда хорда, имеющая направление $\{\alpha : \beta\}$, делится в точке $M_0 = (x_0, y_0)$ пополам? Другими словами, когда точка $M_0 = (x_0, y_0)$ является серединой отрезка $\overline{M_1M_2}$?

Для этого, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы было

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (3)$$

Но

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \alpha t_1, & y_1 &= y_0 + \beta t_1, \\ x_2 &= x_0 + \alpha t_2, & y_2 &= y_0 + \beta t_2. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (3), получаем

$$x_0 = x_0 + \alpha \frac{t_1 + t_2}{2}, \qquad y_0 = y_0 + \beta \frac{t_1 + t_2}{2},$$

т. е.

$$\alpha \frac{t_1 + t_2}{2} = 0, \quad \beta \frac{t_1 + t_2}{2} = 0.$$

Так как α и β (как координаты направляющего вектора прямой (2)) не могут быть равны нулю одновременно, то условие (3) равносильно условию

$$t_1 + t_2 = 0. \qquad (4)$$

Но t_1 и t_2 суть корни квадратного уравнения

$$At^2 + 2Bt + C = 0;$$

значит, $t_1 + t_2 = \frac{-2B}{A}$, и условие (4) означает $B = 0$ или

$$F_1(x_0, y_0)\,\alpha + F_2(x_0, y_0)\,\beta = 0. \qquad (5)$$

Это и есть условие для того, чтобы точка $M_0 = (x_0, y_0)$ была серединой отрезка $\overline{M_1M_2}$, т. е. хорды, высекаемой кривой (1) из прямой (2).

Определение центра. Напомним прежде всего, что точкой, *симметричной* точке $M = (x, y)$ относительно точки $C = (x_0, y_0)$,

называется точка $M'=(x', y')$, обладающая тем свойством, что точка C есть середина отрезка $\overline{MM'}$. Координаты x', y' точки M' однозначно определяются из условий $x_0=\frac{x+x'}{2}$, $y_0=\frac{y+y'}{2}$. Точка C называется *центром симметрии* (или просто *центром*) данной линии, если, какова бы ни была точка M, лежащая на этой линии, точка M', симметричная точке M относительно точки C, также лежит на

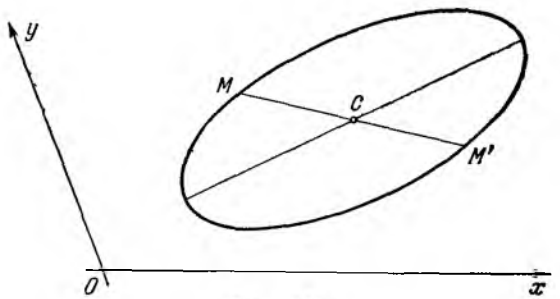


Рис. 172.

данной линии (рис. 172). Эти определения сохраняют силу и для комплексной плоскости.

Докажем следующее предложение.

Теорема 7. *Для того чтобы точка $M_0=(x_0, y_0)$ была центром кривой* (1), *необходимо и достаточно, чтобы координаты x_0, y_0 этой точки удовлетворяли следующим уравнениям* (*называемым «уравнениями центра»*):

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y) &\equiv a_{11}x+a_{12}y+a_1=0,\\ F_2(x, y) &\equiv a_{21}x+a_{22}y+a_2=0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Доказательство. А. Условие необходимо. Пусть $M_0=(x_0, y_0)$ есть центр кривой (1), и пусть хотя бы одно из двух чисел $F_1(x_0, y_0)$, $F_2(x_0, y_0)$ отлично от нуля. Приведем это предположение к противоречию. Рассмотрим равенство (5) как уравнение относительно α и β. Переписывая его как пропорцию

$$\beta:\alpha=-F_1(x_0, y_0):F_2(x_0, y_0),$$

видим, что оно удовлетворяется векторами лишь одного направления, а именно направления

$$\beta_0:\alpha_0=-F_1(x_0, y_0):F_2(x_0, y_0).$$

Между тем для любого неасимптотического направления (а таковыми являются все направления, кроме двух) условие (5) должно быть выполнено (так как прямая (2) этого направления пересекает кривую

(1) в двух точках M_1 и M_2 и точка M_0 есть середина отрезка $\overline{M_1M_2}$). Противоречие получено, необходимость нашего условия доказана.

Б. Условие достаточно. Пусть точка $M_0=(x_0,\ y_0)$ удовлетворяет условию (6). Перенесем начало координат в точку $M_0=(x_0,\ y_0)$, т. е. выполним преобразование координат

$$x=x_0+x',$$
$$y=y_0+y'.$$

Оно переводит уравнение $F(x,\ y)=0$ в уравнение $F'(x',\ y')=0$, где

$$F(x,\ y)\equiv F'(x',\ y')\equiv a_{11}(x_0+x')^2+2a_{12}(x_0+x')(y_0+y')+$$
$$+a_{22}(y_0+y')^2+2a_1(x_0+x')+2a_2(y_0+y')+a_0\equiv$$
$$\equiv a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+2(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)x'+$$
$$+2(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)y'+a_0'=0$$

и

$$a'=F(x_0,\ y_0).$$

Но ввиду равенств (6) последнее уравнение имеет вид

$$F'(x',\ y')\equiv a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+a'=0.$$

В этом уравнении отсутствуют члены первой степени, откуда следует, что новое начало, т. е. точка $M_0=(x_0,\ y_0)$, есть центр симметрии нашей кривой. Теорема доказана.

Из доказанного вытекает, что в центральном случае, т. е. когда

$$\delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0,$$

кривая (1) имеет единственный центр симметрии $M_0=(x_0,\ y_0)$, координаты которого и находятся из уравнений (6).

Если центральная кривая задана своим уравнением в канонической системе координат, то начало координат и есть, как мы теперь знаем, единственный центр кривой.

Заметим вообще, что уравнения (6) имеют силу для любой аффинной системы координат. Поэтому для определения центра какой-либо кривой мы можем ограничиться рассмотрением ее уравнения в канонической для нее координатной системе.

Единственным центром пары пересекающихся прямых является их точка пересечения: это сразу следует из канонического уравнения

$$a^2x^2\pm b^2y^2=0. \tag{7}$$

В параболическом случае мы имеем или параболу, ее каноническое уравнение есть

$$y^2-2px=0, \tag{8}$$

или

пару параллельных (в широком смысле) прямых

$$x^2 \pm a^2 = 0. \tag{9}$$

Для параболы, заданной уравнением (8), уравнения центра приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} 0\cdot x + 0\cdot y - p &= 0, \\ 0\cdot x + 1\cdot y + 0 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Уже первое из этих уравнений противоречиво (так как $p \neq 0$), поэтому система (10) несовместна — у параболы центра нет.

Для пары параллельных прямых, заданных уравнением (9), уравнения (6) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot x + 0\cdot y + 0 &= 0, \\ 0\cdot x + 0\cdot y + 0 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Они определяют прямую $x = 0$, все точки которой и являются центрами симметрии пары прямых (9), что очевидно и геометрически: пара параллельных прямых имеет прямую центров (это — средняя прямая между двумя данными).

§ 7. Диаметры кривой второго порядка

Рассмотрим все прямые, имеющие одно и то же неасимптотическое направление $\{\alpha:\beta\}$; на каждой из этих прямых возьмем в качестве точки $M_0 = (x_0, y_0)$ середину хорды, высекаемой из этой прямой кривой

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \tag{1}$$

Эти точки $M_0 = (x_0, y_0)$ (координаты x_0, y_0 теперь уже переменные!) удовлетворяют уравнению (§ 6, (5))

$$F_1(x, y)\,\alpha + F_2(x, y)\,\beta = 0, \tag{2}$$

т. е.

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_1)\,\alpha + (a_{21}x + a_{22}y + a_2)\,\beta = 0,$$

которое, группируя по-новому его члены, переписываем в виде

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)\,x + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)\,y + (a_1\alpha + a_2\beta) = 0. \tag{2'}$$

Это уравнение есть уравнение некоторой прямой d, на которой и лежат середины всех хорд данного неасимптотического направления (рис. 173). Прямая d называется *диаметром кривой* (1), *сопряженным направлению* $\{\alpha:\beta\}$.

Центр (или центры, если их много) кривой (1), очевидно, удовлетворяет уравнению (2), каково бы ни было направление $\{\alpha:\beta\}$, и поэтому лежит на любом диаметре кривой (1).

Только что данное определение диаметра имеет силу для любой кривой второго порядка (как центральной, так и параболической).

При этом направляющим вектором диаметра, сопряженного направлению $\{\alpha:\beta\}$, является вектор $\{\alpha', \beta'\}$, где $\alpha' = -(a_{21}\alpha + a_{22}\beta)$, $\beta' = a_{11}\alpha + a_{12}\beta$.

Пусть теперь (1) — центральная кривая. Возьмем какую-нибудь прямую d неасимптотического направления, проходящую через единственный центр $M_0 = (x_0, y_0)$ кривой (1); уравнение прямой d записывается в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \tag{3}$$

где (x_0, y_0) удовлетворяют уравнениям центра, т. е. уравнениям (6) предыдущего параграфа.

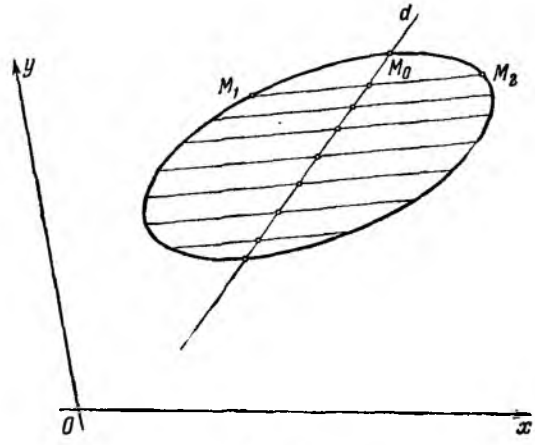


Рис. 173.

Мы ищем направление $\{\alpha:\beta\}$, для которого прямая d была бы сопряженным диаметром, и решаем для этого уравнения

$$a_{11}\alpha + a_{12}\beta = A,$$
$$a_{21}\alpha + a_{22}\beta = B.$$

Уравнения эти решаются однозначно (так как по предположению $\delta \neq 0$) и позволяют переписать (3) в виде

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)(x - x_0) + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)(y - y_0) = 0, \tag{4}$$

что представляет лишь другую запись уравнения (2').

В самом деле, переписываем (4) в виде

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)y = (a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x_0 + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)y_0. \tag{4'}$$

Но ввиду уравнений центра, которым удовлетворяют числа x_0, y_0, правая часть равенства (4′) есть $-a_1\alpha - a_2\beta$, т. е. (4′) принимает вид (2′).

Итак, *всякая прямая d неасимптотического направления, проходящая через (единственный) центр центральной кривой второго порядка, есть диаметр, сопряженный некоторому вполне определенному направлению* $\{\alpha:\beta\}$.

Посмотрим, что дает уравнение (2′) в случае, когда направление $\{\alpha:\beta\}$ асимптотическое. Тогда уравнение (2′), тождественное уравнению (2), есть уравнение асимптоты (см. § 5, замечание). Таким образом, естественно считать асимптоту диаметром, сопряженным своему собственному направлению (хотя при этом первоначальный, наглядно геометрический смысл диаметра, сопряженного данному направлению, утрачивается, так как хорд асимптотического направления не существует).

Теперь *диаметры центральной кривой второго порядка могут быть определены просто как прямые, проходящие через центр данной кривой.*

Замечание. Из сказанного выше следует, что если направление данного диаметра неасимптотическое, то и направление, ему сопряженное, также неасимптотическое.

§ 8. Взаимно сопряженные векторы (направления). Диаметры и касательные

1. Взаимно сопряженные векторы. Особое направление. Диаметр, сопряженный направлению $\{\alpha:\beta\}$, имеет направляющий вектор $\{\alpha', \beta'\}$, где

$$\left.\begin{aligned}\alpha' &= -(a_{21}\alpha + a_{22}\beta),\\ \beta' &= a_{11}\alpha + a_{12}\beta.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Векторы $\{\alpha, \beta\}$ и $\{\alpha', \beta'\}$ связаны соотношением

$$a_{11}\alpha\alpha' + a_{12}(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + a_{22}\beta\beta' = 0, \tag{2}$$

получающимся, если почленно сложить уравнения (1), предварительно умножив обе части первого из них на $-\beta'$, а второго — на α'. Но левая часть равенства (2) есть не что иное, как симметричная билинейная форма $\psi(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$, полярная к квадратичной форме

$$\varphi(\alpha, \beta) = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2.$$

Поэтому естественно ввести следующее

Определение. *Ненулевые векторы* $\mathbf{u} = \{\alpha, \beta\}$ *и* $\mathbf{u}' = \{\alpha', \beta'\}$ (*а также определяемые ими направления* $\{\alpha:\beta\}$ *и* $\{\alpha':\beta'\}$) *называются взаимно сопряженными относительно квадратичной формы*

$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, *если они удовлетворяют уравнению*

$$\psi(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \equiv \psi(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \equiv a_{11}\alpha\alpha' + a_{12}(\alpha\beta' + \beta\alpha') + a_{22}\beta\beta' = 0. \quad (2)$$

Заметим прежде всего: при переходе от координатной системы Oxy к произвольной новой координатной системе $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}$ билинейная форма $\psi(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$ переходит в билинейную форму $\tilde{\psi}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}; \tilde{\alpha}', \tilde{\beta}')$, выражающую ту же билинейную функцию $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$, полярную к квадратичной функции $\Phi(\mathbf{u})$, записывающейся в координатной системе Oxy в виде квадратичной формы $\varphi(\alpha, \beta)$ и в координатной системе $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}$ в виде $\tilde{\varphi}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. Поэтому билинейная функция $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$, обращение в нуль которой характеризует сопряженность векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$, в любой координатной системе записывается в виде билинейной формы, полярной к квадратичной форме старших членов уравнения $F(x, y) = 0$, определяющего в этой системе координат данную кривую второго порядка. *Свойство двух векторов быть или не быть сопряженными относительно формы* $\varphi(x, y)$ *не зависит от выбора той или иной системы координат, а зависит только от квадратичной функции* $\Phi(\mathbf{u})$, *определенной* (в какой-нибудь системе координат) *формой* $\varphi(x, y)$.

Мы будем также говорить, что векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$ (и их направления) сопряжены относительно данной кривой второго порядка, если они сопряжены относительно квадратичной формы старших членов уравнения этой кривой (в какой-нибудь, все равно в какой именно, системе координат). Это позволяет нам в дальнейшем писать условие сопряженности, пользуясь какой-нибудь определенной, например канонической для данной кривой, системой координат.

Зная одно из двух сопряженных направлений, например направление $\{\alpha:\beta\}$, другое определяем без труда; для этого переписываем равенство (2) в виде

$$\alpha'(a_{11}\alpha + a_{12}\beta) = -\beta'(a_{21}\alpha + a_{22}\beta), \quad (2')$$

что означает пропорцию

$$\beta':\alpha' = -(a_{11}\alpha + a_{12}\beta):(a_{21}\alpha + a_{22}\beta), \quad (2'')$$

определяющую направление вектора $\{\alpha', \beta'\}$. Точно так же выражается $\{\alpha, \beta\}$ через $\{\alpha', \beta'\}$:

$$\beta:\alpha = -(a_{11}\alpha' + a_{12}\beta'):(a_{21}\alpha' + a_{22}\beta').$$

Посмотрим, когда два сопряженных между собою направления совпадают. Очевидно, тогда и только тогда, когда

$$-(a_{11}\alpha + a_{12}\beta):(a_{21}\alpha + a_{22}\beta) = \beta:\alpha,$$

т. е. когда

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0.$$

Другими словами, направление тогда и только тогда совпадает со своим сопряженным, когда оно является асимптотическим [1]). Поэтому асимптотические направления называются иначе *самосопряженными*.

Посмотрим, не может ли случиться, что направление $\{\alpha:\beta\}$, сопряженное направлению $\{\alpha':\beta'\}$, перестанет быть определенным. В этом случае направление $\{\alpha':\beta'\}$ назовем *особым*.

Очевидно, направление $\{\alpha':\beta'\}$ будет особым тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\alpha' + a_{12}\beta' = 0, \\ a_{21}\alpha' + a_{22}\beta' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Но вектор $\{\alpha', \beta'\}$ не есть нулевой вектор, поэтому равенства (3) могут иметь место, лишь если

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. если кривая $F(x, y) = 0$ параболическая.

Но это еще не все: умножая обе части первого из уравнений (3) на α', а второго — на β' и складывая, получаем

$$a_{11}\alpha'^2 + 2a_{12}\alpha'\beta' + a_{22}\beta'^2 = 0,$$

т. е. направление $\{\alpha':\beta'\}$ есть асимптотическое направление.

Итак, *только для параболической кривой и для (единственного) ее асимптотического направления сопряженное направление перестает быть определенным.*

С другой стороны, единственное асимптотическое направление

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{a_{22}}{a_{21}}$$

параболической кривой $F(x, y) = 0$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha' + a_{12}\beta' = 0, \\ a_{21}\alpha' + a_{22}\beta' = 0, \end{aligned}$$

т. е. условию

$$\psi(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \equiv (a_{11}\alpha' + a_{12}\beta')\alpha + (a_{21}\alpha' + a_{22}\beta')\beta = 0$$

для любого направления $\{\alpha:\beta\}$.

Итак, *в случае параболической линии ее асимптотическое направление сопряжено всякому направлению, т. е. является особым.*

---

[1]) Это ясно и из того, что билинейная форма $\psi(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$ переходит при $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ в квадратичную форму $\varphi(\alpha, \beta)$.

Вернемся теперь — в случае любой кривой второго порядка $F(x, y) = 0$ — к уравнению (2′) § 7:

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)\, x + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)\, y + (a_1\alpha + a_2\beta) = 0,$$

т. е. к уравнению диаметра, сопряженного направлению $\{\alpha:\beta\}$.

Какова бы ни была кривая второго порядка $F(x, y) = 0$, ее диаметр, сопряженный направлению $\{\alpha:\beta\}$, имеет направление $\{\alpha':\beta'\}$, сопряженное направлению $\{\alpha:\beta\}$. Если кривая $F(x, y) = 0$ центральная, то диаметр, сопряженный направлению $\{\alpha':\beta'\}$, будет иметь направление $\{\alpha:\beta\}$.

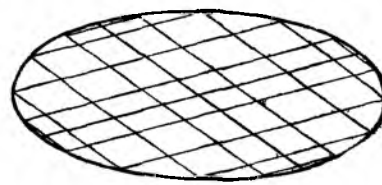


Рис. 174.

Два диаметра центральной кривой называются взаимно сопряженными между собою, если сопряжены их направления. Каждый из двух сопряженных между собою диаметров делит пополам хорды, параллельные другому (рис. 174, рис. 175).

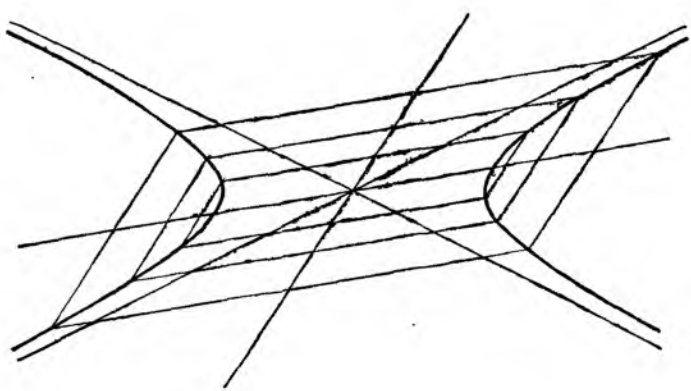


Рис. 175.

Переходим к параболическому случаю. Если данная кривая $F(x, y) = 0$ распадается на пару параллельных прямых, то у нее — один единственный диаметр («средняя» прямая по отношению к двум данным); этот диаметр является геометрическим местом середин хорд любого направления, он является прямой центров нашей кривой (1), его направление — особое, оно сопряжено любому направлению (рис. 176).

У параболы середины всех хорд данного направления $\{\alpha:\beta\}$ лежат, как мы видели, на вполне определенной прямой, и прямая эта

имеет асимптотическое направление $\beta' : \alpha' = -a_{11} : a_{12} = -a_{12} : a_{22}$, она является диаметром параболы (сопряженным данному направлению $\{\alpha : \beta\}$).

Докажем, что *в случае параболы всякая прямая асимптотического направления есть диаметр, сопряженный некоторому вполне определенному направлению.*

При доказательстве мы вправе выбрать любую систему координат; возьмем такую, в которой уравнение параболы имеет вид

$$y^2 - 2px = 0. \tag{4}$$

Прямые асимптотического направления суть просто прямые, параллельные оси абсцисс. Пусть

$$y = m \tag{5}$$

— такая произвольная прямая (рис. 177).

Уравнение (2′) § 7, т. е. уравнение диаметра, сопряженного направлению $\beta : \alpha$, имеет в нашем случае вид

$$\beta y - p\alpha = 0. \tag{6}$$

Для того чтобы оно определяло ту же прямую, что и уравнение (5), необходимо

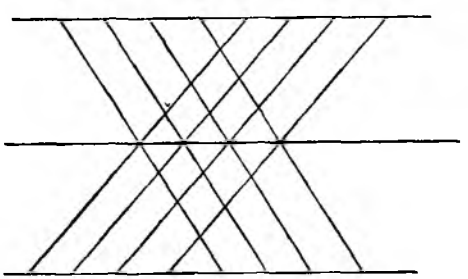


Рис. 176.

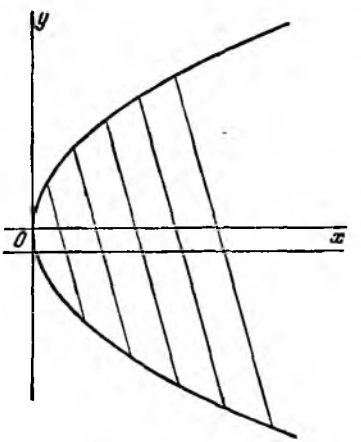


Рис. 177.

и достаточно, чтобы было $\frac{p\alpha}{\beta} = m$, чем отношение $\beta : \alpha = p : m$ определено однозначно, и наше утверждение доказано.

Таким образом, *диаметры параболы могут быть определены как прямые асимптотического направления.*

Предположим, что выбрана прямоугольная система координат, каноническая для данной параболы. Для $\beta = 1$, $\alpha = 0$, т. е. для направления, перпендикулярного к оси параболы, уравнение (6) дает $y = 0$, т. е. ось параболы, которая является, таким образом, диаметром, сопряженным направлению, перпендикулярному к направлению оси.

Если мы теперь будем вектор $\{\alpha, \beta\}$ вращать (начиная с положения $\alpha=0$, $\beta=1$) по часовой стрелке (от оси ординат к оси абсцисс), то сопряженный ему диаметр, все время оставаясь горизонтальным, будет подниматься вверх, уходя в бесконечность; когда направление вектора станет горизонтальным (т. е. асимптотическим), сопряженный диаметр перестанет быть определенным, а при дальнейшем вращении вектора $\{\alpha, \beta\}$ (по часовой стрелке) $k=\frac{\beta}{\alpha}$ станет отрицательным (сначала очень малым по абсолютной величине), и наш диаметр (оставаясь горизонтальным) будет из бесконечных далей нижней полуплоскости подниматься вновь к оси абсцисс и совпадет с нею, когда вектор $\{\alpha, \beta\}$ примет направление оси ординат (рис. 178).

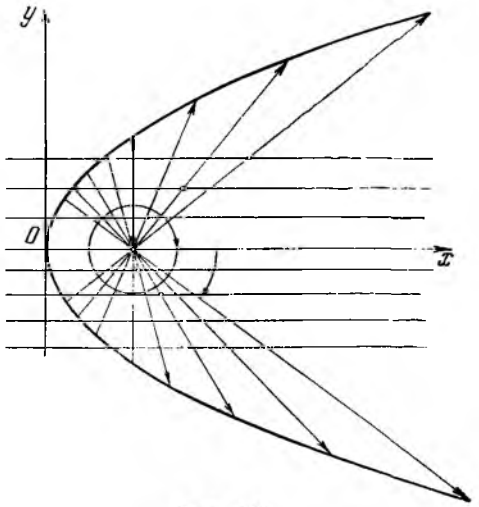


Рис. 178.

Рассмотрим теперь случай эллипса и гиперболы, заданных их каноническими уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Соотношение сопряженности двух векторов $\{\alpha, \beta\}$ и $\{\alpha', \beta'\}$ запишем в виде

$$\frac{1}{a^2}\alpha\cdot\alpha' \pm \frac{1}{b^2}\beta\cdot\beta' = 0,$$

т. е.

$$\frac{\beta\cdot\beta'}{\alpha\cdot\alpha'} = \mp\frac{b^2}{a^2},$$

или, полагая $k=\frac{\beta}{\alpha}$, $k'=\frac{\beta'}{\alpha'}$,

$$k\cdot k' = \mp\frac{b^2}{a^2}$$

(верхний знак — для эллипса, нижний — для гиперболы.)

Отсюда следует: угловые коэффициенты двух взаимно сопряженных диаметров имеют в случае эллипса противоположные, а в случае гиперболы — одинаковые знаки. А это означает, что два сопряженных диаметра лежат в случае эллипса в разных парах вертикальных координатных углов, а в случае гиперболы — в одинаковых.

Возьмем за начальное значение вектора $\{\alpha, \beta\}$ единичный вектор $\{1, 0\}$ оси абсцисс. Диаметр этого направления есть фокальная ось эллипса, а сопряженный ему диаметр — вторая ось. Будем вращать вектор $\{\alpha, \beta\}$ (приложенный к центру эллипса, т. е. к началу координат) против часовой стрелки; направленный по этому вектору диаметр эллипса будет вращаться (находясь в первой и третьей четверти) от фокальной оси ко второй оси против часовой стрелки, а сопряженный ему диаметр—от второй оси к фокальной, тоже против часовой стрелки (рис. 179) — *при вращении данного диаметра сопряженный ему будет от него убегать, вращаясь в том же направлении.*

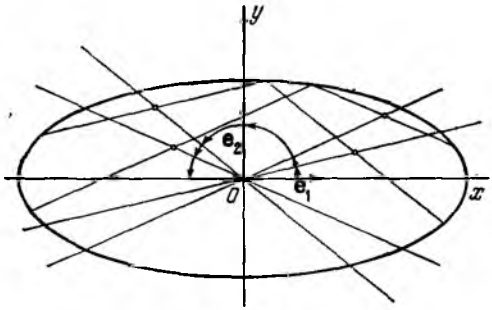


Рис. 179.

В случае гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ диаметр, сопряженный оси абсцисс (фокальной оси гиперболы), есть снова ось ординат, вторая ось гиперболы, но если будем вращать прямую $y = kx$, начиная с положения $k = 0$, против часовой стрелки, то сопряженный диаметр $y = k'x$ — так как он должен лежать в тех же координатных углах, что и данный диаметр $y = kx$, — должен вращаться в противоположном направлении — *при вращении данного диаметра вокруг центра гиперболы сопряженный диаметр бежит ему навстречу.* При этом, когда $k \longrightarrow \frac{b}{a}$ (т. е. когда прямая $y = kx$, вращаясь против часовой стрелки, приближается к асимптоте), то k' тоже $\longrightarrow \frac{b}{a}$ — оба со-

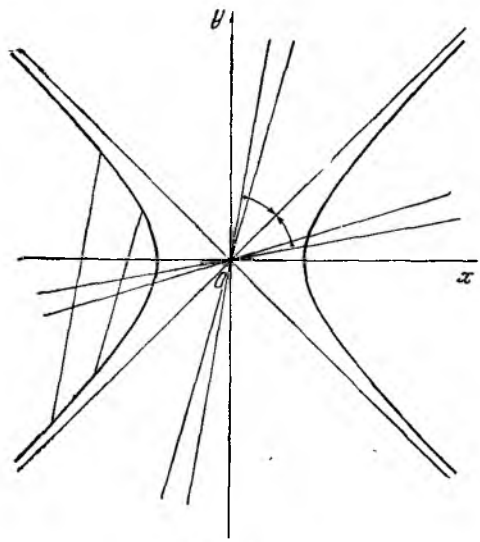


Рис. 180.

пряженных диаметра неограниченно приближаются к асимптоте (каждый со своей стороны) (рис. 180).

2. Диаметры и касательные. Теорема 8. *Диаметр, проходящий через какую-нибудь заданную точку нераспадающейся кривой второго порядка, сопряжен направлению касательной к этой кривой в данной ее точке.*

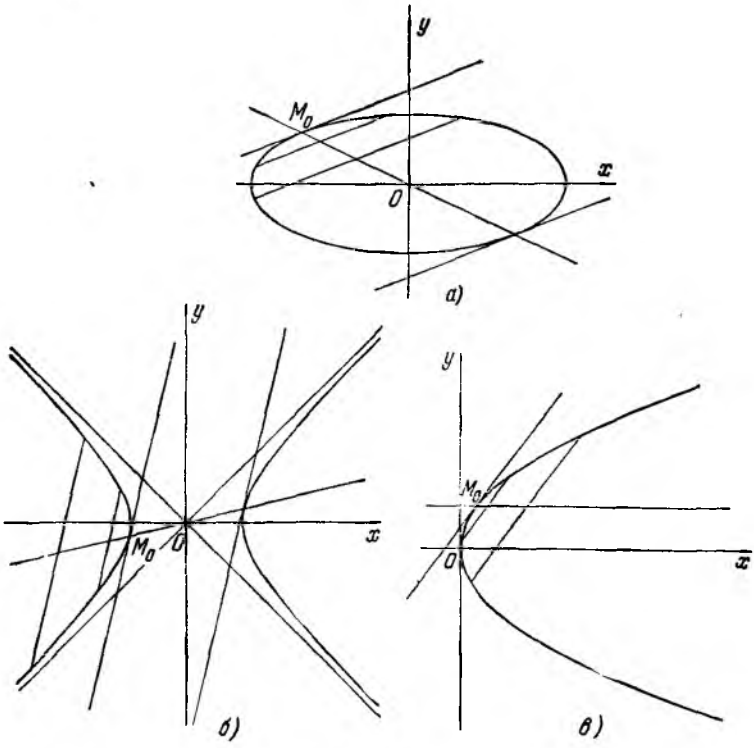


Рис. 181.

Доказательство. На кривой $F(x, y)=0$ берем точку $M_0=(x_0, y_0)$. Существует единственный диаметр, проходящий через эту точку; если кривая центральная (рис. 181, *а* и *б*), то этим диаметром является прямая, соединяющая точку M_0 с центром; если кривая — парабола (рис. 181, *в*), то ее диаметром, проходящим через точку M_0, будет прямая (единственного) асимптотического направления, проходящая через эту точку.

Диаметр, сопряженный какому-нибудь направлению $\alpha:\beta$, имеет уравнение $F_1(x, y)\alpha+F_2(x, y)\beta=0$. Если диаметр проходит через

точку $M_0=(x_0,\ y_0)$, то имеет место тождество

$$F_1(x_0,\ y_0)\,\alpha+F_2(x_0,\ y_0)\,\beta=0,$$

т. е.

$$\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{F_1(x_0,\ y_0)}{F_2(x_0,\ y_0)};$$

но это направление есть как раз направление касательной к кривой $F(x,\ y)=0$ в точке $M_0=(x_0,\ y_0)$, что и требовалось доказать.

Прилагаемый рис. 181 иллюстрирует теорему, когда кривая $F(x,\ y)=0$ является соответственно эллипсом, гиперболой или параболой.

§ 9. Вид уравнения кривой, если оси координат имеют сопряженные направления

Пусть дана кривая второго порядка своим общим уравнением

$$F(x,\ y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0. \qquad (1)$$

Посмотрим сначала, каковы диаметры, сопряженные направлениям осей координат. Уравнение диаметра, сопряженного направлению $\{\alpha:\beta\}$, есть

$$(a_{11}\alpha+a_{12}\beta)\,x+(a_{21}\alpha+a_{22}\beta)\,y+(a_1\alpha+a_2\beta)=0. \qquad (2)$$

Если $\alpha=1$, $\beta=0$ (т. е. вектор $\{\alpha,\ \beta\}$ есть направляющий вектор оси абсцисс), то уравнение (2) превращается в

$$a_{11}x+a_{12}y+a_1=0. \qquad (2')$$

Если же $\alpha=0$, $\beta=1$, то уравнение сопряженного диаметра есть

$$a_{21}x+a_{22}y+a_2=0. \qquad (2'')$$

Итак, диаметр, сопряженный направлению оси абсцисс, имеет уравнение (2'), а диаметр, сопряженный направлению оси ординат, имеет уравнение (2'').

Предположим теперь, что ось ординат имеет произвольное, неасимптотическое для данной кривой направление, а ось абсцисс является диаметром, сопряженным направлению оси ординат. Тогда уравнение (2'') есть уравнение оси абсцисс, т. е. выражает ту же прямую, что и уравнение

$$y=0.$$

Следовательно, коэффициенты

$$a_{21},\quad a_{22},\quad a_2$$

уравнения (2″) должны быть пропорциональны коэффициентам

$$0, \quad 1, \quad 0$$

уравнения оси Ox, а это значит, что

$$a_{21} = 0, \quad a_{22} \neq 0, \quad a_2 = 0.$$

Следовательно, в нашей системе координат кривая (1) имеет уравнение

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + a_0 = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим отдельно два случая:

1° Кривая (1) — центральная.

2° Кривая (1) — параболическая (парабола или пара параллельных прямых).

В первом случае из того, что ось абсцисс представляет собою диаметр, сопряженный направлению оси ординат, следует, что и ось ординат имеет направление, сопряженное оси абсцисс. Если при этом начало координат лежит в центре кривой, то обе оси координат являются сопряженными между собою диаметрами.

Но тогда ось ординат, будучи диаметром, сопряженным оси абсцисс, имеет уравнение (2′), которое должно быть равносильно уравнению

$$x = 0.$$

Значит, коэффициенты

$$a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_1$$

уравнения (2′) должны быть пропорциональны коэффициентам

$$1, \quad 0, \quad 0$$

уравнения оси Oy, т. е.

$$a_{11} \neq 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_1 = 0;$$

следовательно, уравнение (3) имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_0 = 0. \tag{4}$$

Итак, *если оси координат образуют пару сопряженных диаметров данной (произвольной) центральной кривой второго порядка, то уравнение этой кривой в этой системе координат имеет вид* (4) (рис. 182).

Случай распадающейся центральной кривой характеризуется тем, что в уравнении (4) имеем $a_0 = 0$ (центр, т. е. начало координат, есть точка кривой) (рис. 183).

Пусть теперь кривая (1) (уравнение которой уже приведено к виду (3)) есть кривая параболическая. Тогда $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$; но в уравнении (3) коэффициент $a_{12} = 0$, значит, $a_{11}a_{22} = 0$, а так как $a_{22} \neq 0$, то $a_{11} = 0$.

Итак, *если в случае параболической кривой ось ординат направлена по произвольному, неасимптотическому направлению, а ось абсцисс есть диаметр, сопряженный этому направлению (и, следовательно, имеющий асимптотическое направление), то уравнение кривой в этой системе координат имеет вид*

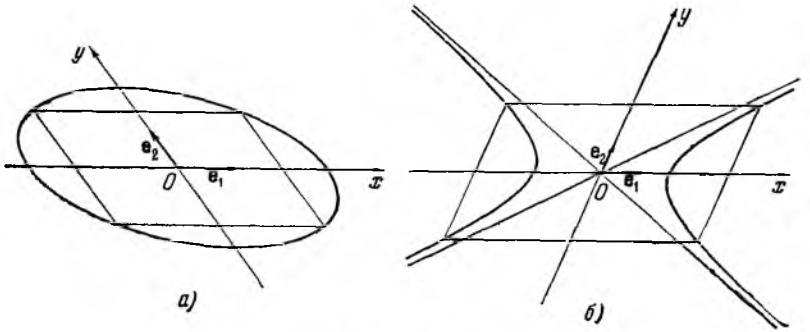


Рис. 182.

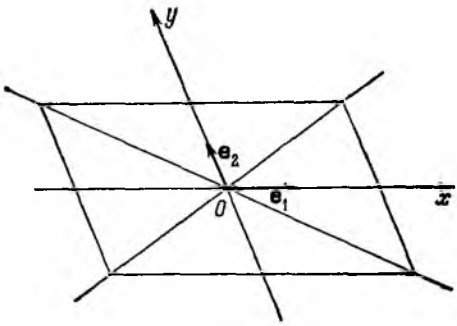


Рис. 183.

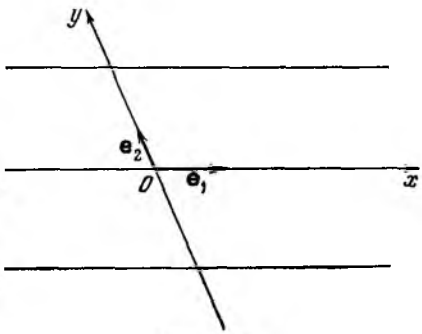


Рис. 184.

$$a_{22}y^2 + 2a_1x + a_0 = 0. \tag{5}$$

Если наша кривая распадается на пару параллельных прямых (рис. 184), то $\Delta = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_1 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = -a_1^2 a_{22} = 0.$$

Так как $a_{22} \neq 0$, то непременно $a_1 = 0$, и уравнение (5) необходимо

имеет вид

$$a_{22}y^2 + a_0 = 0, \qquad y = \pm\sqrt{-\frac{a_0}{a_{22}}}. \tag{6}$$

Если же наша кривая есть нераспадающаяся параболическая кривая, то непременно $a_1 \neq 0$.

Сделаем теперь перенос начала в точку пересечения O' кривой с осью x, т. е. преобразование координат

$$x = x' + x_0, \quad y = y',$$

где x_0 определено требованием, чтобы точка $O' = (x_0, 0)$ удовлетворяла уравнению (5), т. е. чтобы было

$$a_{22} \cdot 0 + 2a_1x_0 + a_0 = 0.$$

В преобразованной системе координат уравнение (5) приобретает вид

$$a_{22}y'^2 + 2a_1x' + (2a_1x_0 + a_0) = 0,$$

т. е. вид

$$a_{22}y'^2 + 2a_1x' = 0. \tag{7}$$

Найдем точки пересечения оси ординат $O'y'$ с параболой. Для этого положим в уравнении (7) $x' = 0$; получим $a_{22}y'^2 = 0$, т. е. ось ординат $O'y'$ пересекается с параболой в двух сливающихся точках

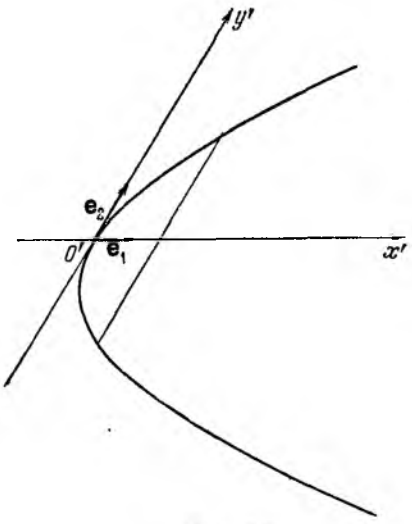


Рис. 185.

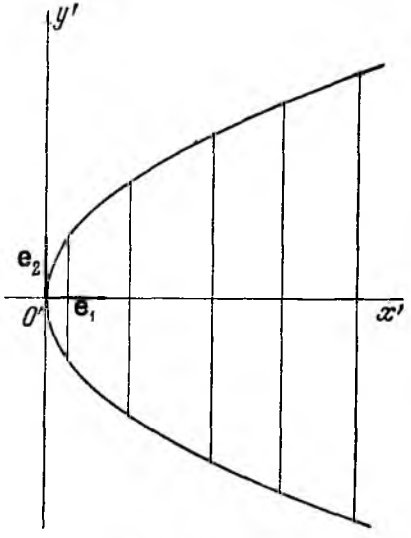


Рис. 186.

(совпадающих с точкой O') и, следовательно, является касательной к параболе (рис. 185). Если при этом ось абсцисс перпендикулярна оси ординат, то, деля пополам перпендикулярные ей хорды, она окажется осью параболы (рис. 186).

§ 10. Второе доказательство теоремы единственности. О полноте системы ортогональных инвариантов

1. Второе доказательство теоремы единственности. Речь идет о теореме 5, сформулированной и доказанной в § 2. Преимущество предлагаемого второго доказательства заключается в том, что оно легко может быть перенесено на случай поверхностей $F(x, y, z) = 0$ (и даже на случай $(n-1)$-мерных поверхностей второго порядка в n-мерном пространстве).

Обозначим через C множество точек, лежащих на кривой

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \qquad (1)$$

т. е. множество всех точек $M = (x, y)$ комплексной плоскости, удовлетворяющих уравнению (1). Предположим, что множество C совпадает с множеством всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$\tilde{F}(x, y) = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + b_0 = 0. \qquad (\tilde{1})$$

Вспомним, что неасимптотические направления $\{\alpha : \beta\}$ по отношению к кривой (1) характеризуются тем, что имеется прямая данного направления $\{\alpha : \beta\}$, имеющая с множеством C ровно две (различные) общие точки, поэтому всякое направление, неасимптотическое для одной из двух кривых (1) и $(\tilde{1})$, будет неасимптотическим и для другой кривой.

Выбираем некоторое определенное неасимптотическое направление $\{\alpha : \beta\}$ для кривых (1) и $(\tilde{1})$.

Одну из прямых d направления $\{\alpha : \beta\}$ примем за ось ординат, а диаметр, сопряженный направлению $\{\alpha : \beta\}$, — за ось абсцисс координатной системы $O'x'y'$. Из результатов предыдущего параграфа следует, что уравнения (1), $(\tilde{1})$ получат в системе координат $O'x'y'$ вид

$$F'(x', y') \equiv a'_{22}y'^2 + a'_{11}x'^2 + 2a'_1x' + a'_0 = 0, \qquad (2)$$

$$\tilde{F}'(x', y') \equiv b'_{22}y'^2 + b'_{11}x'^2 + 2b'_1x' + b'_0 = 0. \qquad (\tilde{2})$$

Здесь $a'_{22} \neq 0$ (и $b'_{22} \neq 0$), в противном случае единичный вектор $\{0, 1\}$ оси y', удовлетворяющий уравнению

$$\varphi'(x', y') \equiv a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 = 0,$$

имел бы, вопреки предположению, асимптотическое направление.

Пересечение множества C с осью $y' = 0$ обозначим через C^0.

Возможны следующие случаи:

1° Множество C^0 пусто (рис. 187). Этот случай осуществляется тогда и только тогда, когда какое-нибудь (и тогда каждое) из

равенств

$$f(x') \equiv a'_{11}x'^2 + 2a'_1x' + a'_0 = 0,$$
$$\tilde{f}(x') \equiv b'_{11}x'^2 + 2b'_1x' + b'_0 = 0$$

противоречиво, т. е. когда один какой-нибудь (и тогда каждый) из

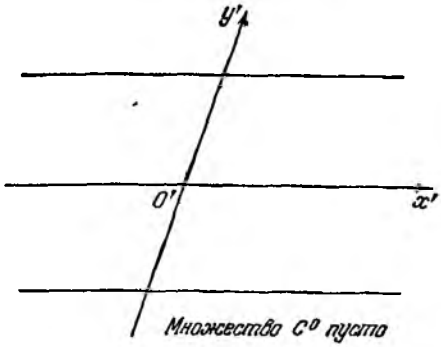


Рис. 187.

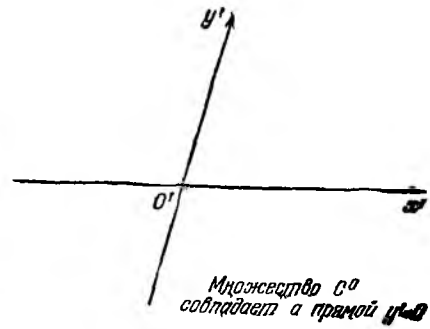


Рис. 188.

многочленов $f(x')$, $\tilde{f}(x')$ тождественно равен отличной от нуля постоянной a'_0, соответственно b'_0.

2° Множество C^0 совпадает со всей прямой $y' = 0$ (рис. 188). Это происходит тогда и только тогда, когда каждый из многочленов $f(x')$, $\tilde{f}(x')$ тождественно равен нулю.

3° Ни один из случаев 1°, 2° не имеет места. Тогда множество C^0 состоит или из одной точки (рис. 189), или из пары (быть может, совпадающих между собою) точек (рис. 190), являющихся парой корней как уравнения

$$a'_{11}x'^2 + 2a_1x' + a'_0 = 0, \qquad (3)$$

так и уравнения

$$b'_{11}x'^2 + 2b'_1x' + b'_0 = 0. \qquad (\tilde{3})$$

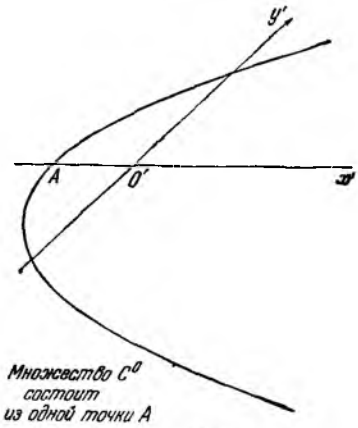


Рис. 189.

Рассмотрим ближе этот случай. Так как уравнения (3) и $(\tilde{3})$ имеют одни и те же корни, то при некотором $\mu \neq 0$ имеем

$$b'_{11}x'^2 + 2b'_1x' + b'_0 \equiv \mu\,(a'_{11}x'^2 + 2a'_1x' + a'_0)$$

и, значит, полагая $\lambda = \frac{b'_{22}}{a'_{22}}$, имеем

$$F'(x', y') \equiv a'_{22}y'^2 + (a'_{11}x'^2 + 2a'_1x' + a'_0),$$
$$\bar{F}'(x', y') \equiv \lambda a'_{22}y'^2 + \mu(a'_{11}x'^2 + 2a'_1x' + a'_0).$$

Докажем, что $\lambda = \mu$. Для этого дадим переменному x' значение

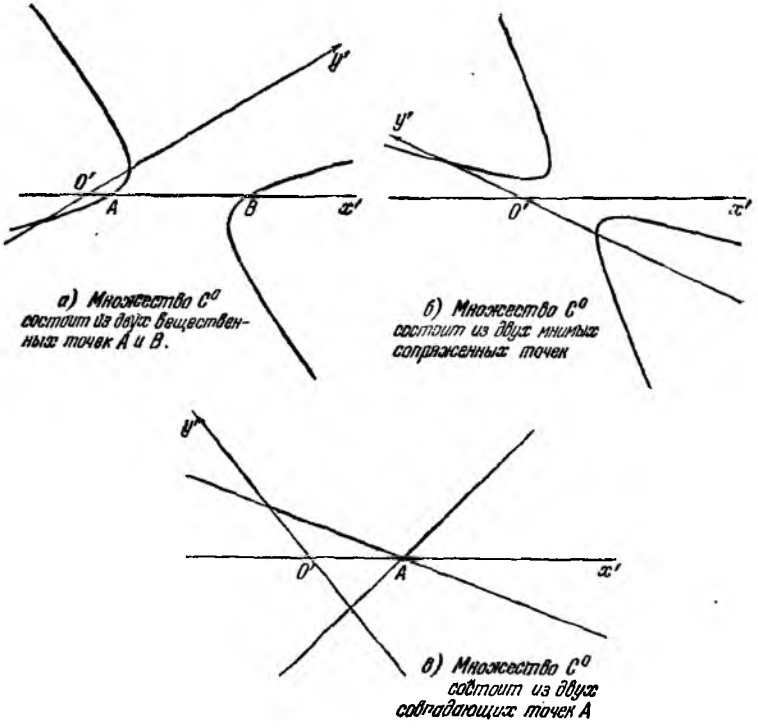


Рис. 190.

$x' = x'_1$, являющееся корнем уравнения

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_1x' + a'_0 = 1,$$

и найдем значения y', удовлетворяющие уравнению

$$F'(x'_1, y') \equiv a'_{22}y'^2 + 1 = 0,$$

т. е.

$$y'_1 = \pm\sqrt{-\frac{1}{a'_{22}}}.$$

Значит, точка (x'_1, y'_1) принадлежит множеству C; следовательно,

$$\tilde{F}'(x'_1, y'_1) = \lambda a'_{22} y_1'^2 + \mu \cdot 1 = \lambda a'_{22}\left(-\frac{1}{a'_{22}}\right) + \mu = 0,$$

т. е. $\lambda = \mu$, и $\tilde{F}'(x', y') = \lambda F'(x', y')$, значит, и

$$\tilde{F}(x, y) = \lambda F(x, y).$$

Итак, в случае 3° теорема доказана.

В случае 2° имеем

$$F'(x', y') \equiv a'_{22} y'^2, \qquad a'_{22} \neq 0, \qquad \tilde{F}'(x', y') \equiv b'_{22} y'^2, \qquad b'_{22} \neq 0.$$

Полагая $\lambda = \frac{b'_{22}}{a'_{22}}$, получим $\tilde{F}'(x', y') \equiv \lambda F'(x', y')$ — утверждение теоремы верно и в этом случае.

Наконец, в случае 1° уравнения (2) и $(\tilde{2})$ принимают вид

$$F'(x', y') \equiv a'_{22} y'^2 + a'_0 = 0, \qquad a'_0 \neq 0,$$
$$\tilde{F}'(x', y') \equiv b'_{22} y'^2 + b'_0 = 0, \qquad b'_0 \neq 0$$

— множество C есть пара прямых, определенная каждым из уравнений

$$y' = \pm \sqrt{-\frac{a'_0}{a'_{22}}} \quad \text{или} \quad y' = \pm \sqrt{\frac{-b'_0}{b'_{22}}}.$$

Для того чтобы эти уравнения были эквивалентны, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы было $\frac{a'_0}{a'_{22}} = \frac{b'_0}{b'_{22}}$, т. е. $b'_{22} = \lambda a'_{22}$, $b'_0 = \lambda a'_0$ при $\lambda = \frac{b'_{22}}{a'_{22}}$.

Теорема 5 доказана во всех случаях.

2. О полноте системы ортогональных инвариантов. Теорема единственности позволяет существенно дополнить высказанные нами в § 6 главы XVI соображения о возможности характеризовать метрическую эквивалентность (т. е. эквивалентность по отношению к группе движений) двух кривых второго порядка, не распадающихся на пару параллельных прямых.

Будем рассматривать на плоскости лишь прямоугольные системы координат с одним и тем же масштабом. Имеет место следующая основная

Теорема 9. *Пусть на плоскости даны две нераспадающиеся на пары параллельных прямых кривые второго порядка C и C',*

имеющие в некоторой прямоугольной системе координат Oxy соответственно уравнения

$$F(x, y) = 0 \tag{4}$$

и

$$F'(x, y) = 0. \tag{4'}$$

Для того чтобы кривые C и C' были метрически эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы после домножения одного из двух многочленов $F(x, y)$, $F'(x, y)$ на некоторый числовой множитель k оба эти многочлена имели соответственно одни и те же инварианты δ, Δ, S.

Доказательство. Необходимость. Если кривые C и C' метрически эквивалентны, то посредством некоторого движения, т. е. ортогонального преобразования плоскости, кривая C' может быть преобразована в кривую C. При этом преобразовании инварианты δ, Δ, S многочлена $F'(x, y)$ (будучи ортогональными инвариантами) не изменятся, а сам многочлен $F'(x, y)$ перейдет в многочлен $G(x, y)$, имеющий то же нулевое многообразие, что и многочлен $F(x, y)$, так что, в силу теоремы единственности, $G(x, y) = kF(x, y)$, при некотором $k \neq 0$.

Итак, инварианты многочлена $F'(x, y)$ совпадают с соответствующими инвариантами многочлена $kF(x, y)$ — первая часть теоремы 9 доказана.

Переходим к доказательству второй части.

Достаточность. Если многочлены $F'(x, y)$ и $kF(x, y)$ имеют одни и те же инварианты δ, Δ, S, то из сказанного в § 6 главы XVI следует, что кривые $F'(x, y) = 0$ и $kF(x, y)$ метрически эквивалентны. Но кривая $kF(x, y) = 0$, очевидно, совпадает с кривой $F(x, y) = 0$, чем эквивалентность кривых $F'(x, y) = 0$ и $F(x, y) = 0$ доказана.

Полученный результат иногда формулируют так:

Ортогональные инварианты δ, Δ, S *образуют полную систему ортогональных инвариантов кривых второго порядка, не распадающихся на пару параллельных прямых.*

§ 11. Оси симметрии и главные направления кривой второго порядка

Пусть прямая d есть ось симметрии данной кривой второго порядка C. Возможны два случая:

А. Направление, перпендикулярное к прямой d, является для кривой C асимптотическим.

Б. Направление, перпендикулярное к прямой d, не есть асимптотическое направление для кривой C.

Пусть имеет место случай А. Возьмем какую-либо пару точек A_1, A_2 кривой C, симметричных друг другу относительно прямой d. Так как прямая $d' = A_1A_2$ имеет асимптотическое направление и в то же время содержит две точки A_1 и A_2 кривой C, то она вся входит в состав этой кривой: кривая C распадается на пару прямых d', d'', одна из которых d' перпендикулярна к прямой d. Вторая прямая d'' не может быть наклонной к прямой d, так как в этом случае прямая d, очевидно, не может быть осью симметрии фигуры, составленной из двух прямых d', d'', из которых одна перпендикулярна, а

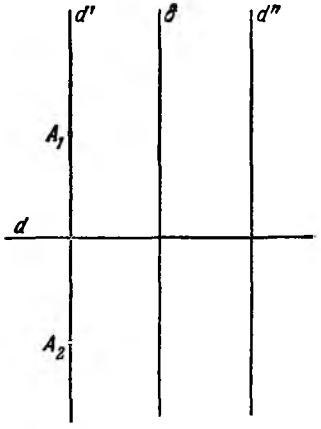


Рис. 191.

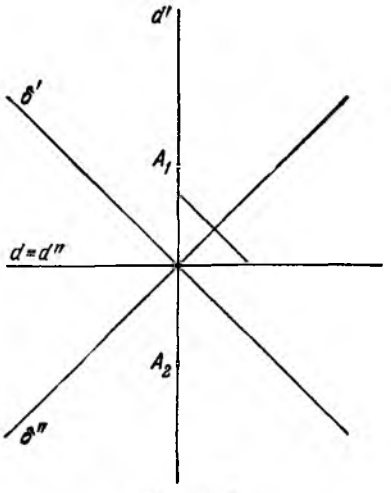


Рис. 192.

другая наклонна к прямой d. Поэтому прямая d'' или тоже перпендикулярна к прямой d, или совпадает с нею. В первом случае линия C состоит из двух параллельных прямых (рис. 191), и тогда всякая прямая, этим прямым перпендикулярная, является осью симметрии линии C; кроме того, осью симметрии линии C является и единственный ее диаметр δ — средняя прямая между прямыми d' и d''.

Во втором случае линия C есть пара взаимно перпендикулярных прямых d' и $d'' = d$ (рис. 192); каждая из этих прямых есть ось симметрии линии C. Кроме того, осями симметрии являются две биссектрисы δ' и δ'' двух пар вертикальных прямых углов, образованных прямыми d и d'. Эти биссектрисы являются (взаимно перпендикулярными) сопряженными диаметрами: каждый из них делит пополам хорды, ему перпендикулярные (и параллельные второй биссектрисе).

Итак, *в случае* А *кривая распадается на пару параллельных или на пару перпендикулярных между собою прямых и имеет в первом*

случае бесконечно много осей симметрии, а во втором — четыре оси симметрии.

Переходим к случаю Б: направление, перпендикулярное к оси симметрии d, не является асимптотическим для кривой C. Пусть d' — какая-нибудь прямая, перпендикулярная к прямой d. Кривая C пересекает прямую d' в двух точках A_1 и A_2 (быть может, мнимых, быть может, совпадающих), симметричных относительно прямой d, так что прямая d делит пополам хорду $\overline{A_1A_2}$ (рис. 193). Другими словами, прямая d является диаметром кривой C, сопряженным направлению, перпендикулярному к прямой d.

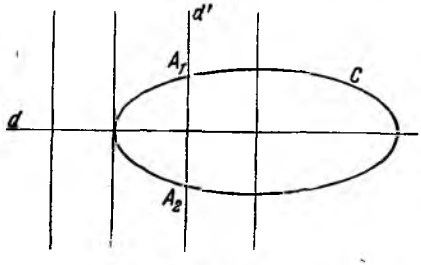


Рис. 193.

Определение 2. *Направление называется главным относительно данной кривой второго порядка C, если это направление и перпендикулярное к нему являются взаимно сопряженными направлениями относительно этой кривой. Главное направление относительно кривой C называется также главным направлением квадратичной функции, определенной квадратичной формой $\varphi(x, y)$ старших членов уравнения кривой C в любой прямоугольной системе координат, а также главным направлением любой такой квадратичной формы. Диаметр кривой C, сопряженный перпендикулярному ему направлению, называется главным диаметром кривой C. Направление главного диаметра, очевидно, является главным направлением*[1]).

Из определения главного направления непосредственно вытекают такие следствия:

1° *Направление, перпендикулярное к главному, тоже является главным.*

2° *Особое направление кривой C является главным для этой кривой.*

В самом деле, особое направление сопряжено всякому направлению, в том числе и перпендикулярному к нему. Итак, асимптотическое направление параболы является главным для нее направлением. У параболы все диаметры имеют главное направление, но, как мы видели в § 8, среди этих диаметров только один сопряжен перпендикулярному к нему направлению, и, следовательно, только один является главным диаметром — это ось параболы.

Ось параболы — единственная ее ось симметрии.

---

[1]) Мы сейчас увидим, что обратное утверждение может быть и неверным (а именно, оно неверно для параболы и пары параллельных прямых).

Из утверждения 1° следует, что направление, перпендикулярное к асимптотическому направлению параболы, также является главным направлением. Никакое направление $\{\alpha:\beta\}$, кроме асимптотического и перпендикулярного к нему направления, не является главным направлением параболы (так как единственное направление, сопряженное направлению $\{\alpha:\beta\}$, есть асимптотическое направление и оно не перпендикулярно направлению $\{\alpha:\beta\}$). Итак, *у параболы имеются ровно два главных направления: асимптотическое и перпендикулярное к нему.*

По тем же соображениям и линия, распавшаяся на пару параллельных прямых d и d', имеет два главных направления: общее направление прямых d и d' и перпендикулярное к этим прямым направление.

Переходим к центральным кривым. Если направление $\{\alpha:\beta\}$ главное для центральной кривой C, то (перпендикулярное к нему) сопряженное ему направление $\{\alpha':\beta'\}$ тоже главное. Ни одно из главных направлений центральной кривой не может быть асимптотическим (потому что в случае центральной кривой каждое направление сопряжено одному-единственному направлению, а асимптотическое направление сопряжено лишь самому себе). Поэтому диаметр центральной кривой, имеющий главное направление, является главным диаметром, а значит, является осью симметрии кривой. Из сказанного вытекает, что *всякая кривая второго порядка имеет по крайней мере одну пару взаимно перпендикулярных главных направлений.*

Из предыдущих рассуждений следует

Теорема 10. *За исключением случая, когда данная кривая второго порядка C есть пара параллельных или пара перпендикулярных между собою прямых, всякая ось симметрии кривой C есть главный диаметр этой кривой.*

Обратно, *главный диаметр кривой C, очевидно, есть ось симметрии кривой C.*

Переходим к нахождению главных направлений. Система координат до конца параграфа прямоугольная.

Мы ищем такое направление, чтобы вектор $\{\alpha, \beta\}$ этого направления был перпендикулярен к сопряженному ему вектору $\{\alpha', \beta'\}$. По формуле (2″) § 8 имеем

$$-\beta':\alpha' = (a_{11}\alpha + a_{12}\beta):(a_{21}\alpha + a_{22}\beta).$$

Условие перпендикулярности векторов $\{\alpha, \beta\}$ и $\{\alpha', \beta'\}$ есть $\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0$, т. е. $-\beta':\alpha' = \alpha:\beta$, т. е.

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta):(a_{21}\alpha + a_{22}\beta) = \alpha:\beta.$$

Это условие означает существование такого λ, что

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\alpha + a_{12}\beta &= \lambda\alpha, \\ a_{21}\alpha + a_{22}\beta &= \lambda\beta \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

или

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)\,\alpha+a_{12}\beta=0,\\ a_{21}\alpha+(a_{22}-\lambda)\,\beta=0.\end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Рассмотрим сначала центральный случай: $\delta\neq 0$. Требуется найти ненулевой вектор-решение $\{\alpha, \beta\}$ однородной системы (1′); это возможно, лишь когда детерминант системы равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

Взяв в качестве λ какой-либо корень уравнения (2) и подставив его в (1′), заключаем — именно в виду равенства нулю детерминанта (2), — что оба уравнения (1) эквивалентны между собою и дают одно и то же направление

$$\beta:\alpha=(\lambda-a_{11}):a_{12}=a_{21}:(\lambda-a_{22}). \tag{3}$$

Здесь, как только что сказано, λ — какой-нибудь корень уравнения (2). Но этих корней — два, так как уравнение (2) — квадратное уравнение, которое в развернутом виде есть

$$\lambda^2-S\lambda+\delta=0 \tag{2'}$$

(здесь, как всегда, $S=a_{11}+a_{22}$, $\delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$). Обозначая корни уравнения (2) через λ_1 и λ_2, получаем из (3) два главных направления:

$$\beta_1:\alpha_1=(\lambda_1-a_{11}):a_{12}=a_{21}:(\lambda_1-a_{22}) \tag{3_1}$$

и

$$\beta_2:\alpha_2=(\lambda_2-a_{11}):a_{12}=a_{21}:(\lambda_2-a_{22}); \tag{3_2}$$

мы получили давно известные нам формулы. Эти направления действительны, так как действительны корни

$$\lambda_{1,2}=\frac{S\pm\sqrt{S^2-4\delta}}{2}=\frac{S\pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}}{2}$$

уравнения (2). Эти корни совпадают в единственном случае, когда $a_{11}=a_{22}$ и $a_{12}=0$, т. е. когда рассматриваемая кривая есть окружность.

Заметим, что в центральном случае $\delta\neq 0$ ни один из корней λ_1, λ_2 уравнения (2) не равен нулю, так как, подставив $\lambda=0$ в (2), получили бы $\delta=0$.

Имеются ли случаи, когда два эквивалентных уравнения (1′) (т. е. (3)) не позволяют определить главное направление? В силу (3) это может случиться, только когда одновременно $a_{12}=0$, $\lambda=a_{11}$, $\lambda=a_{22}$, т. е. снова лишь в случае окружности ($a_{12}=0$, $a_{11}=a_{22}$). Для окружности всякий диаметр есть ось симметрии, всякое направ-

ление главное. Если же наша кривая не есть окружность, то формулы (3) позволяют совершенно однозначно определить два главных направления. Они заведомо различны, так как в центральном случае, который мы рассматриваем, являются направлениями двух взаимно перпендикулярных сопряженных диаметров [1]). Итак, доказана

Теорема 11. *За единственным исключением окружности (когда всякое направление — главное), мы имеем для каждой центральной кривой второго порядка два и только два главных направления (и, значит, не более двух осей симметрии с неасимптотическими направлениями)* [2]).

Два главных направления центральной кривой перпендикулярны между собою.

Мы уже установили непосредственно, что парабола и пара параллельных прямых имеют два взаимно перпендикулярных главных направления, одно из которых — асимптотическое. Легко убедиться в этом и посредством простого вычисления. В самом деле, пусть $\delta = 0$. Тогда уравнение (2) удовлетворяется при $\lambda = \lambda_1 = 0$. Второй корень уравнения (2) не может равняться нулю, так как тогда было бы $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$, $S = \lambda_1 + \lambda_2$, т. е. $S = 2a_{11} = 2a_{22} = 0$ — многочлен $F(x, y)$ был бы многочленом не выше первой степени. Подстановка $\lambda = 0$ в уравнения (1′) дает

$$a_{11}\alpha + a_{12}\beta = 0,$$
$$a_{21}\alpha + a_{22}\beta = 0,$$

что сразу приводит к асимптотическому главному направлению $\beta : \alpha = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$ параболической кривой. Второй корень $\lambda_2 = S$ дает главное направление $\beta' : \alpha' = (S - a_{11}) : a_{12} = a_{22} : a_{12} = a_{12} : a_{11}$, перпендикулярное к асимптотическому направлению $\beta : \alpha$ (полагая $\alpha = -a_{11}$, $\beta = a_{12}$, $\alpha' = a_{12}$, $\beta' = a_{11}$, имеем $\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0$).

Теперь мы легко можем найти по общему уравнению параболы и уравнение ее оси. Ось параболы имеет угловой коэффициент $k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$ и является в то же время диаметром, сопряженным к хордам перпендикулярного направления, т. е. хордам с угловым

---

[1]) Легко и непосредственно убедиться, что неравным $\lambda_1 \neq \lambda_2$ соответствуют различные главные направления $\beta_1 : \alpha_1$, $\beta_2 : \alpha_2$; при $a_{12} \neq 0$ это непосредственно следует из (3). Пусть $a_{12} = 0$, но $a_{11} \neq a_{22}$. Значит, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда не может быть одновременно $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_1 = a_{22}$. Пусть, например, $\lambda_1 \neq a_{22}$. Тогда $\beta_1 : \alpha_1 = 0$ из (3_1). Но тогда непременно $\lambda_1 = a_{11}$ из (3_1). Если бы было $\beta_2 : \alpha_2 = \beta_1 : \alpha_1$, т. е. $\beta_2 : \alpha_2 = 0$, то было бы $\lambda_2 = a_{11}$ из (3_2), т. е. $\lambda_1 = \lambda_2$.

[2]) Мы уже видели, что две оси симметрии асимптотического направления имеются у центральной кривой, распавшейся на пару перпендикулярных прямых (у нее имеются еще и две оси симметрии неасимптотического направления, и эти направления являются главными).

коэффициентом $\frac{a_{12}}{a_{11}}=\frac{a_{22}}{a_{12}}$ (или с направляющим вектором $\{\alpha, \beta\}$, где можно взять $\alpha=a_{11}$, $\beta=a_{12}$ или $\alpha=a_{12}$, $\beta=a_{22}$).

Уравнение диаметра, сопряженного хордам с направляющим вектором $\{\alpha, \beta\}$, есть

$$F_1(x, y)\,\alpha+F_2(x, y)\,\beta=0.$$

Значит, полагая $\alpha=a_{11}$, $\beta=a_{12}$, получаем уравнение оси параболы в виде

$$F_1(x, y)\,a_{11}+F_2(x, y)\,a_{12}=0,$$

т. е.

$$(a_{11}^2+a_{12}^2)\,x+a_{12}(a_{11}+a_{22})\,y+a_{11}a_1+a_{12}a_2=0.$$

Из $a_{12}^2=a_{11}a_{22}$ вытекает

$$a_{11}^2+a_{12}^2=a_{11}(a_{11}+a_{22}).$$

Поэтому уравнение оси переписывается в виде

$$a_{11}Sx+a_{12}Sy+a_{11}a_1+a_{12}a_2=0,$$

т. е. окончательно в виде

$$a_{11}x+a_{12}y+\frac{a_{11}a_1+a_{12}a_2}{S}=0.$$

Аналогично, полагая $\alpha=a_{12}$, $\beta=a_{22}$, получаем для оси уравнение

$$a_{12}x+a_{22}y+\frac{a_{12}a_1+a_{22}a_2}{S}=0.$$

При $a_{12}\neq 0$ можно пользоваться любым из этих уравнений. При $a_{12}=0$ и $a_{11}=0$ (значит, $a_{22}\neq 0$) надо пользоваться вторым, при $a_{22}=0$ (и, значит, $a_{11}\neq 0$) — первым. Получаем соответственно уравнение оси в первом случае в виде

$$a_{22}y+a_2=0,$$

во втором случае в виде

$$a_{11}x+a_1=0.$$

Найдя уравнение оси параболы, мы сразу же находим и вершину O' параболы (как точку пересечения параболы с ее осью).

Принимая вершину параболы O' за начало новой системы координат, ось параболы — за новую ось $O'\xi$, а касательную в вершине — за ось $O'\eta$, определим положительное направление $O'\xi$ так, чтобы в новой системе координат $O'\xi\eta$ уравнение параболы имело вид $\eta^2=2p\xi$, $p>0$.

Для нахождения интересующего нас положительного направления $O'\xi$ вспомним (§ 4 гл. XVI), что после поворота исходной системы координат Oxy на угол α и последующего переноса начала

координат в точку O' уравнение параболы приняло вид $\eta^2 = 2\left(-\frac{a_1'}{S}\right)\xi$, где (гл. XVI, § 1, формула (3)) $a_1' = a_1 \cos\alpha + a_2 \sin\alpha$.

Для того чтобы было $-\frac{a_1'}{S} > 0$, надо на угол α, определяемый из уравнения $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$, наложить дополнительное требование, заключающееся в том, чтобы числа S и $a_1 \cos\alpha + a_2 \sin\alpha$ имели противоположные знаки. Найденный таким образом угол α и дает нам положительное направление оси $O'\xi$ канонической системы координат $O'\xi\eta$.

§ 12. Основная теорема об аффинных преобразованиях

Элементарная теория кривых второго порядка позволяет дать простое доказательство одного из важнейших свойств аффинных преобразований плоскости.

Пусть при аффинном преобразовании $\mathcal{A}$ плоскости кривая второго порядка K переходит в кривую K'. Так как при аффинном отображении отрезок переходит в отрезок, причем середина отрезка переходит в середину отрезка, то при преобразовании $\mathcal{A}$ центр кривой K переходит в центр кривой K'.

Так как при аффинном преобразовании параллельность прямых сохраняется, то всякий пучок параллельных хорд кривой K переходит в пучок параллельных хорд кривой K', середины хорд первого пучка переходят в середины хорд второго пучка, а значит, диаметр, сопряженный хордам первого пучка, переходит в диаметр, сопряженный хордам второго пучка. Отсюда вытекает

Теорема 12. *Пусть при данном аффинном преобразовании данная кривая второго порядка K переходит в кривую K', тогда всякая пара сопряженных диаметров кривой K переходит в пару сопряженных диаметров кривой K'.*

Выведем отсюда следующее основное свойство аффинных преобразований.

Теорема 13. *Всякое аффинное преобразование плоскости является произведением собственного или несобственного движения и двух сжатий (растяжений) плоскости, происходящих в двух взаимно перпендикулярных направлениях.*

Доказательство. Возьмем аффинное преобразование $\mathcal{A}^{-1}$, обратное к преобразованию $\mathcal{A}$, и рассмотрим какую-нибудь окружность K' радиуса 1 с центром O'. При аффинном преобразовании $\mathcal{A}^{-1}$ окружность K' переходит в эллипс K, а центр O' окружности K' переходит в центр O эллипса K. При этом всякая пара взаимно перпендикулярных, т. е. сопряженных, диаметров окружности K' переходит в пару сопряженных диаметров эллипса K. При

отображении $\mathcal{A}$, обратно, эллипс K переходит в окружность K', центр O эллипса K переходит в центр O' окружности K', а всякая пара сопряженных диаметров эллипса K переходит в пару сопряженных, т. е. взаимно перпендикулярных, диаметров окружности K'. Но среди пар сопряженных диаметров эллипса имеется пара его главных осей (и они взаимно перпендикулярны). Сделаем эти главные оси эллипса (фокальную и вторую) осями координат аффинной системы Oxy (рис. 194), единичные векторы которой суть соответственно векторы $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, ведущие в соответствующие вершины A и B эллипса (длины векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ обозначим через a и b). При нашем аффинном преобразовании $\mathcal{A}$ пара главных осей эллипса перейдет в пару сопряженных и, следовательно, взаимно перпендикулярных диаметров окружности, которые примем за оси координат системы $O'x'y'$. За единичные векторы этой системы примем радиусы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ (они имеют длину 1). При аффинном преобразовании $\mathcal{A}$ пара взаимно перпендикулярных прямых Ox и Oy переходит в пару взаимно перпендикулярных прямых $O'x'$, $O'y'$, а отрезки $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, лежащие на Ox, Oy и имеющие соответственно длины a и b, переходят в отрезки $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ длины 1, лежащие на $O'x'$, $O'y'$. В чем же состоит аффинное преобразование $\mathcal{A}$? Очевидно, во-первых, в движении (собственном или несобственном), которое переносит пару взаимно перпендикулярных прямых Ox и Oy, соответственно в пару взаимно перпендикулярных прямых $O'x'$, $O'y'$, и в последующем сжатии или растяжении вдоль этих последних прямых в отношении $a:1$ и $b:1$. Теорема 13 доказана.

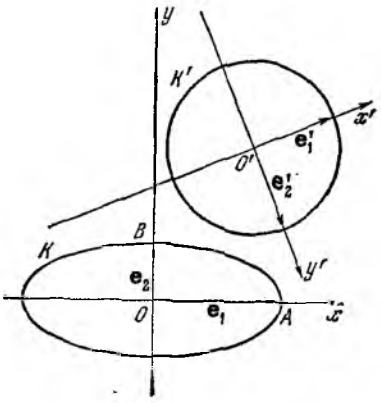


Рис. 194.

Из теоремы 13 вытекает

Следствие. *Пусть аффинное преобразование $\mathcal{A}$ представлено в виде произведения ортогонального преобразования (т. е. собственного или несобственного движения) и двух сжатий с коэффициентами k_1 и k_2. Тогда отношение длины образа любого отрезка к длине прообраза этого отрезка заключено между числами k_1 и k_2.*

В самом деле, пусть $\mathbf{u} = \{\alpha, \beta\}$ — какой-нибудь вектор, $\mathbf{u}' = \{\alpha', \beta'\}$ — его образ при преобразовании $\mathcal{A}$. Так как ортогональное преобразование не меняет длины вектора, то можно предположить, что преобразование есть произведение двух сжатий к осям прямоугольной

системы координат с коэффициентами k_1 и k_2. Без ограничения общности можно предположить, что, например, $k_1 \leqslant k_2$. Тогда

$$\alpha' = k_1\alpha, \quad \beta' = k_2\beta.$$

Поэтому

$$|\mathbf{u}'| = \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2} = \sqrt{k_1^2\alpha^2 + k_2^2\beta^2} \geqslant k_1\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = k_1|\mathbf{u}|.$$

Аналогично

$$|\mathbf{u}'| \leqslant k_2|\mathbf{u}|,$$

т. е.

$$k_1 \leqslant \frac{|\mathbf{u}'|}{|\mathbf{u}|} \leqslant k_2,$$

что и требовалось доказать.

Если при этом $k_1 = k_2 = k$, то для любого вектора $\mathbf{u}$ и его образа $\mathbf{u}'$ имеем

$$\frac{|\mathbf{u}'|}{|\mathbf{u}|} = k$$

— преобразование $\mathcal{A}$ есть преобразование подобия. Итак:

Аффинное преобразование, являющееся произведением ортогонального преобразования и двух сжатий с одним и тем же коэффициентом, есть преобразование подобия. Отсюда в свою очередь в виде непосредственного следствия вытекает

Теорема 14. *Аффинное преобразование, отображающее всякую окружность на окружность, есть преобразование подобия.*

ГЛАВА XVIII

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой главе будут перечислены различные виды поверхностей второго порядка. В главе XX мы покажем, что каждая из поверхностей второго порядка является одной из упомянутых в настоящей главе, т. е. что мы перечислили все поверхности второго порядка.

Система координат во всей этой главе предполагается прямоугольной.

§ 1. Распадающиеся поверхности

Если многочлен второй степени $F(x, y, z)$ есть произведение двух многочленов первой степени:

$$F(x, y, z) \equiv (A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2),$$

то поверхность $F(x, y, z) = 0$ распадается на пару плоскостей π_1 и π_2: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Если эти *плоскости пересекаются,* то сделаем прямую их пересечения осью аппликат, а биссекторные плоскости двугранных углов, образуемых этими плоскостями, примем за координатные плоскости Oyz и Oxz прямоугольной системы координат, беря в качестве плоскости Oxy любую плоскость, перпендикулярную к линии пересечения данных плоскостей (рис. 195). Тогда данные плоскости π_1 и π_2 получат уравнения $Ax + By = 0$ и $Ax - By = 0$, а поверхность $F(x, y, z) = 0$, распавшаяся на эти плоскости, будет поверхностью

$$(Ax + By)(Ax - By) = 0, \quad \text{т. е.} \quad A^2x^2 - B^2y^2 = 0. \tag{1}$$

Итак, всякая *поверхность второго порядка, распадающаяся на пару пересекающихся плоскостей, в некоторой системе координат имеет уравнение* (1).

Если поверхность распадается на *пару параллельных плоскостей* π_1 и π_2, то примем за плоскость Oxy прямоугольной системы координат среднюю плоскость π между плоскостями π_1 и π_2. Начало прямоугольной системы координат O и векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ возьмем в плоскости π, а вектор $\mathbf{e}_3$ направим перпендикулярно к плоскости π

(рис. 196); тогда плоскости π_1 и π_2 будут соответственно иметь уравнения $z=a$ и $z=-a$; уравнение пары плоскостей π_1, π_2 будет

$$z^2-a^2=0. \tag{2}$$

Наконец, мы говорим, что уравнение

$$(Ax+By+Cz+D)^2=0$$

определяет *пару совпадающих между собою плоскостей*

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Приняв эту плоскость за плоскость $z=0$ новой координатной системы, мы видим, что всякая поверхность второго порядка, являющаяся

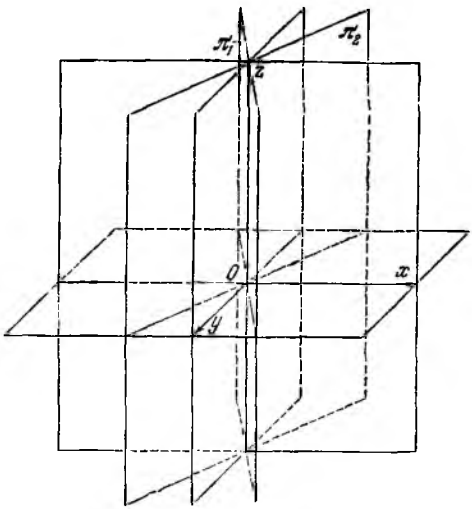


Рис. 195.

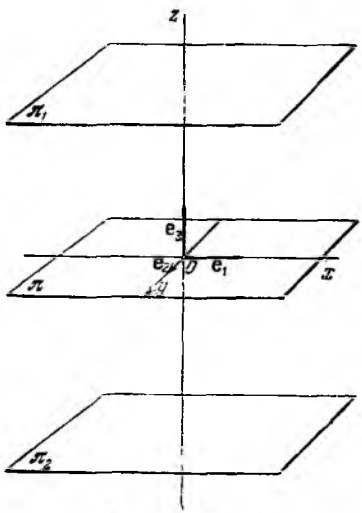


Рис. 196.

парой совпадающих между собою плоскостей, в некоторой системе координат может быть задана уравнением

$$z^2=0. \tag{3}$$

Мы увидим (в гл. XX), что поверхность, распадающаяся на *пару мнимых* (*сопряженных*) *плоскостей*, может быть задана уравнением

$$A^2x^2+B^2y^2=0,$$

если эти плоскости пересекаются, и уравнением

$$z^2+a^2=0,$$

если они параллельны.

§ 2. Цилиндрические поверхности

Цилиндрическая поверхность (см. гл. XV, § 8) *второго порядка* задается в некоторой надлежаще выбранной для данной поверхности каноничесной системе координат уравнением

$$F(x, y) = 0, \qquad (1)$$

где $F(x, y)$ — многочлен второй степени от переменных x и y. Кривая (1), определенная уравнением (1) в плоскости Oxy, является направляющей кривой (основанием) цилиндрической поверхности. Эта кривая может быть эллипсом, действительным или мнимым, гиперболой или параболой, в зависимости от чего мы и различаем *эллиптические* (рис. 197), *мнимые эллиптические*, *гиперболические* (рис. 198) и *параболические* (рис. 199) *цилиндры*, канонические уравнения которых совпадают с каноническими уравнениями их направляющих кривых (1). Если направляющая (1) есть пара прямых, то цилиндрическая поверхность вырождается в пару плоскостей (пересекающихся, параллельных или совпадающих, действительных или мнимых — в зависимости от соответствующего свойства лежащей в основании пары прямых).

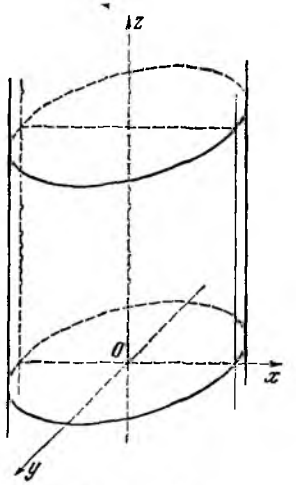


Рис. 197.

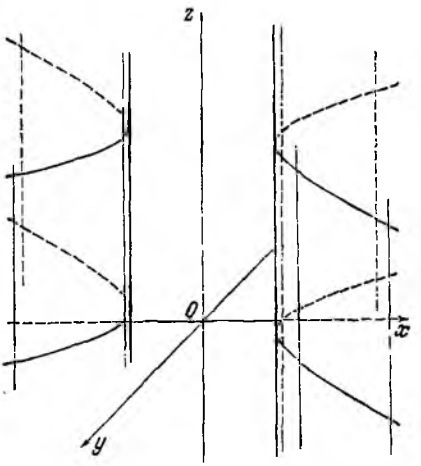


Рис. 198.

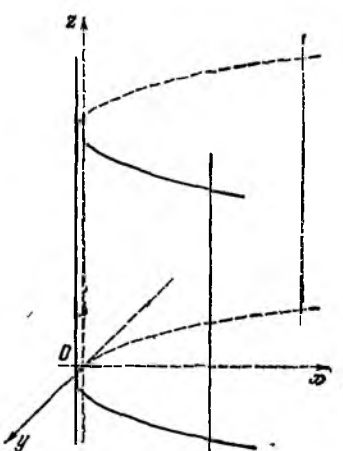


Рис. 199.

§ 3. Конусы второго порядка [1])

Под действительным конусом второго порядка понимается поверхность второго порядка, которая в некоторой прямоугольной системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{1}$$

Это уравнение и система координат, в которой данный конус им задается, называются *каноническими* для этого конуса (рис. 200).

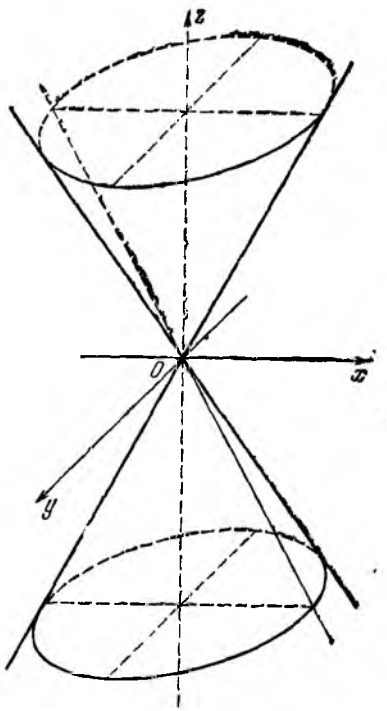


Рис. 200.

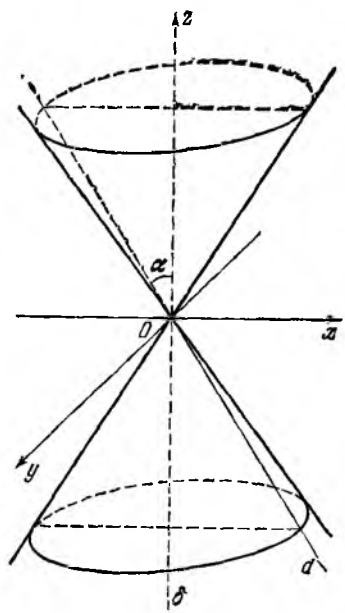


Рис. 201.

Поверхность, получающаяся от вращения вокруг заданной прямой δ какой-нибудь прямой d, пересекающейся с прямой δ, называется *круглым конусом* или *конусом вращения*. Выведем уравнение круглого конуса. Для этого примем прямую δ (произвольно ориентированную) за ось аппликат, точку ее пересечения с прямой d —

[1]) Сравнить с гл. XV, § 8.

за начало координат, а плоскость, проходящую через прямые δ и d,— за плоскость Oxz прямоугольной системы координат (рис. 201). Уравнение прямой d в плоскости Oxz можем записать в виде $\frac{|x|}{|z|} = \operatorname{tg}\alpha$, $y = 0$, где α — острый угол наклона прямой d к оси Oz. Тогда уравнение поверхности вращения будет

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|z|} = \operatorname{tg}\alpha$$

или

$$x^2 + y^2 - k^2 z^2 = 0, \tag{2}$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$. Уравнение (2) и есть каноническое уравнение круглого конуса.

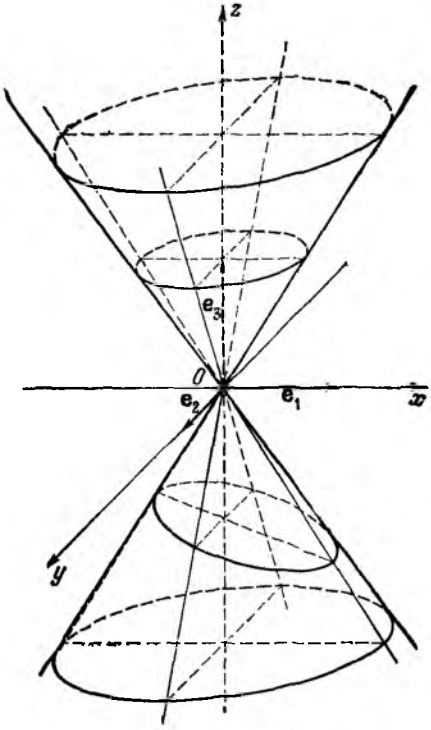


Рис. 202.

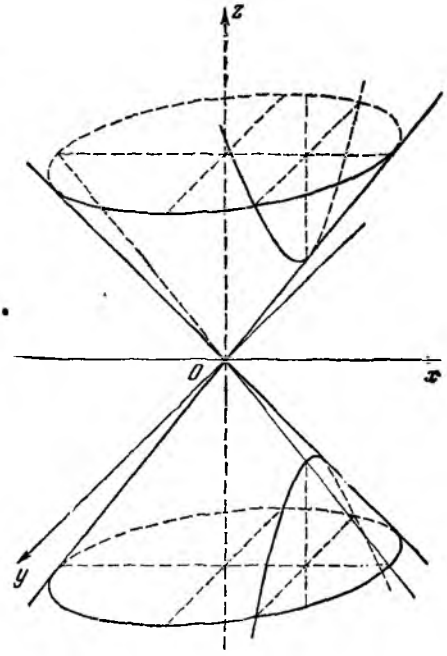


Рис. 203.

Плоскость, параллельная плоскости Oxy, пересекает конус (2) по окружности (например, плоскость $z = 1$ — по окружности $x^2 + y^2 = k^2$). Если немного наклонить эту плоскость, то в сечении получится эллипс (рис. 202) (читателю предлагается проверить это).

Плоскости, параллельные плоскостям Oyz и Oxz, пересекают конус (2) по гиперболам: например, в сечении конуса (2) плоскостью $x=b$ получаем кривую

$$k^2z^2-y^2=b^2,$$

т. е., полагая $\frac{b}{k}=a$,— гиперболу (рис. 203)

$$\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3}$$

Не только эллипс и гипербола, но и парабола является плоским сечением круглого конуса (2). Для простоты положим $k=1$, тогда уравнение конуса будет

$$x^2+y^2-z^2=0. \tag{4}$$

Докажем, что параболой является, например, сечение конуса (4) плоскостью π, заданной уравнением

$$x-z+1=0$$

(плоскость эта параллельна образующей $x=z$, $y=0$ конуса (4) (рис. 204)). Сделаем преобразование прямоугольных координат:

$$x=\frac{x'-z'}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}, \quad y=y',$$
$$z=\frac{x'+z'}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}.$$

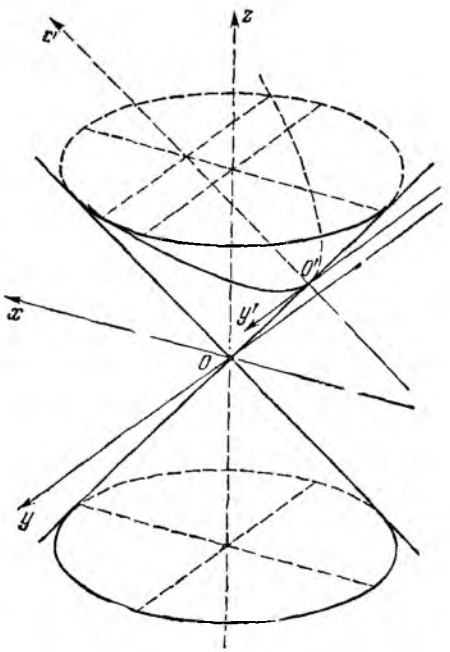


Рис. 204.

В новой системе координат плоскость π является координатной плоскостью $z'=0$, а поверхность (4) получает уравнение

$$y'^2-2x'z'-x'\sqrt{2}=0,$$

поэтому ее сечение плоскостью $z'=0$ есть парабола

$$y'^2=x'\sqrt{2}.$$

Итак, и эллипс, и гипербола, и парабола являются сечениями конуса (даже круглого конуса) второго порядка. Поэтому эти кривые и называются *коническими сечениями*. К плоским сечениям

поверхностей второго порядка мы еще вернемся с более общей точки зрения в главе XIX.

Наряду с действительными конусами второго порядка существуют еще мнимые конусы, которые в канонической для них системе координат имеют уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{5}$$

Единственная действительная точка мнимого конуса есть точка $O=(0,\ 0,\ 0)$. Их дальнейшее изучение интереса для нас не представляет.

Заметим, наконец, что цилиндрические и конические поверхности второго порядка (охватывающие, как мы видели, в виде частного случая и все распадающиеся поверхности второго порядка) будут объединены под общим наименованием *вырождающихся поверхностей* второго порядка; им — в качестве невырождающихся поверхностей — противополагаются эллипсоиды, гиперболоиды и параболоиды, к определению и краткому описанию которых мы и переходим.

§ 4. Эллипсоиды и гиперболоиды

Эллипсоидом (*вещественным*) называется поверхность, имеющая в некоторой («*канонической*» для нее) прямоугольной системе координат («*каноническое*») уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

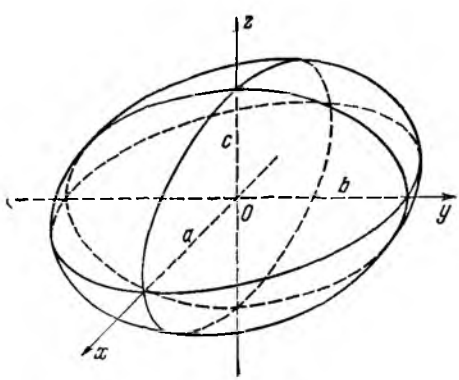


Рис. 205.

Положительные числа a, b, c называются *полуосями* эллипсоида (1).

Эллипсоид лежит внутри прямоугольного параллелепипеда

$$-a\leqslant x\leqslant a,\quad -b\leqslant y\leqslant b,\quad -c\leqslant z\leqslant c.$$

Другими словами, эллипсоиды суть ограниченные поверхности. *Все плоские сечения эллипсоида являются поэтому ограниченными кривыми второго порядка, т. е. эллипсами.*

Общий вид эллипсоида изображен на рис. 205.

Предположим, что $a^2\geqslant b^2\geqslant c^2$ (переименовав, если нужно, оси координат, мы всегда можем достигнуть этого). Если $a=b\neq c$, то

сечения эллипсоида плоскостями $z=h$ суть окружности

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \quad z=h$$

(радиуса $r_h=\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2}$, вещественного лишь при $|h|\leqslant c$), а сам эллипсоид получается вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$ вокруг

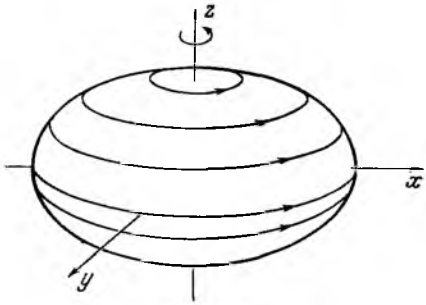


Рис. 206.

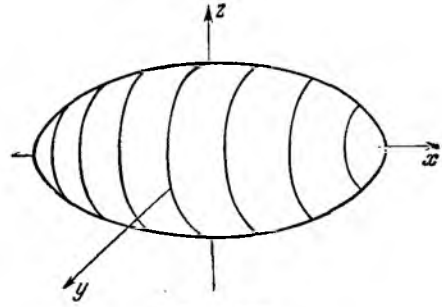


Рис. 207.

оси z. Так как $c<a$, то вращение эллипса происходит вокруг его второй оси (рис. 206), и полученный при этом эллипсоид естественно назвать *сжатым эллипсоидом вращения* (он имеет форму поверхности мандарина)[1]). Если же $a>b=c$, то сечения эллипсоида плоскостями $x=h$ суть окружности

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{a^2}, \quad x=h.$$

Радиусы этих окружностей равны $r_h=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-h^2}$ (они вещественны лишь при $|h|\leqslant a$); эллипсоид получается от вращения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$ (или эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$) вокруг оси Ox, т. е. вокруг его фокальной оси. Полученная поверхность называется *вытянутым эллипсоидом вращения* (рис. 207); она похожа на поверхность лимона.

Наконец, при $a=b=c$ эллипсоид (1) является сферой (шаровой поверхностью радиуса a) (рис. 208).

Поверхность, задаваемая в какой-нибудь прямоугольной системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

[1]) В первом приближении поверхность Земли является, как известно, сжатым эллипсоидом вращения.

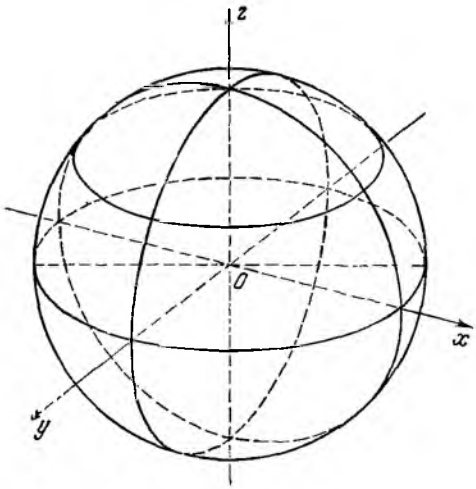


Рис. 208.

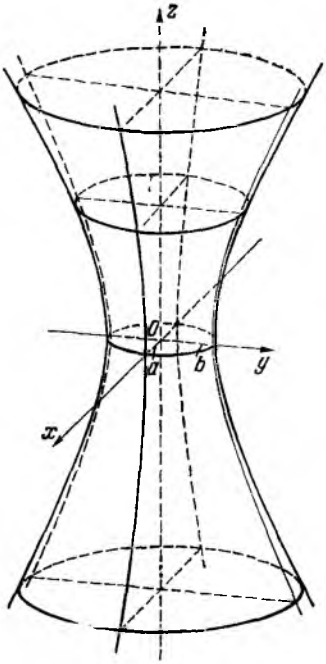


Рис. 209.

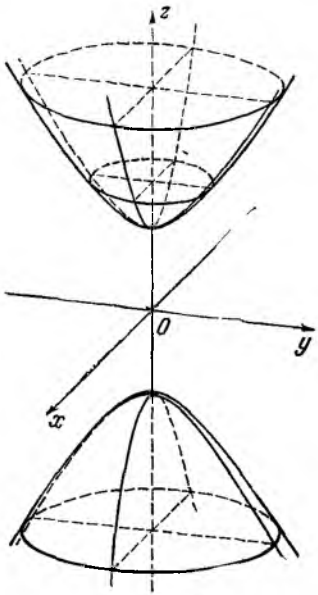


Рис. 210.

называется *мнимым эллипсоидом*. Мнимый эллипсоид не имеет ни одной вещественной точки.

Однополостным, соответственно *двуполостным*, *гиперболоидом* называется поверхность, имеющая в некоторой прямоугольной системе координат уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{(гиперболоид однополостный (рис. 209))}, \qquad (2)$$

соответственно

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{(гиперболоид двуполостный (рис. 210))}. \qquad (3)$$

Прямоугольная система координат, в которой данный гиперболоид имеет уравнение вида (2), соответственно (3), называется *канонической* для этого гиперболоида, а сами уравнения (2) и (3) называются *каноническими уравнениями гиперболоидов*. Положительные числа a, b, c называются *полуосями* гиперболоидов (2) и (3). Конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ определяется как общий асимптотический конус обоих гиперболоидов (2) и (3) (рис. 211).

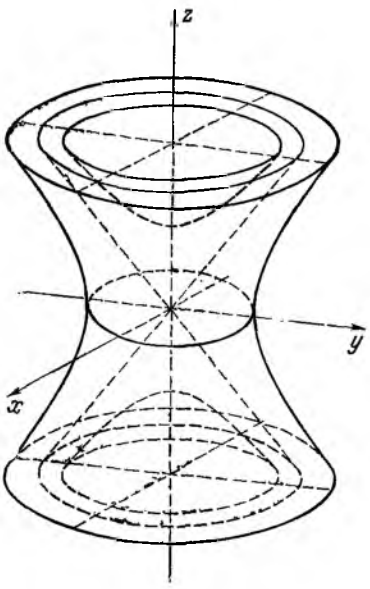


Рис. 211.

Из уравнений (2) и (3) видно, что начало канонической для данного гиперболоида системы координат является его центром симметрии, координатные плоскости прямоугольной канонической системы — его плоскостями симметрии, а оси координат этой системы — осями симметрии. Всякий гиперболоид имеет три плоскости симметрии [1]).

Если $a=b=c$, то гиперболоид называется *правильным*. Предположим, что $a=b=c=1$ [2]), тогда *правильный однополостный гиперболоид* имеет уравнение

$$x^2+y^2-z^2=1, \qquad (2')$$

а *правильный двуполостный* — уравнение

$$-x^2-y^2+z^2=1. \qquad (3')$$

---

[1]) Мы увидим в главе XX, что при $a\neq b$ — только три.

[2]) Изменив, если нужно масштаб, т. е. сделав при $a=b=c$ преобразование координат $x=ax'$, $y=ay'$, $z=az'$, мы всегда можем свести дело к рассматриваемому случаю.

Плоскость $y=0$ (плоскость чертежа) пересекает правильный одиополостный гиперболоид (2′) по равнобочной гиперболе

$$x^2-z^2=1, \quad y=0, \tag{4}$$

а плоскость $x=0$ — по равнобочной гиперболе

$$y^2-z^2=1, \quad x=0. \tag{4′}$$

Гиперболы (4) и (4′) конгруэнтны между собою: одна из них переходит в другую при вращении пространства на прямой угол вокруг оси z.

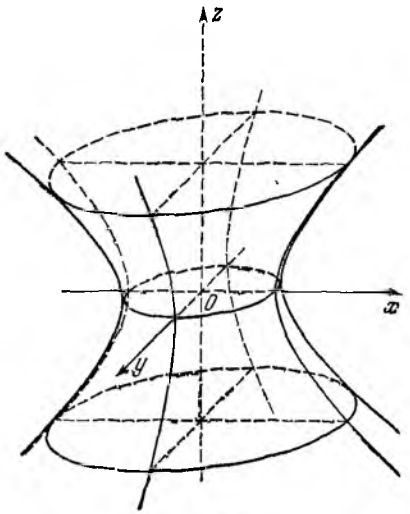


Рис. 212.

Плоскости

$$z=h,$$

параллельные плоскости Oxy, пересекают гиперболоид (2′) по окружностям

$$x^2+y^2=1+h^2, \quad z=h$$

радиуса $\sqrt{1+h^2}$. Из всего сказанного ясно, что вся поверхность (2′) есть поверхность, получаемая от вращения гиперболы (4) (или (4′)) вокруг оси z (т. е. вокруг второй оси гиперболы).

Общий вид правильного однополостного гиперболоида показан на рис. 212.

Переходим к правильному двуполостному гиперболоиду. Он определен (в прямоугольной системе координат) уравнением

$$-x^2-y^2+z^2=1. \tag{3′}$$

Его сечения плоскостями $y=0$ и $x=0$ суть соответственно (конгруэнтные) равнобочные гиперболы

$$z^2-x^2=1, \quad y=0 \tag{5}$$

и

$$z^2-y^2=1, \quad x=0, \tag{5′}$$

имеющие ось z своею фокальной осью; эти гиперболы переходят друг в друга вращением на прямой угол вокруг оси z.

Плоскость $z=h$, параллельная плоскости Oxy, пересекает поверхность (3′) по окружности

$$x^2+y^2=h^2-1,$$

вещественной при $|h|>1$ и мнимой при $|h|<1$, в соответствии с чем на плоскости $z=h$ при $|h|<1$ вещественных точек нашей поверхности нет. Вся поверхность (3′) описывается гиперболой (5) при вращении ее вокруг оси z. Поверхность состоит из двух простирающихся в бесконечность «чаш» (или «полостей»), описываемых каждой из ветвей гиперболы (5) (рис. 213).

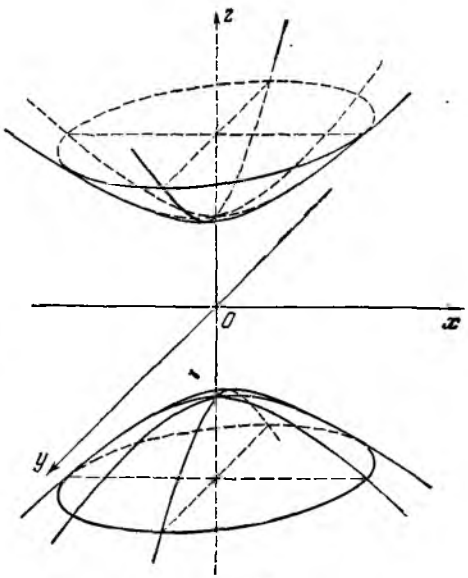


Рис. 213.

Вернемся к общему случаю любых гиперболоидов. Плоскость $z=h$ пересекает однополостный гиперболоид (2) по кривой

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2},\quad z=h. \tag{6}$$

Полагая $1+\frac{h^2}{c^2}=\lambda_h^2$, видим, что кривая (6) есть эллипс

$$\frac{x^2}{(a\lambda_h)^2}+\frac{y^2}{(b\lambda_h)^2}=1,\quad z=h.$$

Все эти эллипсы подобны между собою: отношение их полуосей $\frac{b\lambda_h}{a\lambda_h}=\frac{b}{a}$ одно и то же, их эксцентриситеты равны эксцентриситету эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad z=0,$$

являющегося пересечением однополостного гиперболоида (2) с плоскостью $z=0$; этот эллипс называется *горловым эллипсом* данного однополостного гиперболоида. При $a=b$ эти сечения являются окружностями, а гиперболоид (2) делается *однополостным гиперболоидом вращения* — он получается при вращении гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$ (или гиперболы $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$) вокруг оси z, являющейся второй осью каждой из этих гипербол.

Сечения однополостного гиперболоида (2) плоскостями $y=h$ суть кривые $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}$. Полагая $\lambda_h^2=1-\frac{h^2}{b^2}$ при $|h|<b$ и $\lambda_h^2=\frac{h^2}{b^2}-1$ при $|h|>b$, видим, что эти кривые суть соответственно

гиперболы (рис. 214)

$$\frac{x^2}{(a\lambda_h)^2}-\frac{z^2}{(c\lambda_h)^2}=1, \quad y=h \quad \text{и} \quad \frac{z^2}{(c\lambda_h)^2}-\frac{x^2}{(a\lambda_h)^2}=1, \quad y=h.$$

Аналогично доказываем, что сечения однополостного гиперболоида (2) плоскостями $x=h$ суть гиперболы

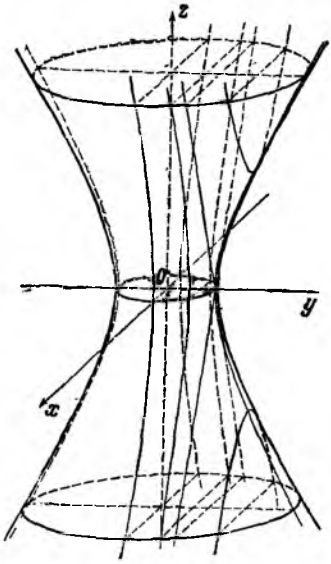


Рис. 214.

$$\frac{y^2}{(b\lambda_h)^2}-\frac{z^2}{(c\lambda_h)^2}=1, \quad x=h$$

при $|h|<a$, $\lambda_h^2=1-\frac{h^2}{a^2}$,

$$\frac{z^2}{(c\lambda_h)^2}-\frac{y^2}{(b\lambda_h)^2}=1, \quad x=h$$

при $|h|>a$, $\lambda_h^2=\frac{h^2}{a^2}-1$.

Сечение однополостного гиперболоида (2) каждой из плоскостей $y=\pm b$ есть пара прямых

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad y=\pm b.$$

Точно так же сечение однополостного гиперболоида (2) каждой из плоскостей $x=\pm a$ есть пара прямых

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad x=\pm a.$$

Мы увидим в § 6, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходит пара вещественных прямых — «прямолинейных образующих» гиперболоида.

Замечание[1]). Возьмем какую-нибудь плоскость

$$z=px+qy+k, \tag{7}$$

не параллельную оси z, и найдем ее пересечение K с однополостным гиперболоидом (2). Подставляя (7) в (2), получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(px+qy+k)^2}{c^2}=1 \tag{8}$$

— уравнение проекции K_0 линии пересечения K на плоскость Oxy. После раскрытия скобок и приведения подобных членов можем

[1]) Заимствовано из «Курса аналитической геометрии» Н. И. Мусхелишвили.

переписать уравнение (8) в виде

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0,$$

где

$$a_{11}=\frac{1}{a^2}-\frac{p^2}{c^2},\quad a_{12}=-\frac{pq}{c^2},\quad a_{22}=\frac{1}{b^2}-\frac{q^2}{c^2}.$$

Придавая надлежащие значения коэффициентам p и q, можно достигнуть того, чтобы детерминант $\delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\frac{1}{a^2b^2}-\frac{1}{c^2}\left(\frac{p^2}{b^2}+\frac{q^2}{a^2}\right)$ обратился в нуль, а также чтобы он был положительным или отрицательным. В соответствии с этим уравнение (8) определит в плоскости Oxy кривую K_0 любого заданного типа (эллиптического, гиперболического, параболического); при этом можно потребовать, чтобы было $\Delta\neq 0$, т. е. чтобы кривая не распадалась. Но кривая K_0 есть проекция (вдоль оси z) кривой K, а при параллельном проектировании аффинный класс кривой второго порядка не меняется (читатель легко докажет это геометрически).

Итак, выбрав надлежащим образом плоскость, не параллельную оси z, можно получить в качестве кривой пересечения K этой плоскости с однополостным гиперболоидом (2) невырождающуюся кривую второго порядка любого типа (эллипс, гиперболу, параболу). Мы видели, что пересечением однополостного гиперболоида может быть пара пересекающихся прямых; мы увидим в § 6, что может получиться и пара параллельных прямых.

Заметим, что в наших рассуждениях ничего не изменилось бы, если бы в правой части уравнения (8) мы заменили 1 на 0; итак, плоскость (7) пересекает однополостный гиперболоид и его асимптотический конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ по кривым одного и того же типа.

Читателю предоставляется доказать, что всякая плоскость, параллельная оси Oz, пересекает однополостный гиперболоид (2) по линии гиперболического типа (т. е. по гиперболе или по паре пересекающихся прямых). Для плоскостей, параллельных координатным плоскостям Oxz или Oyz, это уже было доказано.

Рассмотрим теперь пересечения двуполостного гиперболоида

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3}$$

с плоскостями, параллельными координатным.

Плоскость $z=h$ при $|h|<c$ пересекает поверхность (3) по мнимым эллипсам, при $|h|>c$ — по вещественным. Если $a=b$, то эти эллипсы являются окружностями, а гиперболоид (3) есть гиперболоид вращения: он получается при вращении гиперболы $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$, $y=0$

$\left(\text{или } \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,\ x = 0\right)$ вокруг оси z (являющейся фокальной осью каждой из этих гипербол). При $|h| = c$ получаем пару мнимых сопряженных прямых с одной вещественной точкой $(0, 0, c)$, соответственно $(0, 0, -c)$.

Плоскости $x = h$ и $y = h$ пересекают гиперболоид (3) по гиперболам (рис. 215) (плоскости $x = \pm a$, $y = \pm b$ исключения не представляют).

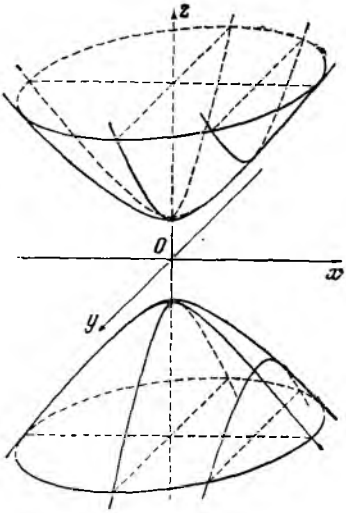


Рис. 215.

Мы определили асимптотический конус для обоих гиперболоидов (2) и (3) как конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \qquad (9)$$

Сравним сечения плоскости $z = h$ с каждым из гиперболоидов (2), (3) и с конусом (9). При этом предполагаем $h > c$.

Получаем эллипсы, полуоси которых суть

$$\left.\begin{aligned} a'_h &= a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1}, \\ b'_h &= b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1} \end{aligned}\right\} \text{(сечение с однополостным гиперболоидом (2)),} \qquad (10)$$

соответственно

$$\left.\begin{aligned} a''_h &= a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \\ b''_h &= b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1} \end{aligned}\right\} \text{(сечение с двуполостным гиперболоидом (3))} \qquad (11)$$

и, наконец,

$$\left.\begin{aligned} a_h &= a\frac{|h|}{c}, \\ b_h &= b\frac{|h|}{c}. \end{aligned}\right\} \text{(сечение с конусом (9)).} \qquad (12)$$

Мы видим, что

$$a''_h < a_h < a'_h,$$
$$b''_h < b_h < b'_h.$$

Это значит, что в каждой плоскости $z = h$ эллипс, являющийся сечением этой плоскости с конусом (9), лежит между эллипсами, являющимися сечениями той же плоскости с гиперболоидами (2) и

(3): общий асимптотический конус обоих гиперболоидов расположен «между» обоими этими гиперболоидами, как показывает рис. 216.

Далее, имеем

$$a'_h - a_h = a\left(\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1} - \sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right).$$

Преобразуя скобку справа, получим

$$\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1} - \sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} = \frac{\left(\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1} - \sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)\left(\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1} + \sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)}{\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1} + \sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1} + \sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}},$$

т. е. выражение, стремящееся к нулю при $|h| \to \infty$. Итак, при $|h| \to \infty$ имеем $a'_h - a''_h \to 0$ и (аналогично) $b'_h - b''_h \to 0$ и подавно $a'_h - a_h \to 0$, $b'_h - b_h \to 0$ — три эллипса, сечения плоскости $z = h$ с гиперболоидами (2), (3) и их асимптотическим конусом (9), имея общие направления осей и общий центр, неограниченно сближаются (так что при достаточно большом $|h|$ все три эллипса лежат в сколь угодно тесной окрестности любого, например среднего, из них).

Можно сказать, что при $|z| \to \infty$ оба гиперболоида (2) и (3) неограниченно сближаются со своим общим асимптотическим конусом.

Определение. Прямая, всеми своими точками лежащая на данной поверхности, называется *прямолинейной образующей этой поверхности.*

Мы знаем, что прямолинейные образующие имеются и у цилиндрических, и у конических поверхностей; в § 6 этой главы будет показано, что они имеются и у однополостного гиперболоида.

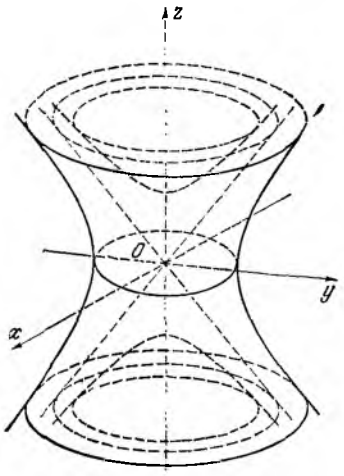


Рис. 216.

Докажем, что у двуполостного гиперболоида вещественных прямолинейных образующих нет. В самом деле, предположим,

что вещественная прямая d является прямолинейной образующей гиперболоида (3). Прямая d не может пересекаться с плоскостью Oxy (или лежать в ней), так как плоскость Oxy не содержит ни одной вещественной точки гиперболоида (3). Но прямая d не может быть и параллельной плоскости Oxy, потому что в этом случае она содержалась бы в пересечении гиперболоида (3) с некоторой плоскостью $z = h$, что невозможно, так как это пересечение есть эллипс (вещественный или мнимый) и значит, не содержит никакой прямой. Утверждение доказано.

Мы видели, что начало канонической для данной поверхности системы координат является ее центром симметрии (единственным, как мы докажем в главе XIX). Поэтому эллипсоиды и гиперболоиды получат в главе XIX общее название *центральных невырожденных поверхностей второго порядка* (класс вырожденных центральных поверхностей составят конусы второго порядка).

§ 5. Параболоиды

Эллиптическим, соответственно *гиперболическим, параболоидом* называется всякая поверхность, которая в некоторой (канонической для данной поверхности) прямоугольной системе координат $Oe_1e_2e_3$ имеет каноническое уравнение

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \quad \text{— для эллиптических параболоидов,} \quad (1)$$

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \quad \text{— для гиперболических параболоидов;} \quad (2)$$

при этом p и q — положительные числа («параметры» параболоидов).

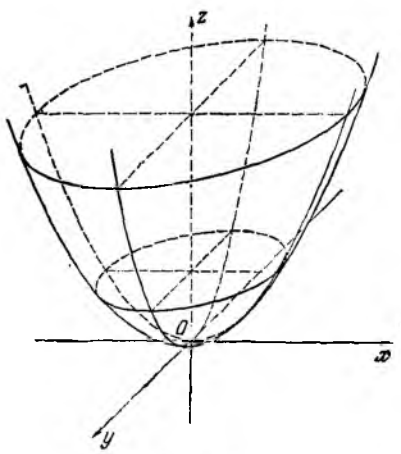


Рис. 217.

Общий вид эллиптического параболоида представить себе очень легко (рис. 217): он расположен весь по одну сторону от плоскости $z = 0$, а именно в полупространстве $z \geqslant 0$; сечения плоскостями $z = h$, $h > 0$, суть кривые $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h$, т. е. эллипсы

$$\frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1, \quad z = h. \quad (3)$$

Сечения эллиптического параболоида (1) плоскостями $y=0$ и $x=0$ суть соответственно параболы

$$x^2=2pz, \quad y=0 \tag{4}$$

и

$$y^2=2qz, \quad x=0 \tag{5}$$

— *главные параболы параболоида* (1); при этом параболу (4) условно назовем *неподвижной*, а параболу (5) — *подвижной*.

Сечение эллиптического параболоида (1) плоскостью $z=0$ есть пара мнимых сопряженных прямых с единственной вещественной точкой O («вершина параболоида»).

Вся поверхность (1) имеет вид чаши, лежащей в полупространстве $z\geqslant 0$, касающейся в точке O плоскости $z=0$ и уходящей в бесконечность.

Все эллипсы (3), являющиеся «горизонтальными» сечениями эллиптического параболоида (1), подобны между собою — они имеют одно и то же отношение полуосей: $\dfrac{\sqrt{2qh}}{\sqrt{2ph}}=\sqrt{\dfrac{q}{p}}$, и один и тот же эксцентриситет. В частности, если $p=q$, то все эти эллипсы суть окружности радиусов $\sqrt{2ph}$; параболоид в этом случае есть *параболоид вращения*: он получается вращением параболы $x^2=2pz$ (расположенной в плоскости $y=0$) вокруг ее оси (рис. 218).

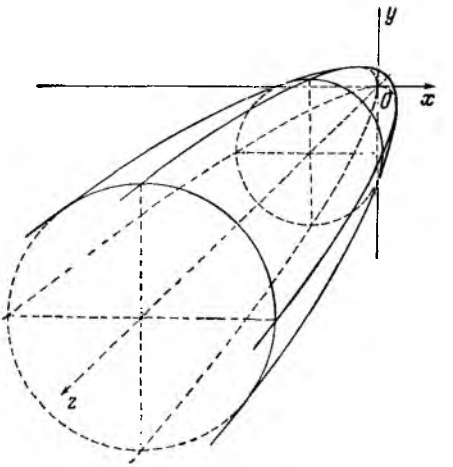


Рис. 218.

Эллиптический параболоид вещественных прямолинейных образующих не имеет. В самом деле, прямая d, параллельная плоскости Oxy, лежит в некоторой плоскости $z=h$, следовательно, все ее точки пересечения с параболоидом (1) принадлежат эллипсу, по которому плоскость $z=h$ пересекает параболоид (значит, у нее не более двух общих точек с параболоидом (1)).

Если же прямая d не параллельна плоскости Oxy, то целая ее полупрямая лежит в полупространстве $z<0$, не содержащем ни одной точки параболоида (1).

Итак, никакая прямая не может быть образующей параболоида (1).

Можно дать следующее очень наглядное построение эллиптического параболоида посредством скольжения одной параболы вдоль другой (система координат все время предполагается прямоугольной).

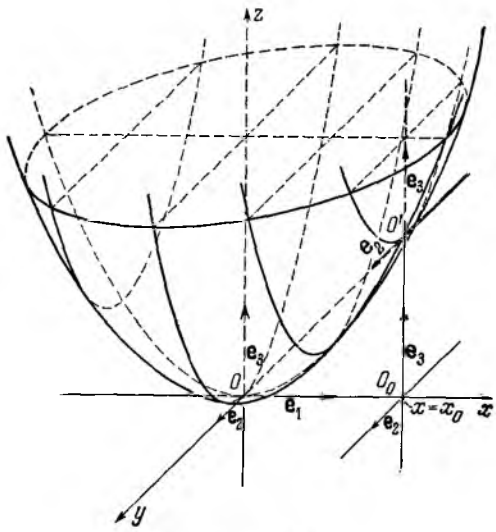


Рис. 219.

Возьмем сечение параболоида (1) плоскостью $x = x_0$ (рис. 219); получим в этой плоскости, снабженной (прямоугольной) системой координат $O_0\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, где $O_0 = (x_0, 0, 0)$, кривую, уравнение которой будет

$$\frac{y^2}{q} = 2z - \frac{x_0^2}{p}, \qquad x = x_0$$

или

$$y^2 = 2q\,(z - z_0), \qquad x = x_0, \tag{6}$$

где

$$z_0 = \frac{x_0^2}{2p}. \tag{7}$$

Перейдем в плоскости $x = x_0$ от системы координат $O_0\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ к системе координат $O'\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, где $O' = (x_0, 0, z_0)$ есть точка пересечения плоскости $x = x_0$ с неподвижной параболой

$$x^2 = 2pz, \qquad y = 0. \tag{4}$$

Перенеся начало координат системы $O_0\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ в точку O', мы произвели преобразование координат

$$y = y', \quad z = z' + z_0,$$

в результате которого уравнение кривой (6) получило вид

$$y'^2 = 2pz', \quad x = x_0; \tag{8}$$

кривая (6) есть та же «подвижная» парабола, но перенесенная параллельно себе в плоскость $x = x_0$; перенос этот можем осуществить так, что вершина подвижной параболы скользит по неподвижной параболе из точки O в точку O', а сама парабола при этом перемещается, как твердое тело, оставаясь все время в плоскости, параллельной плоскости Oyz. Этот результат мы можем сформулировать так:

Эллиптический параболоид (заданный уравнением (1)) *есть поверхность, описываемая при движении одной* («*подвижной*») *параболы* (5) *вдоль другой, неподвижной* (4) *так, что вершина подвижной*

параболы скользит по неподвижной, а плоскость и ось подвижной параболы остаются все время параллельными самим себе, причем предполагается, что обе параболы (подвижная и неподвижная) обращены вогнутостью в одну и ту же сторону (а именно в положительную сторону оси z).

Аналогичный способ построения применим и к гиперболическому параболоиду (рис. 220), поверхности, наглядное представление о которой при первом знакомстве с ней обычно требует от учащегося некоторого небольшого усилия.

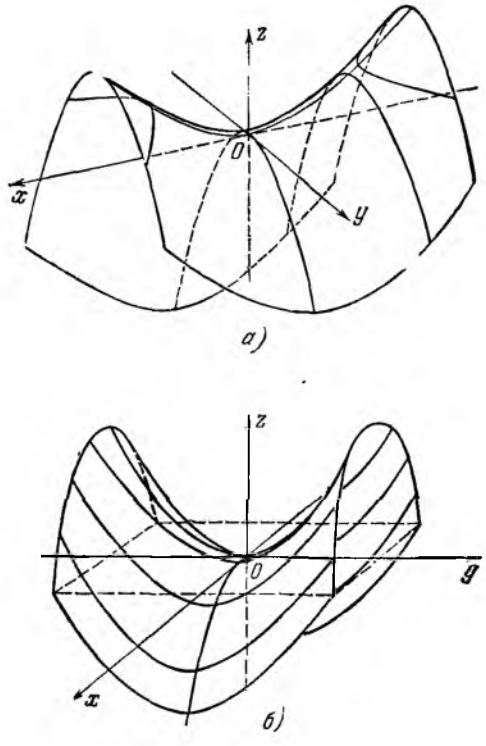


Рис. 220.

Сечениями гиперболического параболоида (2) с плоскостями $y = 0$ и $x = 0$ снова являются две «главные» параболы:

«неподвижная» парабола

$$x^2 = 2pz, \quad y = 0, \qquad (4)$$

и подвижная

$$y^2 = -2qz, \quad x = 0, \qquad (9)$$

обращенные теперь вогнутостью в противоположные стороны: неподвижная — «вверх» (т. е. в положительном направлении оси z), а подвижная — «вниз» (в отрицательном направлении оси z). Сечение плоскостью $x = x_0$ имеет в системе координат $O_0\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ (где $O_0 = (x_0, 0, 0)$) уравнение

$$\frac{y^2}{q} = -2z + \frac{x_0^2}{p}$$

или

$$y^2 = -2q(z - z_0), \quad x = x_0, \qquad (10)$$

где

$$z_0 = \frac{x_0^2}{2p}, \qquad (7)$$

или, наконец, после перенесения начала координат в точку $O' = (x_0, 0, z_0)$ (лежащую на параболе $x^2 = 2pz$, $y = 0$), уравнение

$$y'^2 = -2qz', \quad x = x_0. \tag{11}$$

Последнее уравнение показывает, что кривая (10) есть та же подвижная парабола (9), только сдвинутая параллельно себе посредством скольжения ее вершины вдоль неподвижной параболы из точки O в точку O'. Отсюда следует, что *гиперболический параболоид (заданный в прямоугольной системе координат уравнением* (2)) *есть поверхность, описываемая подвижной параболой* $y^2 = -2qz$, $x = 0$ *при ее движении вдоль неподвижной параболы* (4) *так, что вершина подвижной параболы скользит по неподвижной параболе, а плоскость и ось подвижной параболы остаются все время параллельными себе самим, при этом обе параболы вогнутостью все время обращены в противоположные стороны: неподвижная — вогнутостью «вверх», т. е. в положительном направлении оси z, а подвижная — «вниз».*

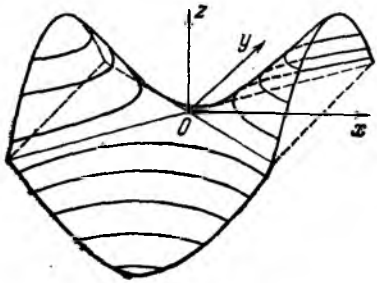


Рис. 221.

Из этого построения видно, что гиперболический параболоид имеет вид седла.

Сечение гиперболического параболоида плоскостью $z = 0$ есть пара (вещественных) прямых (рис. 221)

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 0$$

(являющихся парой образующих гиперболического параболоида).

Сечение плоскостью $z = h \neq 0$ есть гипербола, уравнение которой есть (в системе координат $O_h e_1 e_2$, где O_h — точка пересечения оси z с плоскостью $z = h$, а векторы e_1, e_2 те же, что и в исходной системе $Oe_1e_2e_3$)

$$\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1, \quad z = h.$$

При $h > 0$ фокальная ось этой гиперболы направлена по вектору $\{1, 0, 0\}$ т. е. параллельно оси абсцисс, а при $h < 0$ — параллельно оси ординат так что проекции на плоскость Oxy гипербол, получающихся в сечении параболоида (2) плоскостями

$$z = h \quad \text{и} \quad z = -h,$$

являются сопряженными гиперболами в плоскости Oxy.

При $|h| \to \infty$ эти гиперболы имеют неограниченно возрастающие полуоси $\sqrt{2p|h|}$ и $\sqrt{2q|h|}$, отношение которых постоянно и равно $\sqrt{\frac{q}{p}}$, так что все гиперболы, являющиеся горизонтальными сечениями гиперболического параболоида, подобны между собою.

§ 6. Прямолинейные образующие

Нас интересуют в этом параграфе лишь вещественные прямолинейные образующие только что рассмотренных поверхностей. Мы видели, что эллипсоиды, двуполостные гиперболоиды и эллиптические параболоиды их не имеют вовсе. Докажем, что через каждую точку однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида проходят (по крайней мере) две (различные) вещественные прямолинейные образующие [1]).

1. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида. Рассмотрим сначала «правильный» однополостный гиперболоид, заданный уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1. \tag{1}$$

Как мы видели, он описывается гиперболой

$$x^2 - z^2 = 1, \quad y = 0$$

при вращении пространства вокруг оси z, в соответствии с чем его сечения плоскостями $z = h$ суть окружности

$$x^2 + y^2 = 1 + h^2, \quad z = h.$$

В частности, при $z = h = 0$ получаем так называемую горловую окружность

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0.$$

Докажем, что через каждую точку M_0 горловой окружности проходят две прямолинейные образующие гиперболоида.

Повернув систему координат на надлежащий угол вокруг оси z, можно достигнуть того, что ось y пройдет именно через точку M_0, причем вид уравнения (1) при этом преобразовании не изменится [2]).

---

[1]) В главе XIX мы увидим, что их только две.

[2]) В самом деле, при повороте системы координат вокруг оси z

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \quad y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi, \quad z = z'$$

на любой угол φ уравнение (1) переходит в

$$(x'^2 \cos^2\varphi - 2x'y' \cos\varphi \sin\varphi + y'^2 \sin^2\varphi) + (x'^2 \sin^2\varphi + 2x'y' \cos\varphi \sin\varphi + y'^2 \cos^2\varphi) - z'^2 = x'^2 + y'^2 - z'^2 = 1,$$

т. е. сохраняет свой вид.

Итак, достаточно доказать наше утверждение для точки

$$M_0 = (0,\ 1,\ 0).$$

Но плоскость

$$y = 1,$$

очевидно, пересекает гиперболоид (1) по паре прямых

$$\left.\begin{array}{ll} (d_1) & x+z=0,\quad y=1,\\ (d_2) & x-z=0,\quad y=1. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Они лежат на нашем гиперболоиде (1), проходят через точку $M_0 = (0,\ 1,\ 0)$ и, значит, являются искомыми образующими.

Докажем, что при вращении пространства вокруг оси z каждая из прямых (2), например прямая d_1, опишет весь гиперболоид (1).

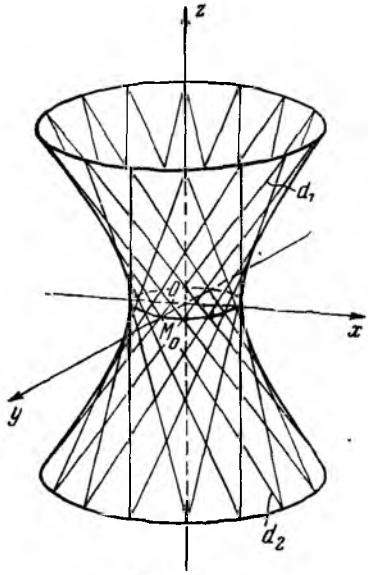


Рис. 222.

Пусть M_1 — какая-нибудь точка прямой d_1; она лежит на окружности, по которой гиперболоид пересекает горизонтальная, т. е. параллельная, плоскость Oxy, плоскость, проходящая через точку M_1; при вращении пространства вокруг оси z точка M_1 описывает всю эту окружность, т. е., во-первых, не покидает гиперболоида, а во-вторых, попадает в любую его точку, лежащую на той же высоте (т. е. на той же горизонтальной плоскости), что и точка M_1.

Следовательно, при вращении вокруг оси z и вся прямая d_1, во-первых, в каждый момент времени всеми своими точками лежит на гиперболоиде (1), а во-вторых, в некоторый момент оказывается проходящей через любую точку M гиперболоида.

То же справедливо и для прямой d_2: прямая d_2 при вращении пространства вокруг оси z в некоторый момент также пройдет через любую точку M гиперболоида.

Все прямые, в которые при вращении пространства вокруг оси z, переходит каждая из двух прямых d_1, d_2, составляют два семейства прямолинейных образующих правильного однополостного гиперболоида (1) (рис. 222). Через каждую точку M гиперболоида проходит по одной из образующих каждого семейства.

Можно было бы чисто геометрически доказать, что любые две образующие, принадлежащие различным семействам, лежат в одной плоскости (следовательно, или пересекаются, или параллельны между собою), тогда как любые две образующие, принадлежащие одному и тому же семейству, скрещиваются.

Замечание. Аффинное преобразование пространства

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{b}, \quad z' = \frac{z}{c}$$

переводит всякую прямую в прямую, а однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

в правильный однополостный гиперболоид

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = 1;$$

поэтому на любом однополостном гиперболоиде имеются два семейства прямолинейных образующих, каждое из которых покрывает его так, что через всякую точку гиперболоида проходит по одной образующей каждого семейства.

Мы сейчас дадим аналитическую трактовку того же вопроса. Пусть однополостный гиперболоид задан своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3}$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \tag{3'}$$

или

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right). \tag{4}$$

Рассмотрим теперь пару вещественных чисел α, β, не равных одновременно нулю, и для каждой такой пары напишем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В частности, при $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= 0, \\ 1 - \frac{y}{b} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

а при $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} 1 + \frac{y}{b} &= 0, \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Для каждой пары чисел α, β наши уравнения определяют пару плоскостей, как легко видеть, не параллельных (в широком смысле слова) и, следовательно, пересекающихся по прямой. Прямая эта целиком лежит на гиперболоиде (3). В самом деле, каждая ее точка $M = (x, y, z)$ удовлетворяет обоим уравнениям (5), а следовательно, уравнению, полученному почленным перемножением уравнений (5), и, значит, уравнению (3). Случай, когда один из множителей α, β равен нулю, исключения не представляет, так как точка $M = (x, y, z)$, удовлетворяющая системе уравнений (6) или (7), удовлетворяет и уравнению (3).

Итак, мы получили семейство прямолинейных образующих гиперболоида (3). Семейство это назовем *семейством* I; оно, очевидно, зависит от одного параметра

$$u = \beta : \alpha.$$

Докажем, что через каждую точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ гиперболоида (3) проходит одна-единственная прямая семейства I.

В самом деле, мы ищем прямую (5), проходящую через точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и удовлетворяющую уравнению (3), так что для определения отношения $\beta : \alpha$ имеем уравнения (5), которые (после замены x, y, z на x_0, y_0, z_0) могут быть записаны в виде следующих пропорций:

$$\beta : \alpha = \left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) : \left(1 + \frac{y_0}{b}\right), \tag{5_1}$$

$$\beta : \alpha = \left(1 - \frac{y_0}{b}\right) : \left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right), \tag{5_2}$$

причем выполнено тождество

$$\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) : \left(1 + \frac{y_0}{b}\right) = \left(1 - \frac{y_0}{b}\right) : \left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right), \tag{4_0}$$

получающееся, если подставить в (3) координаты $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ точки M_0. В силу тождества (4_0) мы можем для определения отношения $\beta : \alpha$ воспользоваться любым из уравнений (5_1), (5_2). Первое из них делается неопределенным, лишь если одновременно $1 + \frac{y_0}{b} = 0$ и $\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} = 0$; но в этом случае мы можем воспользоваться уравнением (5_2), так как при $1 + \frac{y_0}{b} = 0$ во всяком случае $1 - \frac{y_0}{b} \neq 0$, и, значит, отношение $\beta : \alpha$ определится из (5_2). Итак,

если задана точка $M_0=(x_0, y_0, z_0)$, то однозначно находится отношение $\beta:\alpha$, определяющее прямую семейства I, проходящую через точку M_0.

Отсюда следует, что никакие две прямые семейства I не пересекаются (так как если бы они пересекались в некоторой точке M_1, то эта точка была бы точкой гиперболоида (3), через которую проходят две прямые семейства I, а такой точки, по только что доказанному, не существует).

Легко проверить, что среди прямых семейства I нет двух параллельных.

Аналогично уравнениям (5) можно было бы для любой пары чисел α', β', не равных одновременно нулю, написать систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\alpha'\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\beta'\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \beta'\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\alpha'\left(1+\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

определяющую прямую, лежащую на гиперболоиде (3): каждая точка $M=(x, y, z)$, удовлетворяющая двум уравнениям (5′), удовлетворяет и уравнению, полученному от почленного перемножения этих уравнений, и, значит, удовлетворяет уравнению (3).

Итак, уравнения (5′) также определяют семейство прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (3), зависящее от одного параметра $v=\beta':\alpha'$; это семейство мы назовем *семейством* II.

Совершенно так же, как выше, мы убеждаемся в том, что через каждую точку $M=(x, y, z)$ гиперболоида (3) проходит одна-единственная образующая семейства II.

Наконец, совместное рассмотрение уравнений (5) и (5′) (для данных $\beta:\alpha=u$ и $\beta':\alpha'=v$) позволяет установить, что каждая образующая семейства I пересекается с каждой образующей семейства II (или параллельна ей в узком смысле слова). Читателю предлагается (в виде задачи) провести относящиеся сюда рассуждения.

2. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида. Начинаем с чисто геометрического рассмотрения вопроса. Пусть дан параболоид

$$2z=\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}. \tag{8}$$

Рассмотрим аффинное преобразование

$$x'=\frac{x}{\sqrt{p}},\quad y'=\frac{y}{\sqrt{q}},\quad z'=z.$$

Тогда уравнение параболоида примет вид

$$2z'=x'^2-y'^2. \tag{9}$$

Рассматриваем сечения параболоида (9) плоскостями

$$y' = x' + c, \tag{10}$$
$$y' = -x' + c, \tag{11}$$

параллельными плоскостям $y' = \pm x'$. Подставляя (10) в (9), видим, что пересечение параболоида (9) с плоскостью (10) есть прямая

$$2z' = -2cx' - c^2, \quad y' = x' + c. \tag{12}$$

Аналогично пересечением параболоида (9) с плоскостью (11) есть прямая

$$2z' = +2cx' - c^2, \quad y' = -x' + c. \tag{13}$$

Когда c пробегает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, плоскость (10) (так же как и плоскость (11)) пройдет через все точки параболоида,

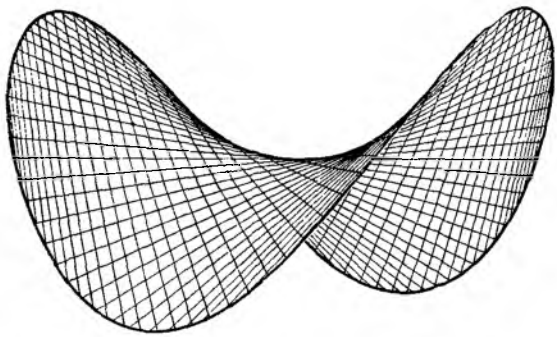


Рис. 223.

который, таким образом, оказывается покрытым двумя семействами прямых I и II, определяемыми уравнениями (12) и (13) (рис. 223). Через каждую точку M параболоида (9) проходит единственная плоскость вида (10) и единственная плоскость вида (11), а значит, и единственная прямолинейная образующая каждого из семейств I и II. При этом все образующие семейства I параллельны плоскости $y' = x'$, а все образующие семейства II параллельны плоскости $y' = -x'$.

Можно было бы получить тот же результат и для любого параболоида, заданного своим каноническим уравнением

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \tag{8}$$

(только вместо плоскостей $y' = \pm x'$ были бы рассмотрены плоскости $\frac{x}{\sqrt{p}} \pm \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$).

Прямолинейные образующие гиперболического параболоида могут быть аналитически найдены способом разложения на множители, аналогичным тому, который мы применили в случае однополостного гиперболоида. Именно, перепишем каноническое уравнение

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \tag{8}$$

гиперболического параболоида в виде

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z \tag{14}$$

и рассмотрим для каждой пары чисел α, β, не равных нулю одновременно, уравнения двух плоскостей:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) &= 2\beta z, \\ \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) &= \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Эти плоскости пересекаются по прямой, целиком лежащей на параболоиде (8). Прямые (13), каждая из которых определена отношением $\beta:\alpha$, образуют одно семейство прямолинейных образующих параболоида. Второе семейство получим, если рассмотрим (для каждой пары чисел α', β', не равных нулю одновременно) систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \alpha'\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) &= 2\beta' z, \\ \beta'\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) &= \alpha'. \end{aligned}\right\} \tag{15'}$$

Снова доказываем, что через каждую точку гиперболического параболоида (8) проходит по одной образующей каждого семейства, что две образующие, принадлежащие к разным семействам, пересекаются, а принадлежащие к одному и тому же семейству всегда скрещиваются.

Наконец, очевидно, что образующие семейства I, определяемого уравнениями (15), параллельны плоскости

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0,$$

а образующие семейства II, определяемого уравнениями (15'), параллельны плоскости

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0.$$

ГЛАВА XIX

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. I (ПЕРЕСЕЧЕНИЕ С ПЛОСКОСТЬЮ И С ПРЯМОЙ; АСИМПТОТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ; КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ; ЦЕНТР)

§ 1. Ранг и детерминант малой и большой матрицы многочлена второй степени

Рассматриваем общее уравнение поверхности второго порядка в произвольной аффинной системе координат $Oxyz$:

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0. \quad (1)$$

Как всегда, полагаем

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2. \quad (2)$$

Вводим еще следующие обозначения:

$$A_F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}, \qquad A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A_F называем *большой матрицей уравнения* (1), матрицу A_φ — *малой матрицей*. Ранги этих матриц называем соответственно *большим* и *малым рангом поверхности*, задаваемой уравнением (1), и обозначаем их соответственно через R и r; мы сейчас увидим, что эти ранги не зависят от выбора системы координат, в которой задается уравнение поверхности. Детерминанты матриц A_F и A_φ обозначаются соответственно через Δ и δ.

Мы знаем (гл. XV, § 2), что при сдвиге начала координат малая матрица, а значит, и ее детерминант не меняются.

При линейном однородном преобразовании

$$\left.\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z', \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z', \\ z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z', \end{aligned}\right\} \quad \left|\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{matrix}\right| = c \neq 0, \tag{3}$$

ранг r матрицы A_φ не меняется, а детерминант δ (как дискриминант квадратичной формы $\varphi(x, y, z)$) умножается на c^2 (гл. XIII, § 3).

Так как всякое преобразование координат сводится к сдвигу начала координат и к однородному преобразованию вида (3), то при переходе от системы координат $Oxyz$ к произвольной новой системе координат $O'x'y'z'$ ранг r матрицы A_φ не меняется, а ее детерминант δ умножается на квадрат детерминианта преобразования.

Докажем аналогичное утверждение для большого ранга R и детерминанта Δ.

Возьмем общие формулы преобразования координат:

$$\left.\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + d_1, \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + d_2, \\ z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + d_3, \end{aligned}\right\} \quad \left|\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{matrix}\right| = c \neq 0. \tag{4}$$

Наряду с многочленом $F(x, y, z)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\Phi(x, y, z, t) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \\ + 2a_1xt + 2a_2yt + 2a_3zt + a_0t^2$$

и преобразование

$$\left.\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + d_1t', \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + d_2t', \\ z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + d_3t', \\ t &= t'. \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Тогда A_F есть матрица формы $\Phi(x, y, z, t)$, а Δ — ее дискриминант. При преобразовании (4′) ранг R формы Φ остается неизменным, а ее дискриминант умножается на квадрат детерминанта преобразования (4′), т. е. на

$$\left|\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{matrix}\right|. \tag{5}$$

Мы доказали следующее предложение.

Основная лемма. *При преобразовании координат* (4) *ранги* R *и* r *матриц* A_R *и* A_0 *остаются неизменными, а их детерминанты* Δ *и* δ *умножаются на квадрат детерминанта преобразования* (4) *и, следовательно, сохраняют свой знак.*

Замечание 1. Если преобразование (4) есть сдвиг начала координат, то $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1$, а $c_{12} = c_{13} = c_{21} = c_{23} = c_{31} = c_{32} = 0$, так что детерминант (5) равен 1. Поэтому при переносе начала координат не только детерминант δ, но и детерминант Δ остается неизменным.

Замечание 2. Так как детерминант δ есть детерминант третьего порядка, то при умножении всех его элементов на -1 знак δ меняется на обратный. Зато знак детерминанта Δ не меняется при умножении его элементов (т. е. всех коэффициентов уравнения (1)) на -1, значит, и на любой вообще множитель $\lambda \neq 0$.

§ 2. Пересечение поверхности второго порядка с плоскостью

Пусть даны поверхность второго порядка и плоскость. Перейдем к такой системе координат $Oxyz$, в которой данная плоскость была бы плоскостью Oxy, т. е. имела бы уравнение

$$z = 0.$$

Запишем в этой системе координат уравнение нашей поверхности:

$$F(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0, \quad (1)$$

и будем решать его совместно с уравнением

$$z = 0. \quad (2)$$

Получим уравнение

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \quad (3)$$

Этому уравнению и удовлетворяют точки, одновременно лежащие на поверхности (1) и на плоскости (2). Мы видим, что, вообще говоря (т. е. за исключением особого случая $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, который мы сейчас отдельно разберем), уравнение (3) есть уравнение второй степени, определяющее некоторую (лежащую в плоскости $z = 0$) кривую второго порядка, которая и является пересечением данной поверхности второго порядка с данной плоскостью.

Переходим к случаю

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0.$$

Предположим, что по крайней мере один из коэффициентов a_1, a_2 отличен от нуля. В этом случае пересечение поверхности (1) с

плоскостью $z=0$ есть прямая

$$2a_1x+2a_2y+a_0=0.$$

Пусть теперь не только $a_{11}=a_{12}=a_{22}=0$, но и

$$a_1=a_2=0.$$

Если при этом и $a=0$, то уравнение поверхности (1) имеет вид

$$z(2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}z+2a_3)=0$$

— поверхность распадается на пару плоскостей:

$$z=0,\quad 2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}z+2a_3=0,$$

одной из которых является данная плоскость $z=0$. Наконец, последняя возможность состоит в том, что

$$a_{11}=a_{12}=a_{22}=a_1=a_2=0,\quad \text{но}\quad a_0\neq 0.$$

Тогда уравнение (3) приводит к противоречию: $a_0=0$ (тогда как дано, что $a\neq 0$), означающему, что нет ни одной точки (ни вещественной, ни мнимой), которая лежала бы одновременно на данной плоскости и на данной поверхности второго порядка.

Итак, доказана

Теорема 1. *При пересечении поверхности второго порядка с плоскостью могут представляться лишь следующие случаи:*

(а) *поверхность пересекается с плоскостью по кривой второго порядка;*

(б) *поверхность пересекается с плоскостью по (вещественной) прямой линии;*

(в) *поверхность распадается на пару плоскостей, одной из которых является данная плоскость (входящая, таким образом, в состав рассматриваемой поверхности);*

(г) *поверхность не имеет с плоскостью ни одной общей точки (ни вещественной, ни мнимой)* [1]).

---

[1]) Эта теорема с указанными в ней четырьмя различными случаями представляется довольно уродливой; в главе XXIII мы перейдем от обыкновенного (комплексного) пространства к проективному пространству, получаемому из обыкновенного пространства пополнением его бесконечным множеством так называемых несобственных (или бесконечно удаленных) точек, образующих в своей совокупности несобственную (или бесконечно удаленную) плоскость (с лежащими в ней несобственными, или бесконечно удаленными прямыми). Если рассматривать нашу поверхность в проективном пространстве, то случай (б) будет состоять в том, что пересечение поверхности с плоскостью является кривой второго порядка, распавшейся на пару прямых, одна из которых лежит в несобственной плоскости («ушла в бесконечность»), а случай (г) — в том, что пересечением является пара совпадающих между собою несобственных прямых. Таким образом, в проективном пространстве возможны лишь два случая: либо пересечение поверхности второго порядка с плоскостью есть кривая второго порядка, либо поверхность распадается на пару плоскостей, одной из которых является данная плоскость.

Замечание. В случае (а) кривой второго порядка, являющейся пересечением данной поверхности второго порядка с данной плоскостью, может быть

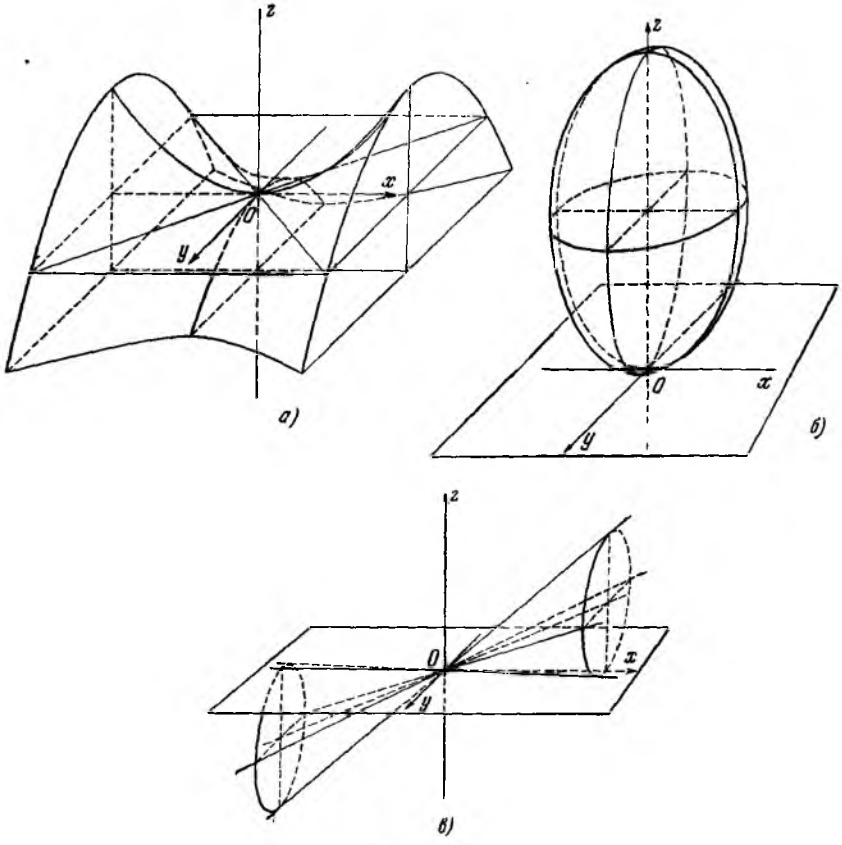


Рис. 224.

(a_1) нераспадающаяся действительная или мнимая кривая, т. е. эллипс (действительный или мнимый), гипербола или парабола;

(a_2) пара пересекающихся вещественных прямых;

(a_3) пара мнимых сопряженных прямых, имеющих единственную вещественную (общую) точку, которая и является единственной вещественной точкой, лежащей одновременно на данной поверхности второго порядка и данной плоскости;

(a_4) пара параллельных в собственном смысле вещественных или мнимых сопряженных прямых;

(a_5) пара совпадающих вещественных прямых.

Как мы увидим ниже, возможности (a_2), (a_3), (a_5) характеризуют различные случаи касания данной поверхности второго порядка с плоскостью (рис. 224).

§ 3. Пересечение поверхности второго порядка с прямой. Асимптотические направления. Касательные прямые и касательная плоскость. Особые точки поверхности второго порядка

То, что говорилось в § 1 главы XVII о пересечении алгебраической кривой с прямой, можно было бы — с несущественными и очевидными изменениями — повторить и о пересечении алгебраической поверхности

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1_A)$$

с прямой

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha t, \\ y &= y_0 + \beta t, \\ z &= z_0 + \gamma t. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Как всегда, мы будем предполагать, что и поверхность (1_A), и прямая (2) являются вещественными; в соответствии с этим все коэффициенты в уравнениях (1_A) и (2) всегда предполагаются вещественными.

Мы ограничимся случаем, когда данная поверхность (1_A) — второго порядка, т. е. когда ее уравнение есть

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0. \qquad (1)$$

Старшие члены многочлена $F(x, y, z)$ образуют квадратичную форму

$$\varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2. \qquad (3)$$

Мы будем пользоваться еще следующими обозначениями, которых будем постоянно придерживаться не только в этой главе, но и в последующих [1]):

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1, \\ F_2(x, y, z) &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2, \\ F_3(x, y, z) &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

---

[1]) Читатель, знающий, что такое частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ функции $F(x, y, z)$ от трех переменных, сразу заметит, что $F_1(x, y, z) = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}$, $F_2(x, y, z) = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}$, $F_3(x, y, z) = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z}$.

Для нахождения точек пересечения поверхности (1) с прямой (2) подставим (2) в (1); после приведения подобных членов получим уравнение второй степени относительно t, а именно:

$$At^2+2Bt+C=0, \tag{5}$$

где, как легко проверить,

$$\left.\begin{aligned} A&=\varphi(\alpha,\beta,\gamma)\equiv a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2+2a_{13}\alpha\gamma+2a_{23}\beta\gamma+a_{33}\gamma^2,\\ B&=F_1(x_0,y_0,z_0)\,\alpha+F_2(x_0,y_0,z_0)\,\beta+F_3(x_0,y_0,z_0)\,\gamma,\\ C&=F(x_0,y_0,z_0).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Уравнение (5) есть квадратное уравнение, за исключением того случая, когда

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=0. \tag{7}$$

Вектор $\mathbf{u}=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, *удовлетворяющий условию* (7), *называется вектором асимптотического направления или просто асимптотическим вектором поверхности* (1); *прямая, направляющий вектор которой является асимптотическим, называется прямой асимптотического направления для данной поверхности.*

Замечание. Повторяя в точности рассуждения § 3 главы XVII, убеждаемся в том, что вопрос о том, является ли данное направление асимптотическим или нет для данной поверхности второго порядка, зависит только от этой поверхности и от данного направления и не зависит от системы координат, в которой задано уравнение этой поверхности.

Если прямая (2) имеет неасимптотическое направление, то уравнение (5) квадратное и имеет два корня t_1, t_2 — вещественные различные, или мнимые сопряженные, или совпадающие (вещественные). Подставляя эти значения t_1 и t_2 в равенства (2), получим две точки пересечения (вещественные или мнимые, быть может, совпадающие) прямой (2) и поверхности (1). Итак:

Если прямая (2) *имеет неасимптотическое направление, то она пересекает поверхность* (1) *в двух точках — различных (действительных или мнимых сопряженных) или совпадающих (действительных), получающихся, если подставить в* (2) *любой из двух корней* $t=t_1$ *или* $t=t_2$ *квадратного уравнения* (5).

Если обе точки пересечения прямой (2) с поверхностью (1) сливаются в одну, т. е. уравнение (5) имеет совпадающие корни, то прямая (2) называется *касательной* к поверхности.

В этом случае за точку $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ прямой (2) возьмем точку, лежащую на поверхности (эта точка и будет точкой прикосновения прямой к поверхности). Тогда $C=F(x_0,y_0,z_0)=0$ и уравнение (5) принимает вид $At^2+2Bt=0$, т. е.

$$t(At+2B)=0.$$

Один его корень есть $t_1 = 0$, второй $t_2 = -\frac{2B}{A}$; для того чтобы он тоже был равен нулю, надо, чтобы было $B = 0$, т. е.

$$F_1(x_0, y_0, z_0)\,\alpha + F_2(x_0, y_0, z_0)\,\beta + F_3(x_0, y_0, z_0)\,\gamma = 0. \qquad (8)$$

Это и есть условие, которому должен удовлетворять направляющий вектор $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ прямой (2), проходящей через точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ поверхности (1), чтобы эта прямая была касательной (и тогда она будет касательной в точке M_0).

Имеется бесконечное множество прямых, проходящих через точку M_0, с направляющими векторами, удовлетворяющими условию (8), т. е. бесконечное множество касательных к поверхности (1) в данной ее точке M_0. Пусть $M = (x, y, z)$ — произвольная точка любой из этих прямых. Тогда $\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ есть направляющий вектор этой прямой, и он удовлетворяет уравнению

$$F_1(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_2(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_3(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \qquad (9)$$

Итак, все точки $M = (x, y, z)$ всех касательных, проведенных к поверхности (1) в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, удовлетворяют уравнению (9); уравнение (9) — первой степени, следовательно, это уравнение некоторой плоскости, проходящей через точку M_0. Плоскость эта называется *касательной плоскостью* к поверхности (1) в точке M_0: она несет на себе все прямые, касающиеся поверхности (1) в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. *Уравнение* (9) *и есть уравнение касательной плоскости к поверхности* (1) *в ее точке* $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. В развернутом виде это уравнение записывается так:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1)\,x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2)\,y + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_3)\,z + (a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_0) = 0. \qquad (9')$$

В самом деле, уравнение (9) может быть записано в виде

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1)\,x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2)\,y + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_3)\,z - (a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0z_0 + 2a_2y_{30}z_0 + a_{33}z_0^2 + a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0) = 0.$$

Но в силу равенства

$$a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0z_0 + 2a_{23}y_0z_0 + a_{33}z_0^2 + 2a_1x_0 + 2a_2y_0 + 2a_3z_0 + a_0 = 0$$

имеем

$$-(a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0z_0 + 2a_{23}y_0z_0 + a_{33}z_0^2 + a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0) = a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_0,$$

откуда и следует уравнение (9′).

Уравнение (9) может быть переписано в виде

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x-x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y-y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z-z_0) = 0. \qquad (9'')$$

где через $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0$ и т. д. обозначены значения соответствующих частных производных функции $F(x, y, z)$ в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$; в этом виде в курсе анализа записывается уравнение касательной плоскости к поверхностям, значительно более общим, чем поверхности второго порядка (и алгебраические поверхности вообще).

Особые точки поверхности второго порядка. Возникает вопрос: *когда уравнение* (9) *касательной плоскости становится неопределенным?*

Очевидно, это происходит лишь тогда, когда одновременно

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \equiv a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1 = 0, \\ F_2(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \equiv a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2 = 0, \\ F_3(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \equiv a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_3 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

причем в то же время

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0. \qquad (1_0)$$

Но

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0, z_0) \equiv (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1)\,x_0 + \\ + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2)\,y_0 + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_3)\,z_0 + \\ + a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_0. \end{aligned} \qquad (11)$$

Если выполнено (10), то тождество (11) превращается в

$$F(x_0, y_0, z_0) \equiv a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_0,$$

а (1_0) — в

$$a_1x_0 + a_{20}y + a_3z_0 + a_0 = 0. \qquad (12)$$

Это равенство вместе с равенствами (10) показывают, что четверка чисел $(x_0, y_0, z_0, 1)$ образует ненулевое решение системы уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1t &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2t &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3t &= 0, \\ a_1x + a_2y + a_3z + a_0t &= 0. \end{aligned}$$

Значит,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}=0. \tag{13}$$

Поверхности второго порядка, данные уравнением (1), *коэффициенты которого удовлетворяют условию* (13), *называются вырождающимися, а точка* $M_0=(x_0, y_0, z_0)$, *удовлетворяющая уравнениям* (1_0) *и* (10), *называется особой точкой поверхности* (1).

Из доказанного следует, что только у вырождающихся поверхностей могут быть особые точки. Подробнее мы рассмотрим весь этот вопрос в § 5 главы XXIII.

Итак, только в случае вырождающейся поверхности второго порядка и только в ее особой точке $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ касательная плоскость к поверхности (1) оказывается неопределенной. Попутно мы доказали, что *при выполнении условий* (10) *условия* (1_0) *и* (12) *эквивалентны между собою.*

§ 4. Асимптотические направления, конус асимптотических направлений, прямолинейные образующие поверхностей второго порядка

Пусть вектор $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ есть вектор асимптотического направления для поверхности второго порядка

$$F(x, y, z)=0, \tag{1}$$

т. е. пусть $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)=0$. Прямая

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+\alpha t,\\ y&=y_0+\beta t,\\ z&=z_0+\gamma t \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

имеет вектор $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ своим направляющим вектором, т. е. есть прямая асимптотического направления. Тогда коэффициент A в уравнении (5) предыдущего параграфа равен нулю, и само это уравнение приобретает вид

$$2Bt+C=0. \tag{3}$$

Возможны следующие случаи:

1° $B\neq 0$; тогда уравнение (3), т. е. уравнение (5) предыдущего параграфа, есть уравнение первой степени; единственный его корень определяет единственную точку пересечения поверхности (1) с прямой (2).

2° $B=0$, $C\neq 0$; уравнение (3) противоречиво (так как принимает вид $C=0$ при $C\neq 0$), уравнения (1) и (2) несовместны, прямая (2) не имеет с поверхностью (1) ни одной общей точки, ни действительной, ни мнимой. В этом случае прямая (2) называется *асимптотой поверхности* (1).

3° $B=C=0$; уравнение (3) обращается в тождество $0=0$, оно удовлетворяется при всех значениях t, все точки прямой (2) принадлежат поверхности (1), прямая (2) есть прямолинейная образующая поверхности (1).

Доказана следующая

Теорема 2. *Прямая* (2), *имеющая асимптотическое направление по отношению к поверхности* (1) *второго порядка, может находиться в одном из следующих положений:*

1° *Она имеет с поверхностью* (1) *единственную и тогда непременно вещественную общую точку.*

2° *Она является асимптотой поверхности* (*т. е. не имеет с ней ни одной общей точки, ни вещественной, ни мнимой*).

3° *Она является прямолинейной образующей поверхности* (*т. е. всеми своими точками лежит на поверхности* (1)).

Посмотрим теперь, каковы асимптотические направления поверхностей различных видов, определенных в предыдущей главе.

В случае эллипсоида, заданного своим каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, асимптотические направления $\{\alpha:\beta:\gamma\}$ определяются из уравнения $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=0$; все эти направления являются мнимыми.

Асимптотические направления однополостного и двуполостного гиперболоидов, заданных их каноническими уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \text{соответственно} \quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{4}$$

суть направления образующих их общего действительного асимптотического конуса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{5}$$

Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \qquad p>0, \quad q>0, \tag{6}$$

имеет асимптотические направления $\{\alpha:\beta:\gamma\}$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\alpha^2}{p}+\frac{\beta^2}{q}=0;$$

все эти направления мнимые, за исключением одного, а именно направления $\{0: 0: \gamma\}$, $\gamma \neq 0$, оси z канонической для данного параболоида системы координат. Асимптотические направления гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \qquad p > 0, \quad q > 0, \tag{7}$$

определяются условием

$$\frac{\alpha^2}{p} - \frac{\beta^2}{q} = 0;$$

это всевозможные направления, коллинеарные какой-либо одной (или обеим) из плоскостей

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \qquad \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0. \tag{8}$$

Все эти направления действительны.

Все прямые, являющиеся образующими асимптотического конуса (5) обоих гиперболоидов (4), суть асимптоты каждого из этих гиперболоидов; любая другая прямая асимптотического направления пересекает двуполостный гиперболоид

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

в единственной точке; в случае однополостного гиперболоида имеются, кроме того, и прямолинейные образующие (известные нам из § 6 предыдущей главы).

Все действительные прямые асимптотического направления по отношению к эллиптическому параболоиду (6) параллельны между собою (они параллельны оси z) и пересекают параболоид в единственной точке; читатель легко проверит это. У эллиптического параболоида нет ни действительных асимптот, ни (как мы уже знаем из предыдущей главы) действительных прямолинейных образующих.

Прямая, имеющая асимптотическое направление по отношению к гиперболическому параболоиду (7), параллельна одной из двух плоскостей (8); она или является прямолинейной образующей (см. гл. XVIII, § 6), или пересекает параболоид в одной точке, или, наконец, не имеет с ним ни одной общей точки (является его асимптотой).

Асимптотические направления конуса суть направления его образующих. Асимптот конус не имеет. Всякая прямая, имеющая по отношению к конусу асимптотическое направление и не являющаяся его образующей, пересекает его в одной точке.

Переходим к асимптотическим направлениям цилиндрических поверхностей.

1° Асимптотические направления эллиптического цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

суть направления $\{\alpha:\beta:\gamma\}$, удовлетворяющие условию

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=0;$$

среди них действительным является лишь направление $\{0:0:\gamma\}$, $\gamma\neq 0$, оси z канонической системы координат.

2° Асимптотические направления гиперболического цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

суть все направления, параллельные одной (или обеим) из двух плоскостей

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0, \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0.$$

3° Асимптотические направления параболического цилиндра

$$y^2=2px$$

суть все направления, параллельные плоскости $y=0$. Прямая, имеющая асимптотическое направление по отношению к данному цилиндру, может находиться в любом из трех положений, предусмотренных теоремой 2: эта прямая может быть образующей цилиндра, она может быть параллельной образующей и не иметь с цилиндром ни одной общей точки, наконец (в случае гиперболического и параболического цилиндров), она может пересекать поверхность в единственной точке.

Асимптотические направления поверхности, распавшейся на пару плоскостей, суть направления, параллельные одной из этих плоскостей (или им обеим).

Если все векторы, имеющие относительно данной поверхности (1) второго порядка асимптотические направления, прилагать к какой-нибудь точке M_0, за которую удобнее всего брать начало данной системы координат [1]), то эти векторы (и их концы) заполнят коническую поверхность с вершиной M_0; если $M_0=(0, 0, 0)$, то уравнение этой поверхности есть $\varphi(x, y, z)=0$. Эта коническая поверхность называется *конусом асимптотических направлений данной поверхности.*

Если поверхность центральная, то конус асимптотических направлений с вершиной в центре данной поверхности называется просто *асимптотическим конусом поверхности.* Иногда это наименование употребляется и как сокращение наименования «конус асимптотических направлений», что, впрочем, достойно порицания.

Асимптотический конус гиперболоидов известен нам уже из главы XVIII; асимптотическим конусом эллипсоида является мнимый конус,

[1]) Относительно которой данная поверхность имеет уравнение (1).

заданный (в канонической для данного эллипсоида системе координат) уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$. Конус асимптотических направлений параболоида

$$2z=\frac{x^2}{p}\pm\frac{y^2}{q}$$

распадается в пару пересекающихся плоскостей, мнимых и сопряженных:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=0$$

для эллиптического параболоида, и действительных:

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0$$

для гиперболического параболоида.

Асимптотический конус конической поверхности совпадает с самой этой поверхностью. Наконец, конус асимптотических направлений

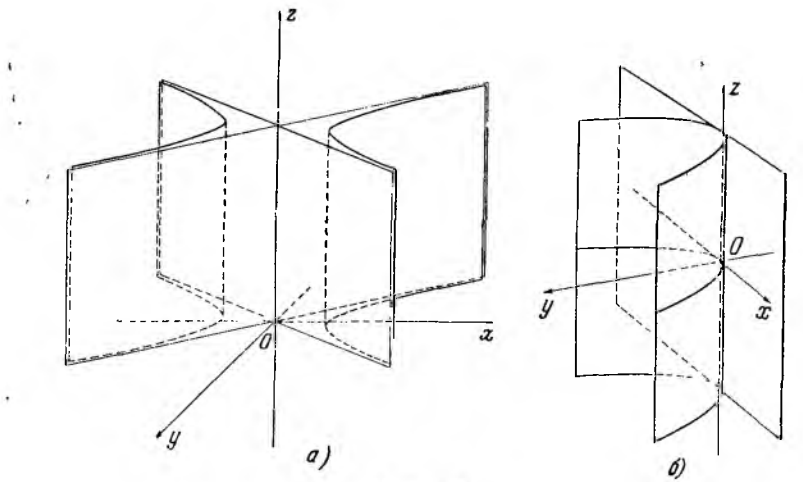


Рис. 225

цилиндрической поверхности есть пара плоскостей — мнимых и сопряженных (пересекающихся по действительной прямой), если цилиндр эллиптический; пересекающихся действительных, если цилиндр гиперболический (рис. 225*а*); совпадающих (и действительных), если цилиндр параболический (рис. 225*б*).

Наиболее интересными среди прямых, имеющих по отношению к данной поверхности асимптотическое направление, являются прямолинейные образующие этой поверхности.

Прямая (2), проходящая через точку $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ поверхности (1), является образующей этой поверхности, если для нее выполнены условия $A=0$, $B=0$ (условие $C=0$ выполнено автоматически: оно означает, что точка M_0 лежит на поверхности (1)).

Первое из этих условий, т. е. $A=0$, или

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma)=0, \tag{9}$$

означает, что прямая (2) имеет асимптотическое направление; второе условие $B=0$, т. е.

$$F_1(x_0, y_0, z_0)\alpha+F_2(x_0, y_0, z_0)\beta+F_3(x_0, y_0, z_0)\gamma=0, \tag{10}$$

означает, что прямая (2) лежит в касательной плоскости к поверхности (1) в ее точке M_0. Итак,

Теорема 3. *Прямолинейные образующие поверхности* (1), *проходящие через точку* M_0 *этой поверхности, суть не что иное, как прямые асимптотического направления, проходящие через точку* M_0 *и лежащие в касательной плоскости к поверхности в этой ее точке.*

Замечание 1. Так как мы рассматриваем прямолинейные образующие, проходящие через данную точку M_0 поверхности, то для их нахождения нам надо только определить их направляющие векторы. Но эти векторы должны удовлетворять условиям (10) и (9). Из уравнения (10) можно, вообще говоря[1]), одну какую-нибудь координату, например γ, выразить через две другие — α и β и подставить полученные для нее выражения в (9); после этого квадратное уравнение (9) даст нам два значения (действительных или мнимых) для отношения $\alpha:\beta$; этим и дан способ фактического нахождения прямолинейных образующих. Так как они лежат в касательной плоскости, то они и составляют ту (распадающуюся) кривую второго порядка, по которой касательная плоскость в точке M_0 пересекается с поверхностью (1).

Рассуждение это делается несостоятельным, если одно из двух уравнений (9) и (10) является следствием другого, в частности, если уравнение (10) обращается в тождество, что имеет место, если поверхность (1) есть конус, а точка $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ — его вершина: тогда

$$F_1(x_0, y_0, z_0)=F_2(x_0, y_0, z_0)=F_3(x_0, y_0, z_0)=0.$$

Если же поверхность распадается на пару пересекающихся плоскостей, то уравнение (9) эквивалентно двум линейным однородным уравнениям, определяющим двумерные векторные многообразия, соответствующие тем плоскостям, на которые распадается поверхность (1). Если вектор $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ принадлежит векторному многообразию, соответствующему той

[1]) То есть если не наступают исключительные случаи, о которых будет сказано ниже в этом же замечании.

плоскости, в которой лежит точка (x_0, y_0, z_0), то уравнение (10) есть следствие уравнения (9). В противном случае уравнения (9) и (10) несовместны[1].

Если поверхность нераспадающаяся и (в случае, когда она конус) точка M_0 не есть вершина конуса, то все обстоит благополучно, в чем читатель легко может убедиться, перейдя к каноническим уравнениям соответствующих поверхностей. Подробнее об этом будет сказано в § 5 главы XXIII. Полное исследование случая невырождающейся поверхности дается следующим предложением.

Теорема 4. *Касательная плоскость к невырождающейся поверхности второго порядка в данной ее точке M_0 пересекается с этой поверхностью по паре различных прямых. Эти прямые и являются единственными двумя образующими поверхности, проходящими через точку M_0.*

Доказательство. Возьмем систему координат, началом которой является данная точка M_0, а плоскостью $O'x'y'$ — касательная плоскость к нашей поверхности в точке M_0. Так как начало координат $M_0 \equiv O'$ лежит на поверхности, то ее уравнение в выбранной системе координат будет иметь вид

$$F'(x', y', z') \equiv a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x'z' + 2a'_{23}y'z' + a'_{33}z'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + 2a'_3z' = 0$$

(свободный член равен нулю). Уравнение касательной плоскости в точке $M = (0, 0, 0)$ имеет вид

$$F'_1(0, 0, 0)\,x' + F'_2(0, 0, 0)\,y' + F'_3(0, 0, 0)\,z' = 0.$$

Но эта плоскость есть плоскость $z' = 0$. Значит,

$$F'_1(0, 0, 0) = 0, \quad F'_2(0, 0, 0) = 0. \tag{11}$$

Так как $F'_1(0, 0, 0) = a'_1$, $F'_2(0, 0, 0) = a'_2$, то равенства (11) означают, что $a'_1 = a'_2 = 0$, так что уравнение поверхности имеет вид

$$F'(x', y', z') \equiv a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x'z' + 2a'_{23}y'z' + a'_{33}z'^2 + 2a'_3z' = 0. \tag{1'}$$

Решая его совместно с уравнением $z' = 0$, получаем для кривой пересечения нашей поверхности с (касательной) плоскостью $z' = 0$ уравнение

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 = 0. \tag{12}$$

Это — уравнение распадающейся кривой второго порядка. Если бы эта кривая была парой совпадающих прямых, то было бы

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

[1]) Случай, когда поверхность (1) есть пара параллельных или слившихся поверхностей, рекомендуем разобрать читателю самостоятельно.

Но тогда

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_3 \\ 0 & 0 & a'_3 & 0 \end{vmatrix} = -a'^2_3 \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} = 0$$

и поверхность (1), вопреки предположению, была бы вырождающейся. Теорема 4 доказана. Из нее вытекает такое

Следствие. *Касательная плоскость к невырождающейся поверхности второго порядка в произвольной ее точке M_0 пересекает эту поверхность по паре различных прямых, действительных или мнимых сопряженных, а именно по паре проходящих через точку M_0 прямолинейных образующих данной поверхности. Эти прямые имеют асимптотические для данной поверхности направления. Они действительны, если поверхность есть однополостный гиперболоид или гиперболический параболоид; они являются мнимыми для двуполостного гиперболоида и эллиптического параболоида, а также и для эллипсоидов.*

Замечание 2. Аналитическим критерием для того, будут ли прямолинейные образующие, проходящие через неособую точку вещественной нераспадающейся поверхности, действительными различными, мнимыми сопряженными или, наконец, действительными совпадающими, может служить знак детерминанта Δ: при $\Delta > 0$ образующие действительны, при $\Delta < 0$ они мнимые, при $\Delta = 0$ они совпадают.

В самом деле, из инвариантности знака детерминанта Δ многочлена второй степени с тремя переменными относительно перехода от одной аффинной системы координат к другой (§ 1) вытекает, что если $\Delta \gtreqless 0$, то соответственно $\Delta' \gtreqless 0$. Поэтому, если $\Delta > 0$, то и

$$\Delta' = -a'^2_3 \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} > 0, \text{ и, следовательно, } \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} < 0.$$

Линия пересечения поверхности (1′) с касательной плоскостью $z' = 0$, определяемая уравнением (12), есть пара прямых, проходящих через вещественную точку $O' \equiv M_0$, и так как $\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} < 0$, то в этом случае линия (12) распадается на пару вещественных прямых.

Точно так же покажем, что если Δ, а следовательно и Δ', — число отрицательное, то уравнение (12) определяет пару мнимых прямых.

Предположим, наконец, что $\Delta = 0$ и, значит, $\Delta' = 0$; тогда из равенства $\Delta' = -a_3'^2 \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}$ вытекает, что $\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} = 0$, так как если бы $\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, $a'_3 = 0$, то уравнение (1′) определяло бы коническую поверхность с вершиной в начале координат O', т. е. в точке M_0, а мы предположили, что точка M_0 — неособая, следовательно, $\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} = 0$, и уравнение (12) определяет пару слившихся прямых.

Существенно отметить, что вопрос о том, является ли пересечение нераспадающейся поверхности второго порядка с касательной плоскостью к ней в данной неособой точке парой действительных (различных или совпадающих) или мнимых прямых, решается для всех неособых точек поверхности одинаково; мы увидим, что решение этого вопроса вполне определяется аффинным[1]) классом данной поверхности.

Геометрическая характеристика асимптотических и неасимптотических направлений для данной поверхности второго порядка. Совершенно так же, как в случае кривых, мы доказываем следующее предложение, аналогичное теореме 6 главы XVII (§ 5).

Теорема 5. *Пусть*

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

— поверхность второго порядка, не все точки которой лежат в одной плоскости[2]). *Если* $\{\alpha: \beta: \gamma\}$ *— направление, неасимптотическое для данной поверхности, то существует прямая этого направления, содержащая ровно две различные точки поверхности* (1). *Напротив, всякая прямая, имеющая асимптотическое для данной поверхности* (1) *направление* $\{\alpha: \beta: \gamma\}$, *или целиком состоит из точек, лежащих на поверхности* (1), *или же содержит не более одной точки, лежащей на поверхности* (1).

Надо доказать лишь утверждение, касающееся неасимптотического направления $\{\alpha: \beta: \gamma\}$. Через каждую точку (x_0, y_0, z_0), лежащую на поверхности (1), проводим прямую

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha t, \\ y &= y_0 + \beta t, \\ z &= z_0 + \gamma t \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

[1]) И даже проективным.

[2]) Это оговорка не бессодержательна: поверхность второго порядка, являющаяся парой совпадающих между собою плоскостей, вся целиком лежит в одной плоскости (с которой и совпадает). Этот случай мы и исключаем в формулировке теоремы 5.

направления $\{\alpha: \beta: \gamma\}$. Требуется доказать, что не все эти прямые являются касательными к поверхности (1). Предположим противное: пусть каждая прямая (2) касается поверхности (1) в соответствующей точке $\{x_0, y_0, z_0\}$. Тогда имеет место равенство

$$B \equiv F_1(x_0, y_0, z_0)\alpha + F_2(x_0, y_0, z_0)\beta + F_3(x_0, y_0, z_0)\gamma \equiv$$
$$\equiv (a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma)x_0 + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma)y_0 +$$
$$+ (a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma)z_0 + (a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma) = 0.$$

Среди коэффициентов $a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma$, $a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma$, $a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma$ при x_0, y_0, z_0 по крайней мере один отличен от нуля; в противном случае мы бы имели одновременно

$$a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0,$$
$$a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma = 0,$$
$$a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma = 0.$$

Умножая эти равенства соответственно на α, β, γ и складывая, мы бы получили

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + 2a_{13}\alpha\gamma + 2a_{23}\beta\gamma + a_{33}\gamma^2 = 0,$$

т. е. направление $\{\alpha: \beta: \gamma\}$ было бы, вопреки нашим предположениям, асимптотическим.

Итак, равенство

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma)x_0 + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma)y_0 +$$
$$+ (a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma)z_0 + (a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma) = 0 \quad (13)$$

представляет собою уравнение первой степени относительно x_0, y_0, z_0, которому удовлетворяют все точки x_0, y_0, z_0, лежащие на поверхности (1). Все эти точки лежат, таким образом, на плоскости, определяемой уравнением (13), — вопреки предположению. Теорема доказана.

§ 5. Центр поверхности второго порядка

Пусть снова даны: произвольная аффинная система координат $Oxyz$, поверхность второго порядка с уравнением

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

и прямая

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha t, \\ y &= y_0 + \beta t, \\ z &= z_0 + \gamma t, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

неасимптотического направления.

Точки пересечения прямой (2) с поверхностью (1) суть точки $M_1=(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2=(x_2, y_2, z_2)$, где

$$x_1=x_0+\alpha t_1, \quad y_1=y_0+\beta t_1, \quad z_1=z_0+\gamma t_1,$$
$$x_2=x_0+\alpha t_2, \quad y_2=y_0+\beta t_2, \quad z_2=z_0+\gamma t_2,$$

а t_1 и t_2 суть корни квадратного уравнения

$$At^2+2Bt+C=0, \tag{3}$$

в котором коэффициенты A, B, C суть

$$\left.\begin{aligned} A&=\varphi\{\alpha, \beta, \gamma\},\\ B&=F_1(x_0, y_0, z_0)\alpha+F_2(x_0, y_0, z_0)\beta+F_3(x_0, y_0, z_0)\gamma,\\ C&=F(x_0, y_0, z_0),\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и, как всегда,

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_0, y_0, z_0)&=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_1,\\ F_2(x_0, y_0, z_0)&=a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_2,\\ F_3(x_0, y_0, z_0)&=a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_3.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Точка $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ является серединой отрезка $\overline{M_1M_2}$ тогда и только тогда, когда [1]) одновременно

$$\alpha\frac{t_1+t_2}{2}=0, \quad \beta\frac{t_1+t_2}{2}=0, \quad \gamma\frac{t_1+t_2}{2}=0,$$

т. е. (так как среди чисел α, β, γ по крайней мере одно отлично от нуля) когда $t_1+t_2=0$.

Но $t_1+t_2=-\dfrac{2B}{A}$, следовательно:

Тогда и только тогда точка $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ есть середина отрезка $\overline{M_1M_2}$, когда $B=0$, т. е. когда

$$F_1(x_0, y_0, z_0)\alpha+F_2(x_0, y_0, z_0)\beta+F_3(x_0, y_0, z_0)\gamma=0. \tag{6}$$

Теперь возникает вопрос: нет ли такой точки $M_0=(x_0, y_0, z_0)$, которая являлась бы серединой всякой хорды, через нее проходящей? *Заметим, что такой точкой M_0 является всякий центр симметрии нашей поверхности (если он существует).*

Итак, мы ищем те точки $M_0=(x_0, y_0, z_0)$, для которых условие (6) выполняется при любом выборе неасимптотического направления $\alpha:\beta:\gamma$.

Докажем, что для искомых точек $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ должны одновременно удовлетворяться равенства

$$F_1(x_0, y_0, z_0)=0, \quad F_2(x_0, y_0, z_0)=0, \quad F_3(x_0, y_0, z_0)=0. \tag{7}$$

[1]) Ср. гл. XVII, § 6.

Лемма. Для всякой поверхности второго порядка (1) *можно найти три неасимптотических направления, не компланарных между собою.*

В самом деле, рассмотрим множество всех точек $M=(x, y, z)$, удовлетворяющих уравнению

$$\varphi(x, y, z) \equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2=0. \quad (8)$$

Точки $M=(x, y, z)$, удовлетворяющие этому уравнению, и только они обладают тем свойством, что вектор $\overrightarrow{OM}=\{x, y, z\}$ имеет асимптотическое направление.

В плоскости $z=1$ уравнение (8) определяет кривую второго порядка

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \quad (9)$$

(быть может, если $a_{11}=a_{12}=a_{22}=0$, вырождающуюся в прямую).

Возьмем на плоскости $z=1$ три неколлинеарные точки $M_1=(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $M_2=(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $M_3=(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, не лежащие на кривой (9). Тогда $\overrightarrow{OM_1}=\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, $\overrightarrow{OM_2}=\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, $\overrightarrow{OM_3}=\{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$ дадут нам три некомпланарных неасимптотических направления. Лемма доказана.

Итак, пусть $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, $\{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$ — три некомпланарных направления, не асимптотических по отношению к поверхности (1). Для каждого из них должно, по предположению, выполняться равенство (6), т. е. должно быть одновременно

$$\left.\begin{aligned} &F_1(x_0, y_0, z_0)\alpha_1+F_2(x_0, y_0, z_0)\beta_1+F_3(x_0, y_0, z_0)\gamma_1=0,\\ &F_1(x_0, y_0, z_0)\alpha_2+F_2(x_0, y_0, z_0)\beta_2+F_3(x_0, y_0, z_0)\gamma_2=0,\\ &F_1(x_0, y_0, z_0)\alpha_3+F_2(x_0, y_0, z_0)\beta_3+F_3(x_0, y_0, z_0)\gamma_3=0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Но векторы $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, $\{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$ не компланарны, т. е. в матрице

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

строки, а значит, и столбцы линейно независимы, а это значит, что в равенствах (10) коэффициенты $F_1(x_0, y_0, z_0)$, $F_2(x_0, y_0, z_0)$, $F_3(x_0, y_0, z_0)$ должны равняться нулю. Утверждение доказано: всякий центр симметрии $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ поверхности (1) удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} &F_1(x_0, y_0, z_0)=0,\\ &F_2(x_0, y_0, z_0)=0,\\ &F_3(x_0, y_0, z_0)=0 \end{aligned}$$

или, в развернутом виде,

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1 &= 0,\\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2 &= 0,\\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Докажем теперь обратное предложение:

Всякая точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнениям (11), *есть центр симметрии поверхности* (1).

Для доказательства вспомним (гл. XV, § 2), что при замене переменных

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0,$$

соответствующей перенесению начала координат в точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, многочлен $F(x, y, z)$ переходит в многочлен $F'(x', y', z') \equiv \varphi(x', y', z') + 2a_1'x' + 2a_2'y' + 2a_3'z' + a_0'$, в котором коэффициенты a_1', a_2', a_3', a_0' суть

$$a_1' = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1, \quad a_2' = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2,$$
$$a_3' = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_3, \quad a_0' = F(x_0, y_0, z_0).$$

Итак, если, сохраняя единичные векторы системы координат $Oxyz$, мы перенесем ее начало в точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0) = O'$, удовлетворяющую уравнениям (11), то в полученной таким образом новой системе координат $O'x'y'z'$ уравнение поверхности (1) будет

$$F'(x', y', z') \equiv a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + a_{33}z'^2 + a_0' = 0, \qquad (1')$$

где $a_0' = F(x_0, y_0, z_0)$. Из этого уравнения ясно, что новое начало координат O', т. е. точка M_0, есть центр симметрии поверхности (1'). Утверждение доказано.

Заметим, что уравнения (11) решаются однозначно тогда и только тогда, когда

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

т. е. дискриминант квадратичной формы $\varphi(x, y, z)$ отличен от нуля. Поверхности, удовлетворяющие этому условию, принято называть *центральными: это те поверхности второго порядка, которые имеют центр симметрии, и притом только один.*

Пусть поверхность (1) является центральной, т. е. пусть $\delta \neq 0$ (или, что то же, $r = 3$), а значит, поверхность (1) имеет единственный центр $O' = (x_0, y_0, z_0)$. Положим $a_0' = F(x_0, y_0, z_0)$ и перенесем начало координат в точку $O' = (x_0, y_0, z_0)$. В полученной таким

образом новой системе координат $O'x'y'z'$ (единичные векторы которой суть те же, что и в первоначальной системе $Oxyz$) уравнение (1) нашей поверхности принимает вид

$$F'(x',\ y',\ z') \equiv a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x'z' + \\ + 2a_{23}y'z' + a_{33}z'^2 + a'_0 = 0. \quad (1')$$

Заметим, что большой детерминант $\Delta' = \Delta$ многочлена $F'(x', y', z')$ есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a'_0 \end{vmatrix} = a'_0\delta,$$

т. е.

$$a'_0 = \frac{\Delta}{\delta} = F(x_0,\ y_0,\ z_0). \quad (12)$$

Итак, в любой системе аффинных координат, начало которой есть единственный центр центральной поверхности (1), уравнение этой поверхности имеет вид

$$F'(x',\ y',\ z') \equiv \varphi(x',\ y',\ z') + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

где

$$\varphi(x', y', z') = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + a_{33}z'^2.$$

Если $\Delta \neq 0$, то и $a'_0 = \frac{\Delta}{\delta} = F(x_0,\ y_0,\ z_0) \neq 0$. Разделив с самого начала обе части уравнения (1) на $-F(x_0,\ y_0,\ z_0)$, можем предположить, что $a'_0 = -1$, т. е. что уравнение (1') имеет вид

$$\varphi(x',\ y',\ z') \equiv a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x'z' + \\ + 2a_{23}y'z' + a_{33}z'^2 = 1.$$

Если же $\Delta = 0$, то уравнение (1') имеет вид

$$\varphi(x',\ y',\ z') \equiv a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x'z' + \\ + 2a_{23}y'z' + a_{33}z'^2 = 0.$$

В нецентральном случае, т. е. в случае $\delta = 0$, ранг r матрицы

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

квадратичной формы не превосходит 2. В этом случае уравнения (11) либо несовместны, и тогда поверхность не имеет ни одного центра, либо система этих уравнений совместна, и тогда точки, являющие-

ся решениями, заполняют целую прямую (при $r=2$) или целую плоскость (при $r=1$).

Выясним, наконец, когда центр (или один из центров) $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ поверхности (1) лежит на самой этой поверхности. Для этого нужно, чтобы кроме равенств (11) имело место еще и равенство $F(x_0, y_0, z_0)=0$. Как было установлено в § 3, замечание на стр. 513, последнее равенство при выполнении равенств (11) эквивалентно равенству $a_1x_0+a_2y_0+a_3z_0+a_0=0$. Другими словами, необходимое и достаточное условие для того, чтобы точка $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ была лежащим на поверхности (1) центром этой поверхности, заключается в том, чтобы координаты точки удовлетворяли системе четырех уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_1&=0,\\ a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_2&=0,\\ a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_3&=0,\\ a_1x_0+a_2y_0+a_3z_0+a_0&=0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Как мы уже напоминали в § 3, система этих уравнений совместна, лишь когда равен нулю детерминант

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix},$$

т. е. когда поверхность (1) является вырожденной. Точка $M_0=(x_0, y_0, z_0)$, удовлетворяя уравнениям (13), есть особая точка поверхности (см. конец § 3). Итак, *лежащий на (вырожденной) поверхности центр ее является особой точкой поверхности*[1]).

Мы увидим в следующей главе, что особые точки имеются лишь у следующих поверхностей второго порядка:

1) Конус: единственная особая точка, являющаяся вместе с тем единственным центром конуса, есть его вершина.

2) Пара пересекающихся плоскостей: прямая пересечения этих плоскостей есть вместе с тем прямая центров распавшейся поверхности, совпадающая с множеством ее особых точек.

3) Поверхность, являющаяся парой совпадающих плоскостей, вся состоит из особых точек: каждая из них есть центр поверхности.

[1]) Мы видели в § 4, что касательная плоскость в особой точке поверхности перестает быть определенной.

ГЛАВА XX

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. II (ДИАМЕТРАЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ; ОСОБЫЕ И ГЛАВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ; АФФИННАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ)

§ 1. Диаметральные плоскости. Особые направления

1. Плоскость, сопряженная данному неасимптотическому направлению. Пусть (в какой-нибудь аффинной системе координат) дана поверхность второго порядка

$$F(x,\ y,\ z) = \varphi(x,\ y,\ z) + 2l(x,\ y,\ z) + a_0 = 0, \tag{1}$$

где, как всегда,

$$\varphi(x,\ y,\ z) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2,$$
$$l(x,\ y,\ z) \equiv a_1x + a_2y + a_3z.$$

Рассмотрим совокупность всех прямых d, имеющих одно и то же неасимптотическое для данной поверхности направление $\{\alpha:\beta:\gamma\}$.

Каждая такая прямая d пересекает поверхность (1) в двух точках M_1^d, M_2^d (вещественных, быть может, совпадающих или мнимых сопряженных); отрезок $\overline{M_1^dM_2^d}$ называется *хордой*, высекаемой из данной прямой d поверхностью (1).

Уравнение прямой d записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha t, \\ y &= y_0 + \beta t, \\ z &= z_0 + \gamma t, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где M_0 — какая-нибудь произвольно зафиксированная точка этой прямой.

В § 5 главы XIX было установлено, что точка $M_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$ прямой d тогда и только тогда является серединой хорды, высеченной из этой прямой поверхностью (1), когда выполнено условие

$$F_1(x_0,\ y_0,\ z_0)\,\alpha + F_2(x_0,\ y_0,\ z_0)\,\beta + F_3(x_0,\ y_0,\ z_0)\,\gamma = 0, \tag{3}$$

где, как всегда, положено

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_0, y_0, z_0) &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1, \\ F_2(x_0, y_0, z_0) &= a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2, \\ F_3(x_0, y_0, z_0) &= a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_3. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Перепишем уравнение (3), внося в него значения F_1, F_2, F_3 из (4) и отбрасывая индекс нуль у координат. Получим

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1)\,\alpha + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2)\,\beta + \\ + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3)\,\gamma = 0 \quad (3')$$

или, раскрывая скобки и по-новому группируя члены,

$$(a_{11}\alpha + a_{21}\beta + a_{31}\gamma)\,x + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{32}\gamma)\,y + \\ + (a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma)\,z + (a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma) = 0. \quad (3'')$$

Уравнению (3″), которое есть уравнение некоторой плоскости $\pi_{\alpha\beta\gamma}$, удовлетворяют все те и только те точки, которые являются серединами хорд, высекаемых поверхностью (1) из всевозможных прямых направления $\{\alpha:\beta:\gamma\}$. Другими словами: *плоскость* (3″) *есть геометрическое место середин хорд поверхности* (1), *имеющих направление* $\{\alpha:\beta:\gamma\}$; *эта плоскость называется плоскостью, сопряженной направлению* $\{\alpha:\beta:\gamma\}$ *относительно поверхности* (1).

Замечание 1. Плоскость $\pi_{\alpha\beta\gamma}$, сопряженная данному направлению, определена геометрически как геометрическое место середин хорд направления $\{\alpha:\beta:\gamma\}$; поэтому она не зависит от выбора той или иной системы координат.

2. Плоскость, сопряженная асимптотическому направлению; общее определение диаметральной плоскости. В определении плоскости, сопряженной данному направлению, предполагалось, что это направление неасимптотическое. Это предположение обосновано, так как из прямой асимптотического направления поверхность не высекает никакой хорды.

Однако уравнение (3″) может иметь смысл и для асимптотического направления $\{\alpha:\beta:\gamma\}$; определенную этим уравнением плоскость мы будем и в случае асимптотического направления $\{\alpha:\beta:\gamma\}$ называть плоскостью, *сопряженной направлению* $\{\alpha:\beta:\gamma\}$.

Наконец, назовем какую-нибудь плоскость *диаметральной плоскостью поверхности* (1), если существует (хотя бы одно) направление, неасимптотическое или асимптотическое, для которого эта плоскость является сопряженной относительно поверхности (1).

Уравнение диаметральной плоскости, сопряженной направлению $\{\alpha:\beta:\gamma\}$, всегда будем писать в виде

$$Lx + My + Nz + P = 0, \quad (5)$$

где

$$\left.\begin{aligned} L &= a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma, \\ M &= a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma, \\ N &= a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma, \\ P &= a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Замечание 2. Диаметральную плоскость, сопряженную направлению $\{\alpha:\beta:\gamma\}$, будем называть, когда это покажется удобным, и плоскостью, сопряженной любому вектору этого направления.

3. Простейшие свойства диаметральных плоскостей. Пусть (x_0, y_0, z_0) — точка, являющаяся центром поверхности (1) (может быть, не единственным). Тогда

$$F_1(x_0, y_0, z_0) = F_2(x_0, y_0, z_0) = F_3(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

и уравнение (3′) (или, что то же, уравнение (3″)) удовлетворено при любых α, β, γ.

Другими словами:

I. *Всякая диаметральная плоскость содержит все центры данной поверхности.*

Мы увидим (в § 2, пп. 1 и 2), что если поверхность (1) имеет хотя бы один центр, то верно и обратное предложение:

Всякая плоскость, содержащая все центры данной поверхности, является ее диаметральной плоскостью.

II. *Точка M_0, принадлежащая всем диаметральным плоскостям (или хотя бы всем тем из них, которые сопряжены неасимптотическим направлениям), является центром поверхности.*

В самом деле, точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ есть середина проходящей через нее хорды любого неасимптотического направления, а это означает (гл. XIX, § 5), что удовлетворены уравнения центра

$$F_1(x_0, y_0, z_0) = F_2(x_0, y_0, z_0) = F_3(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

III. *Если для данного асимптотического направления $\{\alpha:\beta:\gamma\}$ существует сопряженная ему плоскость, то она параллельна направлению $\{\alpha:\beta:\gamma\}$. Обратно, если направление $\{\alpha:\beta:\gamma\}$ параллельно сопряженной ему плоскости, то это направление является асимптотическим.*

В самом деле, непосредственным подсчетом проверяется, что

$$L\alpha + M\beta + N\gamma \equiv \varphi(\alpha, \beta, \gamma). \tag{7}$$

Условием параллельности вектора $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ и диаметральной плоскости

$$Lx + My + Nz + P = 0$$

является равенство

$$L\alpha + M\beta + N\gamma = 0,$$

т. е. $\varphi(\alpha; \beta; \gamma) = 0$; это равенство означает, что вектор $\{\alpha:\beta:\gamma\}$ имеет асимптотическое направление.

IV. *Пусть вектор* $\mathbf{u} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ *есть линейная комбинация векторов* $\mathbf{u}_1 = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ *и* $\mathbf{u}_2 = \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, *т. е.*

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2, \\ \beta &= \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2, \\ \gamma &= \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2. \end{aligned}$$

Если векторам $\mathbf{u}_1$ *и* $\mathbf{u}_2$ *сопряжены диаметральные плоскости* π_1 *и* π_2, *то плоскость* $\lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2$ *является диаметральной плоскостью, сопряженной вектору* $\mathbf{u}$.

Возьмем уравнения плоскостей, сопряженных соответственно направлениям $\{\alpha: \beta: \gamma\}$, $\{\alpha_1: \beta_1: \gamma_1\}$, $\{\alpha_2: \beta_2: \gamma_2\}$. Коэффициенты этих уравнений обозначим соответственно через

$$\begin{aligned} &L, \quad M, \quad N, \quad P, \\ &L_1, \quad M_1, \quad N_1, \quad P_1, \\ &L_2, \quad M_2, \quad N_2, \quad P_2, \end{aligned}$$

причем из самого определения (6) этих коэффициентов следует, что

$$\begin{aligned} L &= \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2, \\ M &= \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2, \\ N &= \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2, \\ P &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2. \end{aligned}$$

Геометрическое содержание полученного важного результата таково:

IV′. *Пусть векторам* $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ *сопряжены соответственно плоскости* π_1, π_2. *Тогда всякому вектору* $\mathbf{u}$, *компланарному обоим векторам* $\mathbf{u}_1$ *и* $\mathbf{u}_2$, *сопряжена плоскость* π, *принадлежащая пучку плоскостей, определенному плоскостями* π_1 *и* π_2.

Значит, если плоскости π_1 и π_2 пересекаются, то плоскость π проходит через прямую их пересечения, а если они параллельны, то и плоскость π им параллельна.

4. Особые направления. Посмотрим, не может ли случиться, что для данного направления не существует сопряженной ему плоскости. Очевидно, это произойдет тогда и только тогда, когда в уравнении (5) все три коэффициента L, M, N при переменных x, y, z обращаются в нуль. Тогда система однородных уравнений

$$\left.\begin{aligned} L &\equiv a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ M &\equiv a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma = 0, \\ N &\equiv a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

определяет направление $\{\alpha:\beta:\gamma\}$.

Определение. *Направление* $\{\alpha: \beta: \gamma\}$ *называется особым, если оно удовлетворяет системе уравнений* (8).

В главе XIX, § 1, мы назвали малым рангом поверхности (1) ранг квадратичной формы $\varphi(x, y, z)$, т. е. ранг r матрицы

$$A_\varphi \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Из определения особого направления непосредственно следует предложение: *поверхность малого ранга* r *имеет* $3-r$ *и не более линейно независимых особых направлений.*

В частности, *центральные поверхности* (для них $\delta \neq 0$ и, значит, $r=3$) *вовсе не имеют особых направлений.*

Умножая первое из уравнений (8) на α, второе на β, третье на γ и складывая, получаем

$$L\alpha + M\beta + N\gamma \equiv \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

всякое особое направление является асимптотическим. Итак, *только в нецентральном случае*[1]) *и только асимптотическое направление может оказаться особым; для всех неособых направлений сопряженная плоскость существует и определена однозначно.*

Посмотрим, какие имеются особые направления поверхностей различных типов. Параболоиды и центральные цилиндры (включая поверхности, распадающиеся в пару пересекающихся плоскостей) суть поверхности, для которых $r=2$; у них имеется единственное особое направление. Если эти поверхности даны своими каноническими уравнениями:

$$2z = \frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} \text{ (параболоиды)},$$

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \text{ (центральные цилиндры)},$$

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ (пары пересекающихся плоскостей)},$$

то их единственным особым направлением является направление $\{0:0:1\}$, т. е. направление оси Oz. В этом сразу убеждаемся, написав для наших канонических уравнений уравнения (8), определяющие особые направления; это будут

$$\frac{1}{p}\alpha = 0, \qquad \frac{1}{q}\beta = 0, \qquad 0 = 0.$$

В случае центральных цилиндров (и пары пересекающихся плоскостей) полученное направление есть направление прямой центров рассматриваемой поверхности.

[1]) То есть когда центров много или совсем нет.

Для эллиптического параболоида особое направление является и единственным вещественным асимптотическим направлением; то же справедливо и для эллиптического цилиндра. Но во всех четырех случаях (эллиптических и гиперболических параболоидов и цилиндров) единственное особое направление есть направление (вещественной) прямой пересечения тех двух плоскостей (вещественных или мнимых), на которые распался конус асимптотических направлений поверхности, а именно плоскостей:

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0,\quad \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \text{ для гиперболического параболоида}$$

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{iy}{\sqrt{q}}=0,\quad \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{iy}{\sqrt{q}}=0 \text{ для эллиптического параболоида}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \text{ для гиперболического цилиндра}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{iy}{b}=0,\quad \frac{x}{a}-\frac{iy}{b}=0 \text{ для эллиптического цилиндра (вещественного и мнимого).}$$

Для поверхностей, у которых $r=1$, имеется два независимых особых направления; значит, особыми являются все направления параллельные некоторой плоскости. Так обстоит дело у параболического цилиндра

$$y^2=2px$$

и у пары параллельных плоскостей

$$y^2=c.$$

И в том и другом случае уравнения (8) превращаются в

$$0=0,\quad 1\cdot\beta=0,\quad 0=0;$$

им удовлетворяют все векторы $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, у которых $\beta=0$, а α и γ какие угодно, т. е. все векторы, параллельные плоскости $y=0$. Так как конус асимптотических направлений параболического цилиндра вырождается в пару слившихся плоскостей $y^2=0$, то все асимптотические направления параболического цилиндра являются особыми.

Легко доказывается следующее предложение.

V. *Для того чтобы направление* $\{\lambda:\mu:\nu\}$ *было особым, необходимо и достаточно, чтобы оно было параллельно всякой диаметральной плоскости.*

В самом деле, пусть дана диаметральная плоскость

$$Lx+My+Nz+P=0, \qquad (5$$

сопряженная направлению $\{\alpha:\beta:\gamma\}$, так что

$$\left.\begin{aligned} L &= a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma, \\ M &= a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma, \\ N &= a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma, \\ P &= a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Условие параллельности направления $\{\lambda:\mu:\nu\}$ плоскости (5) есть

$$L\lambda + M\mu + N\nu = 0. \tag{9}$$

Подставляя в это равенство значения L, M, N из (6), раскрывая скобки и по-новому группируя члены, переписываем равенство (9) в виде

$$(a_{11}\lambda + a_{21}\mu + a_{31}\nu)\,\alpha + (a_{12}\lambda + a_{22}\mu + a_{32}\nu)\,\beta + (a_{13}\lambda + a_{23}\mu + a_{33}\nu)\,\gamma = 0. \tag{10}$$

Если направление $\{\lambda:\mu:\nu\}$ особое, то выражения в скобках, являющиеся коэффициентами при α, β, γ в равенстве (10), равны нулю, и условие параллельности направления $\{\lambda:\mu:\nu\}$ плоскости, сопряженной любому направлению $\{\alpha:\beta:\gamma\}$, выполнено. Первое утверждение теоремы V доказано.

Докажем второе утверждение. Итак, известно, что для данного направления $\{\lambda:\mu:\nu\}$ и любого (неособого) направления $\{\alpha:\beta:\gamma\}$ выполнено условие (10); требуется доказать, что направление $\{\lambda:\mu:\nu\}$ особое.

Берем три некомпланарных неасимптотических направления $\{\alpha_1:\beta_1:\gamma_1\}$, $\{\alpha_2:\beta_2:\gamma_2\}$, $\{\alpha_3:\beta_3:\gamma_3\}$ — такие существуют для всякой поверхности второго порядка в силу леммы § 5 главы XIX — и пишем для них уравнения (10):

$$\left.\begin{aligned} &(a_{11}\lambda + a_{21}\mu + a_{31}\nu)\,\alpha_1 + (a_{12}\lambda + a_{22}\mu + a_{32}\nu)\,\beta_1 + (a_{13}\lambda + a_{23}\mu + a_{33}\nu)\,\gamma_1 = 0, \\ &(a_{11}\lambda + a_{21}\mu + a_{31}\nu)\,\alpha_2 + (a_{12}\lambda + a_{22}\mu + a_{32}\nu)\,\beta_2 + (a_{13}\lambda + a_{23}\mu + a_{33}\nu)\,\gamma_2 = 0, \\ &(a_{11}\lambda + a_{21}\mu + a_{31}\nu)\,\alpha_3 + (a_{12}\lambda + a_{22}\mu + a_{32}\nu)\,\beta_3 + (a_{13}\lambda + a_{23}\mu + a_{33}\nu)\,\gamma_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Так как векторы $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, $\{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$ не компланарны, то строки, а значит, и столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Значит,

$$a_{11}\lambda + a_{21}\mu + a_{31}\nu = 0,$$
$$a_{12}\lambda + a_{22}\mu + a_{32}\nu = 0,$$
$$a_{13}\lambda + a_{23}\mu + a_{33}\nu = 0,$$

т. е. направление $\{\lambda, \mu, \nu\}$ особое. Предложение V доказано.

Докажем в заключение этого параграфа следующее предложение.

VI. *Плоскости* π_1 *и* π_2, *сопряженные относительно данной поверхности* (1) *двум различным направлениям* $\{\alpha_1:\beta_1:\gamma_1\}$ *и* $\{\alpha_2:\beta_2:\gamma_2\}$, *тогда и только тогда параллельны между собою, когда плоскость* π, *несущая оба направления* $\{\alpha_1:\beta_1:\gamma_1\}$ *и* $\{\alpha_2:\beta_2:\gamma_2\}$, *параллельна (некоторому) особому направлению поверхности* (1).

Доказательство. Обозначим коэффициенты при x, y, z в уравнении плоскостей, сопряженных направлениям $\{\alpha_1:\beta_1:\gamma_1\}$, соответственно $\{\alpha_2:\beta_2:\gamma_2\}$, через L_1, M_1, N_1, соответственно L_2, M_2, N_2; запишем условие параллельности этих плоскостей в виде пропорции

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{N_1}{N_2} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

или

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0,$$
$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = 0,$$
$$\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0.$$

Подставляя сюда значения

$$L_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1 + a_{13}\gamma_1, \qquad L_2 = a_{11}\alpha_2 + a_{12}\beta_2 + a_{13}\gamma_2,$$
$$M_1 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\beta_1 + a_{23}\gamma_1, \qquad M_2 = a_{21}\alpha_2 + a_{22}\beta_2 + a_{23}\gamma_2,$$
$$N_1 = a_{31}\alpha_1 + a_{32}\beta_1 + a_{33}\gamma_1, \qquad N_2 = a_{31}\alpha_2 + a_{32}\beta_2 + a_{33}\gamma_2,$$

получаем после раскрытия скобок и перегруппировки членов равенства:

$$a_{11}(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) + a_{12}(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2) + a_{13}(\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2) = 0,$$
$$a_{21}(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) + a_{22}(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2) + a_{23}(\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2) = 0,$$
$$a_{31}(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) + a_{32}(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2) + a_{33}(\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2) = 0,$$

по-прежнему выражающие необходимое и достаточное условие параллельности (в широком смысле слова) плоскостей π_1 и π_2. Но эти же равенства выражают условие, необходимое и достаточное для того, чтобы направление

$$(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2):(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2):(\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2),$$

очевидно, лежащее в плоскости π, было особым, т. е. чтобы плоскость π была параллельна некоторому особому направлению. Предложение VI доказано.

§ 2. Диаметральные плоскости поверхностей различных видов

1. Центральные поверхности (поверхности с единственным центром). Докажем, что:

Всякая плоскость, проходящая через (единственный) центр поверхности второго порядка

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

является диаметральной плоскостью, сопряженной некоторому однозначно определенному направлению $\{\alpha:\beta:\gamma\}$.

Доказательство. Предположим, что начало координат находится в центре поверхности. Тогда уравнение поверхности записывается в виде

$$\varphi(x, y, z) + a_0 = 0,$$

а уравнение данной плоскости, проходящей через центр, — в виде

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Для определения направления $\{\alpha:\beta:\gamma\}$, для которого эта плоскость является сопряженной, надо решить систему уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma &= A, \\ a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma &= B, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma &= C, \end{aligned}$$

что и делается однозначно ввиду того, что детерминант этой системы есть $\delta \neq 0$.

2. Поверхности с прямой центров и с плоскостью центров. Поверхности с прямой центров суть «центральные цилиндры», т. е. цилиндры над некоторой центральной (быть может, распадающейся) кривой второго порядка. В надлежаще выбранной аффинной системе координат уравнение такой поверхности имеет вид

$$x^2 \pm y^2 + a_0 = 0. \tag{2}$$

Единственным особым направлением поверхности (2) является (как показывает непосредственная проверка) направление вектора $\{0, 0, 1\}$, т. е. направление оси z выбранной координатной системы.

В этой же координатной системе уравнение диаметральной плоскости, сопряженной направлению $\{\alpha:\beta:\gamma\}$, есть

$$\alpha x \pm \beta y = 0.$$

Итак, всякая плоскость, проходящая через прямую центров, и только такая плоскость является диаметральной плоскостью нашей поверхности, а направление прямой центров есть (единственное) особое направление.

Мы знаем (предложение VI § 1), что всяким двум направлениям, лежащим в некоторой плоскости, параллельной особому направлению поверхности второго порядка, сопряжены диаметральные плоскости, параллельные между собою. В данном случае для поверхности (2) эти плоскости совпадают: два направления, не коллинеарные (единственному) особому направлению поверхности (2), т. е. направлению оси z, лежащие в плоскости, параллельной оси z, задаются векторами вида

$$\{\alpha, \beta, \gamma_1\} \text{ и } \{\alpha, \beta, \gamma_2\},$$

где по крайней мере одно из чисел α, β отлично от 0. Обоим этим направлениям сопряжена относительно поверхности (2) диаметральная плоскость $\alpha x \pm \beta y = 0$ (знаки при βy соответствуют знакам при y^2 в уравнении (2)). Конус асимптотических направлений поверхности $x^2 - y^2 + a_0 = 0$ распался на пару действительных плоскостей

$$x + y = 0, \qquad (\pi_1)$$
$$x - y = 0. \qquad (\pi_2)$$

Каждому направлению, лежащему в одной из этих плоскостей и коллинеарному оси z, например направлению $\{1: 1: \gamma\}$, лежащему в плоскости π_2, сопряжена сама эта плоскость.

Если поверхность (1) имеет плоскость центров, то эта плоскость и является единственной диаметральной плоскостью поверхности (1) (так как всякая диаметральная плоскость должна содержать все центры поверхности). Все направления, параллельные плоскости центров, являются особыми.

Поверхность, имеющая плоскость центров, распадается на пару параллельных плоскостей; сама плоскость центров есть средняя плоскость между двумя плоскостями, составляющими данную поверхность; направления, параллельные этим плоскостям, суть асимптотические для нашей поверхности; все они особые.

Остается рассмотреть тривиальный случай двух слившихся плоскостей π. Здесь каждая точка плоскости π есть центр поверхности, значит, имеется одна-единственная диаметральная плоскость — сама плоскость π. Она есть геометрическое место всех хорд поверхности, каждая из которых вырождается в пару своих слившихся концов (и определяется прямой, не параллельной плоскости π).

Все направления, параллельные плоскости π, являются особыми.

3. Поверхности без центров. Малый ранг такой поверхности равен или двум (параболоиды), или единице (параболический цилиндр).

Мы уже видели, что единственным особым направлением параболоида (гиперболического или эллиптического) является направление прямой пересечения d тех двух плоскостей π_1 и π_2, на которые

распался конус асимптотических направлений параболоида. В силу предложения V всякая диаметральная плоскость параболоида параллельна этой прямой d. Докажем, что и, обратно, всякая плоскость, параллельная единственному особому направлению параболоида, является его диаметральной плоскостью.

Для этого воспользуемся уравнениями

$$x^2 + y^2 = 2z \tag{3}$$

и

$$x^2 - y^2 = 2z \tag{4}$$

соответственно эллиптического и гиперболического параболоидов в надлежаще выбранной (аффинной) системе координат.

Диаметральная плоскость, сопряженная направлению $\{\alpha:\beta:\gamma\}$, будет в той же системе координат иметь уравнение

$$\alpha x + \beta y - \gamma = 0,$$

соответственно

$$\alpha x - \beta y - \gamma = 0.$$

Очевидно, всякая плоскость, параллельная оси z, может быть при надлежаще подобранных α, β, γ задана каждым из этих уравнений, причем различным направлениям сопряжены различные диаметральные плоскости.

Итак, диаметральными плоскостями параболоида являются все плоскости, параллельные (единственному) особому направлению параболоида, и только они.

Замечание 1. Из доказанного следует, что всякая плоскость, параллельная диаметральной плоскости параболоида, сама является диаметральной плоскостью этого параболоида.

Замечание 2. Пусть поверхность (1) есть параболоид. Наряду с нею будем рассматривать пару плоскостей π_1 и π_2, на которые распался конус асимптотических направлений

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{5}$$

параболоида (1). Обе поверхности (1) и (5) имеют, очевидно, одни и те же асимптотические и одно и то же (единственное) особое направление. Легко проверить также, что плоскости, сопряженные относительно поверхностей (1) и (5) одному и тому же направлению $\{\alpha:\beta:\gamma\}$, параллельны (коэффициенты L, M, N в уравнениях этих плоскостей будут одни и те же). Но мы видели, что для поверхности (5) плоскостью, сопряженной асимптотическому направлению, лежащему в данной плоскости π_i $(i = 1, 2)$, будет сама эта плоскость π_i. Поэтому диаметральная плоскость параболоида (1), сопряженная (неособому) асимптотическому направлению $\{\alpha:\beta:\gamma\}$, параллельна той из двух плоскостей π_1, π_2, которая несет на себе направление $\{\alpha:\beta:\gamma\}$.

Переходим к параболическим цилиндрам. Конус асимптотических направлений параболического цилиндра

$$y^2 = 2px \tag{6}$$

вырождается в пару совпадающих плоскостей

$$y^2 = 0$$

(«дважды взятая» плоскость $y = 0$).

Так как у параболического цилиндра имеется двумерное многообразие особых направлений, то все асимптотические направления параболического цилиндра являются особыми.

Докажем, что диаметральными плоскостями параболического цилиндра (6) являются все плоскости, параллельные плоскости $y = 0$, и только они.

Это непосредственно следует из того, что плоскость, сопряженная направлению $\{\alpha:\beta:\gamma\}$ относительно поверхности (6), имеет уравнение $\beta y - p\alpha = 0$.

§ 3. Сопряженные направления

Пусть дана поверхность второго порядка, определенная в некоторой аффинной системе координат уравнением

$$F(x, y, z) \equiv \varphi(x, y, z) + 2l(x, y, z) + a_0 = 0, \tag{1}$$
$$\varphi(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2,$$
$$l(x, y, z) \equiv a_1x + a_2y + a_3z.$$

Квадратичная форма $\varphi(x, y, z)$ определяет свою полярную билинейную форму, а через нее — билинейную функцию $\Psi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ от двух векторов: если $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ — два произвольных вектора, заданных своими координатами в выбранной нами системе координат $Oxyz$:

$$\mathbf{u}_1 = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}, \qquad \mathbf{u}_2 = \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\},$$

то

$$\Psi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \equiv \psi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \equiv a_{11}\alpha_1\alpha_2 + a_{12}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + a_{22}\beta_1\beta_2 + a_{13}(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) + a_{23}(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) + a_{33}\gamma_1\gamma_2. \tag{2}$$

Билинейная функция Ψ не зависит от выбора системы координат: если мы возьмем другую систему координат $Ox'y'z'$, то векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ получат координаты α_1', β_1', γ_1', соответственно α_2', β_2', γ_2', а форма $\psi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ перейдет в форму $\psi'(\alpha_1', \beta_1', \gamma_1'; \alpha_2', \beta_2', \gamma_2')$, причем если векторы $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ имели в координатных системах $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ соответственно координаты α_1, β_1, γ_1; α_1', β_1', γ_1' и α_2, β_2, γ_2; α_2', β_2', γ_2', то

$$\psi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \equiv \psi'(\alpha_1', \beta_1', \gamma_1'; \alpha_2', \beta_2', \gamma_2'),$$

так что имеет место тождество

$$\Psi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \equiv \psi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \equiv \psi'(\alpha_1', \beta_1', \gamma_1'; \alpha_2', \beta_2', \gamma_2'). \quad (2')$$

В частности, если для каких-нибудь двух векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ имеем $\Psi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 0$, то этот факт не зависит от того, как мы выбрали координатную систему, в которой задавалось уравнение (1) поверхности.

Определение. Два вектора $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ называются *сопряженными относительно поверхности* (1) (*или относительно квадратичной формы* $\varphi(x, y, z)$ старших членов уравнения этой поверхности в любой системе координат), если для этих векторов

$$\Psi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = 0.$$

Если векторы $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ заданы в системе координат $Oxyz$ своими координатами

$$\mathbf{u}_1 = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}, \qquad \mathbf{u}_2 = \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\},$$

то условие их сопряженности записывается так:

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \equiv \psi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \equiv a_{11}\alpha_1\alpha_2 + a_{12}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + \\ + a_{22}\beta_1\beta_2 + a_{13}(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) + a_{23}(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) + a_{33}\gamma_1\gamma_2 \equiv \\ \equiv (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1 + a_{13}\gamma_1)\alpha_2 + (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\beta_1 + a_{23}\gamma_1)\beta_2 + \\ + (a_{31}\alpha_1 + a_{32}\beta_1 + a_{33}\gamma_1)\gamma_2 \equiv (a_{11}\alpha_2 + a_{12}\beta_2 + a_{13}\gamma_2)\alpha_1 + \\ + (a_{21}\alpha_2 + a_{22}\beta_2 + a_{23}\gamma_2)\beta_1 + (a_{31}\alpha_2 + a_{32}\beta_2 + a_{33}\gamma_2)\gamma_1 = 0. \quad (3)\end{aligned}$$

Из симметрии условий (3) относительно векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ следует, что сопряженность двух векторов есть понятие взаимное, не зависящее от порядка, в котором рассматриваются векторы.

Очевидно, далее, что вектор $\mathbf{u}_2$, сопряженный векторам $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{v}_1$, сопряжен и любой их линейной комбинации $\lambda\mathbf{u}_1 + \mu\mathbf{v}_1$.

Отсюда, в частности, вытекает, что из сопряженности векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ следует и сопряженность любых векторов $\lambda_1\mathbf{u}_1$ и $\lambda_2\mathbf{u}_2$, т. е. любых векторов, имеющих соответственно те же направления, что и векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$. Поэтому мы говорим, что два направления сопряжены между собою, если вектор одного из этих направлений сопряжен вектору другого.

Из равенства (3), далее, очевидно, вытекает, что *особое направление* $\{\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1\}$ *сопряжено всякому направлению* $\{\alpha : \beta : \gamma\}$. Верно и обратное предложение: *если направление* $\{\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1\}$ *сопряжено всякому направлению* $\{\alpha : \beta : \gamma\}$, *то оно является особым.* Это вытекает из следующего предложения.

VII. *Если* $\{\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1\}$ *не особое направление, то сопряженными ему являются те и только те направления* $\{\alpha : \beta : \gamma\}$, *которые лежат в плоскости, сопряженной направлению* $\{\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1\}$.

В самом деле, уравнение плоскости, сопряженной направлению $\{\alpha_1:\beta_1:\gamma_1\}$, есть

$$Lx + My + Nz + P = 0,$$

где

$$L = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1 + a_{13}\gamma_1,$$
$$M = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\beta_1 + a_{23}\gamma_1,$$
$$N = a_{31}\alpha_1 + a_{32}\beta_1 + a_{33}\gamma_1,$$
$$P = a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 + a_3\gamma_1.$$

Всякий вектор $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, лежащий в этой плоскости, и только такой вектор $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, удовлетворяет условию

$$L\alpha + M\beta + N\gamma = 0,$$

которое как раз и есть условие сопряженности вектора $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ вектору $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Из доказанного следует, что *свойство направления* $\{\alpha:\beta:\gamma\}$ *быть или не быть особым относительно данной поверхности* (*данной квадратичной формы* $\varphi(x, y, z)$) *не зависит от выбора той или иной системы координат* [1]).

Более подробно. Пусть, наряду с координатной системой $Oxyz$, дана координатная система $O'x'y'z'$, при переходе к которой многочлен

$$F(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 \quad (1)$$

преобразуется в

$$F'(x', y', z') \equiv a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x'z' + 2a'_{23}y'z' + a'_{33}z'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + 2a'_3z' + a'_0, \quad (1')$$

так что форма

$$\varphi(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2$$

преобразуется в

$$\varphi'(x', y', z') \equiv a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x'z' + 2a'_{23}y'z' + a'_{33}z'^2.$$

Пусть вектор $\mathbf{u}$ имеет в системе координат $Oxyz$ координаты α, β, γ, а в системе координат $Ox'y'z'$ координаты α', β', γ'.

Если при этом оказывается, что координаты α, β, γ вектора $\mathbf{u}$ в системе $Oxyz$ удовлетворяют уравнениям особого направления (относительно формы $\varphi(x, y, z)$)

$$a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0,$$
$$a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma = 0,$$
$$a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma = 0,$$

---

[1]) Это следует и непосредственно из самого определения особого направления.

то координаты α', β', γ' того же вектора u в системе $Ox'y'z'$ будут удовлетворять уравнениям

$$a'_{11}\alpha' + a'_{12}\beta' + a'_{13}\gamma' = 0,$$
$$a'_{21}\alpha' + a'_{22}\beta' + a'_{23}\gamma' = 0,$$
$$a'_{31}\alpha' + a'_{32}\beta' + a'_{33}\gamma' = 0.$$

Это очень важный факт, которым мы вскоре воспользуемся. Из него вытекает, что вполне законно было воспользоваться для определения особых направлений поверхностей данного типа (параболоидов, цилиндрических поверхностей и т. д.) их каноническими уравнениями, что мы и делали в предыдущем параграфе.

§ 4. Уравнение поверхности второго порядка относительно координатной системы с сопряженными направлениями осей

Пусть дана поверхность второго порядка. Возьмем прямую d, направление которой не асимптотично относительно данной поверхности. Если поверхность центральная, то предполагаем, кроме того, что прямая d проходит через центр поверхности. Плоскость π, сопряженная направлению прямой d, не может быть параллельной прямой d (так как неасимптотическое направление не компланарно сопряженной ему плоскости). Плоскость π пересекает прямую d в некоторой точке O, которую и объявим началом новой координатной системы. При этом, если поверхность центральная, то O — ее центр. Осью z сделаем прямую d, а остальные две оси возьмем в плоскости π.

Плоскость π, будучи плоскостью Oxy нашей координатной системы, имеет уравнение

$$z = 0. \tag{1}$$

Пусть в выбранной нами координатной системе уравнение данной поверхности есть

$$F(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0. \tag{2}$$

Так как плоскость (1) сопряжена вектору $\{0, 0, 1\}$, то ее уравнение в нашей системе координат должно быть

$$(a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 0 + a_{13}\cdot 1)x + (a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot 0 + a_{23}\cdot 1)y + (a_{31}\cdot 0 + a_{32}\cdot 0 + a_{33}\cdot 1)z + a_1\cdot 0 + a_2\cdot 0 + a_3\cdot 1 = 0,$$

т. е.

$$a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_3 = 0. \tag{3}$$

Так как уравнения (1) и (3) определяют одну и ту же плоскость, то непременно

$$a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_3 = 0 \quad a_{33} \neq 0$$

Мы доказали следующее предложение:

Если координатная система выбрана так, что ее ось z имеет направление, не асимптотическое относительно данной поверхности второго порядка, а плоскость Oxy является сопряженной к направлению оси Oz относительно той же поверхности, то в этой системе координат данная поверхность имеет уравнение вида

$$(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0) + a_{33}z^2 = 0, \qquad (4)$$

где

$$a_{33} \neq 0.$$

Пусть теперь наша поверхность центральная. Тогда в уравнении (4) имеем $a_1 = a_2 = 0$. От осей Ox и Oy мы требовали пока только, чтобы они лежали в плоскости, сопряженной направлению оси Oz. Теперь мы можем, кроме того, потребовать, чтобы ось Ox имела неасимптотическое направление. Сопряженную ей плоскость (она проходит через ось z, так как направления осей Ox и Oz сопряжены) объявим плоскостью Oyz, так что ось y, как пересечение плоскостей Oxy и Oyz, будет сопряжена и оси z, и оси x; итак, все три оси координат имеют теперь попарно сопряженные направления. Плоскость $y = 0$, будучи сопряжена вектору $\{0, 1, 0\}$, имеет уравнение

$$a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z + a_2 = 0,$$

так что

$$a_{12} = 0, \quad a_{32} = 0, \quad a_2 = 0.$$

Теорема 1. *Уравнение центральной поверхности в системе координат, направления осей которой попарно сопряжены между собою, имеет вид*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_0 = 0.$$

Таков (при $n = 3$) геометрический смысл «приведения квадратичной формы к каноническому виду».

Основным приложением только что полученного результата является «теорема единственности», доказанная в следующем параграфе.

§ 5. Теорема единственности

Содержание этого параграфа совершенно аналогично содержанию § 10 главы XVII.

Теорема 2. *Два многочлена второй степени $F_1(x, y, z)$ и $F_2(x, y, z)$ тогда и только тогда имеют одно и то же нулевое мно-*

гообразие [1]), ***когда они пропорциональны между собою, т. е. когда один из них получается из другого умножением на некоторое число*** $\lambda \neq 0$.

Как и в случае многочленов от двух переменных, только одна половина этой теоремы нуждается в доказательстве: надо доказать, что два многочлена второй степени $F_1(x, y, z)$ и $F_2(x, y, z)$, имеющие одно и то же нулевое многообразие $C_{F_1} = C_{F_2} = C$, пропорциональны между собою.

Рассмотрим поверхности

$$F_1(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

и

$$F_2(x, y, z) = 0. \tag{2}$$

Берем какое-нибудь направление $\{\alpha: \beta: \gamma\}$, неасимптотическое для поверхности (1); оно будет неасимптотическим и для поверхности (2).

Диаметральная плоскость π поверхности (1), сопряженная направлению $\{\alpha: \beta: \gamma\}$, будет и диаметральной плоскостью поверхности (2), сопряженной тому же направлению.

Возьмем теперь систему координат $O'x'y'z'$, ось z' которой имеет направление $\{\alpha: \beta: \gamma\}$, а две другие оси лежат в плоскости π. В этой системе координат уравнения (1) и (2) примут соответственно вид

$$F_1'(x', y', z') \equiv a'_{33}z'^2 + f'_1(x', y') = 0, \tag{1'}$$
$$F_2'(x', y', z') \equiv b'_{33}z'^2 + f'_2(x', y') = 0, \tag{2'}$$

где

$$f'_1(x', y') \equiv a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0,$$
$$f'_2(x', y') \equiv b'_{11}x'^2 + 2b'_{12}x'y' + b'_{22}y'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + b'_0.$$

Здесь $a'_{33} \neq 0$ (и $b'_{33} \neq 0$), в противном случае единичный вектор $\{0, 0, 1\}$ оси z', удовлетворяя уравнению

$$\varphi'_1(x', y', z') \equiv a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 = 0,$$

был бы вектором асимптотического направления для поверхности (1) (соответственно для (2)) — вопреки нашим предположениям.

Нам надо доказать пропорциональность многочленов $F_1(x, y, z)$ и $F_2(x, y, z)$, т. е. пропорциональность тождественно равных им многочленов $F'_1(x', y', z')$ и $F'_2(x', y', z')$. Для этого обозначим через C^0 пересечение множества C с плоскостью $z' = 0$. Множество C^0 есть множество всех точек плоскости $O'x'y'$, в которых обращается в нуль один какой-нибудь (и, следовательно, любой) из многочленов $f'_1(x', y')$, $f'_2(x', y')$. Другими словами, это есть (лежащее в плоскости $O'x'y'$) нулевое многообразие каждого из этих многочленов.

[1]) Гл. XV, § 1, стр. 364.

Возможны следующие случаи:

1° Множество C^0 пусто. Этот случай осуществляется тогда и только тогда, когда какое-нибудь (и тогда каждое) из равенств $f'_1(x', y') = 0$, $f'_2(x', y') = 0$ противоречиво, т. е. когда один какой-нибудь (и тогда каждый) из многочленов $f'_1(x', y')$, $f'_2(x', y')$ тождественно равен отличной от нуля постоянной a'_0, соответственно b'_0.

2° Множество C^0 совпадает со всей плоскостью $O'x'y'$. Это происходит тогда и только тогда, когда один какой-нибудь (и тогда каждый) из многочленов $f'_1(x', y')$, $f'_2(x', y')$ тождественно равен нулю.

3° Ни один из случаев 1°, 2° не имеет места. Тогда множество C^0 есть множество всех точек кривой второго порядка, определяемой в плоскости $O'x'y'$ каждым из уравнений

$$f'_1(x', y') = 0, \quad f'_2(x', y') = 0. \tag{3}$$

В этом случае в силу теоремы единственности для многочленов второй степени от двух переменных имеем $f'_2(x', y') \equiv \mu f'_1(x', y')$ при некотором $\mu \neq 0$. Полагая $\lambda = \frac{b'_{33}}{a'_{33}}$ (что возможно, так как $a'_{33} \neq 0$), можем написать

$$F'_1(x', y', z') \equiv a'_{33}z'^2 + f'_1(x', y'),$$
$$F'_2(x', y', z') \equiv \lambda a'_{33}z'^2 + \mu f'_1(x', y').$$

Для того чтобы доказать в случае 3° пропорциональность многочленов $F'_1(x', y', z')$ и $F'_2(x', y', z')$, надо только показать, что $\mu = \lambda$. Так как многочлен $f'_1(x', y')$ не равен тождественно постоянной, то существуют значения $x' = x'_1$, $y' = y'_1$, для которых $f'_1(x'_1, y'_1) = 1$ [1]). Найдя такие значения, решаем относительно z' уравнение

$$F'_1(x'_1, y'_1, z') \equiv a'_{33}z'^2 + 1 = 0.$$

Получаем $z'_1 = \sqrt{-\frac{1}{a'_{33}}}$. Итак, точка $M_1 = (x'_1, y'_1, z'_1)$ принадлежит

[1]) В самом деле, если в многочлене $f'_1(x', y')$ хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{22} отличен от нуля, например $a_{11} \neq 0$, то, полагая в уравнении $f'_1(x', y') = 1$ значение $y' = y'_1 = 1$, получаем квадратное уравнение для определения x'_1. Если $a'_{11} = a'_{22} = 0$, $a'_{12} \neq 0$, то уравнение $f'_1(x', y') = 1$ можно записать в виде $2(a'_{12}y' + a'_1)x' + 2a'_2y' + a'_0 = 1$. Полагая в нем y' равным любому числу $y'_1 \neq -\frac{a'_1}{a'_{12}}$, получаем уравнение первой степени для определения x'_1. Наконец, если в $f'_1(x', y')$ все коэффициенты при членах второй степени равны нулю, то $f'_1(x', y') = 1$ есть уравнение первой степени с двумя неизвестными, имеющее бесчисленное множество решений x'_1, y'_1.

множеству C. Следовательно,

$$F_2'(x_1', y_1', z_1') \equiv \lambda a_{33}' \left(-\frac{1}{a_{33}'}\right) + \mu \cdot 1 = 0, \text{ т. е. } \mu = \lambda.$$

Итак, в случае 3° утверждение теоремы 2 доказано.

В случае 2° имеем

$$F_1'(x', y', z') \equiv a_{33}' z'^2, \quad a_{33}' \neq 0,$$
$$F_2'(x', y', z') \equiv b_{33}' z'^2, \quad b_{33}' \neq 0,$$

и, следовательно, полагая $\lambda = \frac{b_{33}'}{a_{33}'}$, имеем $F_2'(x', y', z') \equiv \lambda F_1'(x', y', z')$ — утверждение теоремы 2 верно и в этом случае.

Наконец, в случае 1° уравнения (1′), (2′) принимают вид

$$F_1'(x', y', z') \equiv a_{33}' z'^2 + a_0' = 0, \quad a_0' \neq 0,$$
$$F_2'(x', y', z') \equiv b_{33}' z'^2 + b_0' = 0, \quad b_0' \neq 0.$$

Множество C есть пара плоскостей, определяемая каждым из уравнений

$$z' = \pm \sqrt{-\frac{a_0'}{a_{33}'}} \text{ или } z' = \pm \sqrt{-\frac{b_0'}{b_{33}'}}.$$

Для того чтобы эти уравнения были эквивалентны, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы было $\frac{a_0'}{a_{33}'} = \frac{b_0'}{b_{33}'}$, т. е. $b_{33}' = \lambda a_{33}'$, $b_0' = \lambda a_0'$ при $\lambda = \frac{b_{33}'}{a_{33}'}$. Теорема 2 доказана во всех случаях.

Аналогично тому, что мы сделали в главе XVII, § 10, мы теперь можем определить поверхность второго порядка как множество всех точек комплексного трехмерного пространства, координаты которых в некоторой аффинной координатной системе удовлетворяют уравнению второй степени $F(x, y, z) = 0$. При этом два таких уравнения определяют в одной и той же системе координат тогда и только тогда одну и ту же поверхность второго порядка, когда одно из этих уравнений получается из другого почленным умножением на некоторое число $\lambda \neq 0$.

§ 6. Главные направления

В этом параграфе и до конца главы рассматриваются лишь прямоугольные системы координат.

Пусть дана поверхность второго порядка своим уравнением

$$F(x, y, z) \equiv \varphi(x, y, z) + 2l(x, y, z) + a_0 = 0 \qquad (1)$$

относительно некоторой прямоугольной системы координат $Oxyz$.

Обозначим через $\Phi(\mathbf{u})$ квадратичную функцию, записывающуюся в этой системе координат в виде формы

$$\Phi(\mathbf{u}) \equiv \varphi(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2$$

(если $\mathbf{u} = \{x, y, z\}$).

Направление $\{\alpha : \beta : \gamma\}$ называется главным, если оно перпендикулярно ко всем сопряженным ему направлениям. В частности, всякое особое направление (если оно существует у поверхности (1)) главное, потому что сопряжено всякому направлению, в том числе и всякому направлению, ему перпендикулярному.

Замечание 1. Так как понятие сопряженности двух направлений относительно данной поверхности не зависит от выбора той или иной системы координат, то не зависит от этого выбора и понятие главного направления.

Замечание 2. Пусть $\{\alpha : \beta : \gamma\}$ — неособое направление, перпендикулярное к каким-нибудь двум сопряженным ему направлениям. Тогда направление $\{\alpha : \beta : \gamma\}$ перпендикулярно к сопряженной ему диаметральной плоскости и, следовательно, является главным.

Итак, для того чтобы направление было главным, достаточно (и, разумеется, необходимо), чтобы оно было перпендикулярным к двум сопряженным ему направлениям.

Пусть направление $\{\alpha : \beta : \gamma\}$ главное. Если оно особое, то

$$\begin{aligned} L &\equiv a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ M &\equiv a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma = 0, \\ N &\equiv a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma = 0. \end{aligned}$$

Если $\{\alpha : \beta : \gamma\}$ главное, но не особое направление, то оно перпендикулярно к сопряженной ему диаметральной плоскости

$$Lx + My + Nz + P = 0,$$

и тогда вектор $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ коллинеарен нормальному вектору $\{L, M, N\}$ плоскости, т. е.

$$\left.\begin{aligned} L &\equiv a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = \lambda\alpha, \\ M &\equiv a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma = \lambda\beta, \\ N &\equiv a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma = \lambda\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

при некотором $\lambda \neq 0$.

Итак, какова бы ни была прямоугольная система координат, относительно которой поверхность задана своим уравнением (1), всякое главное направление удовлетворяет уравнениям (2), причем для особых направлений имеем $\lambda = 0$, а для неособых $\lambda \neq 0$. Обратно, всякое направление $\{\alpha : \beta : \gamma\}$, удовлетворяющее уравнениям (2), есть главное направление, особое, если $\lambda = 0$ (и только в этом случае). Следовательно, *вопрос о нахождении главных направлений есть*

вопрос о нахождении ненулевого вектора $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, *удовлетворяющего системе уравнений* (2) *при некотором* λ, *равном нулю или нет.*

Переписываем эту систему уравнений в виде

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma &= 0,\\ a_{21}\alpha + (a_{22}-\lambda)\beta + a_{23}\gamma &= 0,\\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33}-\lambda)\gamma &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

Она тогда и только тогда имеет ненулевое решение, когда

$$D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) называется *характеристическим уравнением квадратичной формы* $\varphi(x, y, z)$ *и выражаемой ею квадратичной функции* $\Phi(\mathbf{u})$; левой частью этого уравнения является многочлен $D(\lambda)$ третьей степени; многочлен этот называется *характеристическим многочленом*, а корни его — *характеристическими числами функции* $\Phi(\mathbf{u})$ *и формы* $\varphi(x, y, z)$.

Многочлен $D(\lambda)$, очевидно, есть дискриминант квадратичной формы

$$\theta_\lambda(x, y, z) \equiv \varphi(x, y, z) - \lambda(x^2+y^2+z^2).$$

Этот многочлен является ортогональным инвариантом. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что при переходе от одного ортонормального базиса к другому форма $x^2+y^2+z^2$ переходит в форму $x'^2+y'^2+z'^2$ и, следовательно, форма $\varphi(x, y, z) - \lambda(x^2+y^2+z^2)$ переходит в форму

$$\varphi'(x', y', z') - \lambda(x'^2+y'^2+z'^2).$$

Из доказанной таким образом ортогональной инвариантности многочлена $D(\lambda)$ вытекает следующее утверждение:

Если при переходе от прямоугольной системы координат $Oxyz$ *к новой, тоже прямоугольной системе координат* $Ox'y'z'$, *квадратичная форма* $\varphi(x, y, z)$ *преобразуется в квадратичную форму*

$$\varphi'(x', y', z') \equiv a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x'z' + 2a'_{23}y'z' + a'_{33}z'^2,$$

то при любом λ

$$\begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda & a'_{12} & a'_{13}\\ a'_{21} & a'_{22}-\lambda & a'_{23}\\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Так как характеристический многочлен $D(\lambda)$ не зависит от выбора той или иной прямоугольной системы координат, то то же справедливо для его корней, характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

формы $\varphi(x, y, z)$, они вполне определены самой квадратичной функцией $\Phi(\mathbf{u}) \equiv \varphi(x, y, z)$.

Уравнения (2′) суть не что иное, как уравнения, определяющие особые направления формы $\theta(x, y, z) = \varphi(x, y, z) - \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$. Поэтому главные направления формы $\varphi(x, y, z)$ — это особые направления формы $\theta(x, y, z)$. Отсюда мы снова выводим, что главные направления не зависят от выбора системы координат; для их определения можно написать уравнения (2′), пользуясь при этом любой прямоугольной координатной системой.

Переходим к доказательству основного факта:

I. *Для каждой квадратичной формы* $\varphi(x, y, z)$ *существует прямоугольная система координат* $Ox'y'z'$, *в которой форма принимает канонический вид*

$$\varphi(x, y, z) \equiv Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2.$$

Доказательство. Многочлен $D(\lambda)$ — третьей степени; поэтому по крайней мере один из корней является вещественным; пусть это будет, например, λ_3. Этому корню соответствует вещественное главное направление, и мы можем с самого начала предположить, что ось z исходной координатной системы $Oxyz$ имеет именно это направление; тогда ортом его является вектор $\{0, 0, 1\}$, и уравнения (2′) должны удовлетворяться, если в них подставить $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, так что имеем

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_3)\cdot 0 + \quad a_{12}\cdot 0 \quad + a_{13}\cdot 1 \quad &= 0, \\ a_{21}\cdot 0 + (a_{22} - \lambda_3)\cdot 0 + a_{23}\cdot 1 \quad &= 0, \\ a_{31}\cdot 0 + \quad a_{32}\cdot 0 \quad + (a_{33} - \lambda_3)\cdot 1 &= 0, \end{aligned}$$

т. е. $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{33} = \lambda_3$ — в избранной системе координат квадратичная функция $\Phi(\mathbf{u})$ записывается в виде формы

$$\Phi(\mathbf{u}) \equiv \varphi(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \lambda_3 z^2.$$

Как известно из главы XVI, § 1, можно поворотом координатной системы Oxy в ее плоскости (вокруг точки O) на некоторый угол α перевести ее в такую систему $Ox'y'$, в которой квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ примет канонический вид $a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2$. Этот поворот можно рассматривать как поворот всего пространства вокруг (остающейся неподвижной) оси z на тот же угол α. В результате получаем прямоугольную координатную систему $Ox'y'z'$, в которой функция $\Phi(\mathbf{u})$ записывается в виде

$$\Phi(\mathbf{u}) \equiv \varphi(x, y, z) = \varphi'(x', y', z') = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + \lambda_3 z'^2.$$

Утверждение I доказано.

Заметим, что если бы не только ось z, но и оси x и y имели главные направления, то и векторы $\{1, 0, 0\}$ и $\{0, 1, 0\}$ удовлетворяли бы уравнениям (2′), откуда следовало бы, что и $a_{12} = 0$. Итак,

II. *Если оси прямоугольной системы координат $Ox'y'z'$ имеют главные направления относительно квадратичной функции $\Phi(\mathbf{u})$, то в такой системе координат функция $\Phi(\mathbf{u})$ непременно имеет канонический вид:*

$$\Phi(\mathbf{u}) \equiv \varphi'(x',\ y',\ z') = Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2. \tag{4}$$

Докажем теперь следующее утверждение

III. *Если в какой-нибудь прямоугольной системе координат $Ox'y'z'$ квадратичная функция $\Phi(\mathbf{u})$ имеет канонический вид* (4), *то коэффициенты A, B, C в этом каноническом представлении непременно равны характеристическим числам функции $\Phi(\mathbf{u})$.*

В самом деле, в системе координат $Ox'y'z'$ характеристический многочлен $D(\lambda)$ записывается в виде

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} A-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & B-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & C-\lambda \end{vmatrix} = (A-\lambda)(B-\lambda)(C-\lambda);$$

его корнями, очевидно, являются A, B, C, откуда утверждение следует.

Так как функция $\Phi(\mathbf{u})$ действительна, так же как и рассматриваемые нами системы координат, то всякая квадратичная форма, изображающая функцию $\Phi(\mathbf{u})$, имеет действительные коэффициенты; поэтому действительны и коэффициенты в каноническом представлении функции, т. е. характеристические числа λ_1, λ_2, λ_3. Итак,

IV. *Все характеристические числа любой (действительной) квадратичной функции действительны.*

Доказываем теперь утверждение

V. *Если в данной прямоугольной системе координат $Ox'y'z'$ квадратичная функция $\Phi(\mathbf{u})$ имеет канонический вид $\Phi(\mathbf{u}) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$, то направления осей этой координатной системы непременно являются главными направлениями функции $\Phi(\mathbf{u})$.*

Это утверждение вытекает из того, что в системе координат $Ox'y'z'$ уравнения (2′), определяющие главные направления, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} (\lambda_1-\lambda)\,\alpha &= 0, \\ (\lambda_2-\lambda)\,\beta &= 0, \\ (\lambda_3-\lambda)\,\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и при $\lambda = \lambda_1$ вектор $\{1,\ 0,\ 0\}$, при $\lambda = \lambda_2$ вектор $\{0,\ 1,\ 0\}$, при $\lambda = \lambda_3$ вектор $\{0,\ 0,\ 1\}$ этим уравнениям удовлетворяют.

Мы убедились сначала в том, что существуют прямоугольные системы координат, в которых форма $\varphi(x,\ y,\ z)$ принимает канонический вид; затем мы доказали, что оси всякой такой системы координат имеют главные направления. Отсюда следует, что для

всякой квадратичной формы существует по крайней мере одна тройка взаимно перпендикулярных главных направлений. Сейчас мы полностью выясним вопрос и о числе таких троек. Оказывается, ответ на этот вопрос зависит от кратности корней характеристического уравнения.

Мы докажем последовательно следующие утверждения:

VI. *Простому корню характеристического уравнения соответствует одно-единственное главное направление.*

VII. *Главные направления, соответствующие двум различным корням характеристического уравнения, взаимно перпендикулярны.*

Непосредственным следствием предложений VI и VII является предложение

VIII. *Если все три корня характеристического уравнения различны между собою, то имеются три и только три главных направления, и они взаимно перпендикулярны.*

Другими словами, имеется одна-единственная тройка взаимно перпендикулярных главных направлений.

Далее, имеет место предложение

IX. *Если из трех корней* λ_1, λ_2, λ_3 *два равны между собою и отличны от третьего, например:*

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3,$$

то все направления, перпендикулярные к единственному направлению, соответствующему корню λ_3, *являются главными направлениями, соответствующими корню* $\lambda_1 = \lambda_2$. *Таким образом, имеется бесконечно много троек взаимно перпендикулярных главных направлений; каждая из этих троек содержит единственное главное направление* $\mathbf{e}_3$, *соответствующее простому корню* λ_3, *тогда как два других направления суть произвольные направления* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, *перпендикулярные между собою и перпендикулярные к направлению* $\mathbf{e}_3$.

И наконец,

X. *Если все три корня характеристического уравнения равны между собою, то каждое направление является главным.*

Переходим к доказательствам.

Доказательство утверждения VI. Возьмем прямоугольную систему координат $Oxyz$, относительно которой форма $\varphi(x, y, z)$ имеет канонический вид. Относительно этой системы координат уравнения (2′) принимают вид (5).

Пусть λ_3 — простой корень, $\lambda_3 \neq \lambda_1$, $\lambda_3 \neq \lambda_2$. Тогда система уравнений (5) превращается при $\lambda = \lambda_3$ в

$$\left.\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_3)\,\alpha &= 0 \qquad (\text{т. е. } \alpha = 0),\\ (\lambda_2 - \lambda_3)\,\beta &= 0 \qquad (\text{т. е. } \beta = 0),\\ 0 \cdot \gamma &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5′}$$

Единственное ненулевое направление $\{\alpha:\beta:\gamma\}$, определяемое этой системой, есть $\{0:0:1\}$.

Доказательство утверждений VII—X.

Пусть $\lambda_2 \neq \lambda_3$. Так как λ_1 не может одновременно совпадать и с λ_2 и с $\lambda_3 (\neq \lambda_2)$, то без ограничения общности можем предположить, что $\lambda_1 \neq \lambda_3$ (но, может быть, $\lambda_1 = \lambda_2$). Тогда λ_3 оказывается простым корнем, и ему, как только что доказано, соответствует единственное главное направление, записывающееся в нашей системе координат в виде $\{0:0:1\}$.

Посмотрим, какие направления соответствуют корню λ_2. При $\lambda = \lambda_2$ система уравнений (5) превращается в

$$\left.\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)\,\alpha &= 0, \\ 0 \cdot \beta &= 0, \\ (\lambda_3 - \lambda_2)\,\gamma &= 0 \quad (\text{т. е. } \gamma = 0). \end{aligned}\right\} \tag{5''}$$

При $\lambda_1 \neq \lambda_2$ получаем единственное направление $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\beta \neq 0$, т. е. $\{0:1:0\}$, и оно перпендикулярно к направлению $\{0:0:1\}$, соответствующему корню λ_3.

При $\lambda_1 = \lambda_2$ уравнения (5″) превращаются в

$$\left.\begin{aligned} 0 \cdot \alpha &= 0, \\ 0 \cdot \beta &= 0, \\ (\lambda_3 - \lambda_2)\,\gamma &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{5'''}$$

им удовлетворяют все векторы вида $\{\alpha, \beta, 0\}$, т. е. все векторы, перпендикулярные к вектору $e_3 = \{0, 0, 1\}$, и только они.

Этим доказано и утверждение VII (значит, и VIII), и утверждение IX.

Наконец, при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ уравнения (5‴) превращаются в тождества

$$\begin{aligned} 0 \cdot \alpha &= 0, \\ 0 \cdot \beta &= 0, \\ 0 \cdot \gamma &= 0; \end{aligned}$$

им удовлетворяет любое направление $\{\alpha:\beta:\gamma\}$, чем доказано утверждение X.

Рассмотрим случай, когда имеется равный нулю корень характеристического уравнения, например $\lambda_3 = 0$; как мы знаем, соответствующее этому корню главное направление является особым. Направим по этому направлению ось z, так что вектор $\{0, 0, 1\}$ является особым; подставив $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ в уравнения

$$\left.\begin{aligned} L &\equiv a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ M &\equiv a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma = 0, \\ N &\equiv a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

которые характеризуют особые направления, получим:

$$a_{13}=0, \quad a_{23}=0, \quad a_{33}=0. \tag{7}$$

Итак, в прямоугольной системе координат, в которой ось z имеет особое направление, форма $\varphi(x, y, z)$ имеет вид

$$\varphi(x, y, z)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+0\cdot z^2,$$

а после поворота на надлежащий угол имеет вид

$$\varphi(x, y, z)\equiv\varphi'(x', y', z')\equiv\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2.$$

Если при этом имеется лишь одно особое направление, то $r=2$ и, значит, $\lambda_1\neq0$, $\lambda_2\neq0$. Если же имеется два различных особых направления, то их имеется целое двумерное многообразие, так что можно, например, осям z и y придать взаимно перпендикулярные особые направления. Подставляя в уравнения (6) $\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=0$, получим в добавление к (7) еще и

$$a_{12}=0, \quad a_{22}=0, \quad a_{32}=0, \tag{7'}$$

так что в такой координатной системе будет

$$\varphi(x, y, z)\equiv a_{11}x^2+0\cdot y^2+0\cdot z^2,$$

где $a_{11}=\lambda_1$ — единственный не равный нулю корень уравнения (3).

Все дальнейшие упрощения в уравнении

$$F(x, y, z)\equiv\varphi(x, y, z)+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0$$

достигаются надлежащим переносом начала координат (и в одном случае еще дополнительным поворотом осей координат).

§ 7. Приведение к каноническому виду уравнения поверхности второго порядка

Пусть дана поверхность второго порядка своим уравнением

$$F(x, y, z)\equiv\varphi(x, y, z)+2l(x, y, z)+a_0=0 \tag{1}$$

относительно некоторой прямоугольной системы координат $Oxyz$. Как мы видели в § 6, всегда существует по крайней мере одна прямоугольная система координат $Ox'y'z'$, оси которой имеют главные направления. В этой системе координат уравнение поверхности (1) имеет вид

$$F'(x', y', z')\equiv\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2+2a_1'x'+2a_2'y'+2a_3'z'+a_0=0. \tag{1'}$$

Начнем с центрального случая: $\delta\neq0$, $r=3$. В этом случае $\lambda_1\neq0$, $\lambda_2\neq0$, $\lambda_3\neq0$. Если перенести начало координат O системы $Ox'y'z'$ в единственный центр поверхности (1), то уравнение (1')

примет вид

$$F(x,\ y,\ z)\equiv F''(x'',\ y'',\ z'')\equiv\lambda_1x''^2+\lambda_2y''^2+\lambda_3z''^2+a_0'=0. \qquad (I)$$

Помня, что большой и малый детерминанты Δ и δ суть ортогональные инварианты, можем для их вычисления воспользоваться правой частью уравнения (I), что дает $\delta=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, $\Delta=\lambda_1\lambda_2\lambda_3a_0'$, т. е. $a_0'=\frac{\Delta}{\delta}$ (результат, известный нам еще из главы XIX, § 5). Итак, окончательный вид уравнения (1) в выбранной нами прямоугольной системе координат есть[1])

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+\frac{\Delta}{\delta}=0. \qquad (I^*)$$

Здесь все коэффициенты однозначно (с точностью до общего числового множителя k) определены уравнением (1) поверхности, в какой бы исходной прямоугольной системе координат $Oxyz$ мы его ни задавали. Если та же поверхность задана в той же исходной системе координат другим уравнением:

$$G(x,\ y,\ z)=0,$$

то в силу теоремы единственности все коэффициенты многочлена $G(x,\ y,\ z)$ получаются из соответствующих коэффициентов многочлена $F(x,\ y,\ z)$ умножением на некоторое число $k\neq0$. Так как при переходе к новой системе координат $O'x'y'z'$ многочлены F и G тождественно преобразуются соответственно в многочлены $F'(x',\ y',\ z')$ и $G'(x',\ y',\ z')$, то и для соответствующих приведенных многочленов F' и G' сохраняется соотношение $G'=kF'$, так что, в частности, характеристические числа многочлена G (т. е. квадратичной формы его старших членов) получаются из характеристических чисел многочлена F умножением на то же k; то же справедливо и для отношения $\frac{\Delta}{\delta}$ (при $\delta\neq0$). Последнее ясно и непосредственно: так как детерминант Δ — четвертого порядка, а δ — третьего, то при умножении всех коэффициентов многочлена $F(x,\ y,\ z)$ на k детерминант Δ умножается на k^4, а детерминант δ — на k^3, значит, $\frac{\Delta}{\delta}$ умножается на k. Отсюда следует, в частности, что, умножая, если нужно, обе части уравнения $F(x,y,z)=0$ на $k=-1$, можно всегда достигнуть того, чтобы (при $\delta\neq0$) число $\frac{\Delta}{\delta}$ было отрицательным (или равным нулю). Эта нормировка уравнения центральной поверхности совпадает с той, о которой мы говорили в § 5 главы XIX, так как $\frac{\Delta}{\delta}$ есть значение многочлена $F(x,\ y,\ z)$ в единственном центре центральной поверхности (1).

Теперь имеется две возможности: $\Delta=0$ и $\Delta\neq0$. Начнем с первой.

1° $\Delta=0$. Получаем конус второго порядка вещественный, если среди характеристических чисел λ_1, λ_2, λ_3 имеются числа разных

[1]) Пишем снова x, y, z вместо x'', y'', z''.

знаков[1]). Умножая, если понадобится, обе части уравнения (1) на -1, можем предположить, что среди его коэффициентов λ_1, λ_2, λ_3 имеется два положительных и один отрицательный. Изменив, если потребуется, наименования осей координат и обозначая положительные коэффициенты через $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, а отрицательный через $-\frac{1}{c^2}$, можем представить при $\Delta=0$ уравнение (I*) в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

(причем здесь и всюду дальше берем a, b, c положительными). Это каноническое уравнение вещественного конуса.

Заметим, что равенство $\lambda_1=\lambda_2$ означает $a=b$; тогда мы имеем круговой конус или конус вращения, его сечения плоскостями $z=h$ суть окружности; если $\lambda_1=\lambda_2=-\lambda_3$, то уравнение конуса превращается в

$$x^2+y^2-z^2=0$$

— имеем круговой конус, образующие которого наклонены к его оси под углом $\frac{\pi}{4}$.

Если все характеристические числа — одного знака, мы можем переписать уравнение (I*) при $\Delta=0$ в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Это каноническое уравнение мнимого конуса.

2° Пусть теперь $\Delta\neq 0$; это значит, что мы имеем невырожденную центральную поверхность.

Переписываем тогда уравнение (I*) в виде

$$\frac{x^2}{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}}+\frac{y^2}{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}}+\frac{z^2}{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_3}}=1. \qquad (I^{**})$$

---

[1]) Здесь целесообразно привести так называемое правило Декарта для определения знаков корней алгебраического уравнения, все корни которого — действительные числа. Это правило в применении к уравнению третьей степени с действительными корнями можно сформулировать так. Пусть дано уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Назовем «переменой знака» пару соседних коэффициентов в этом уравнении (т. е. (a, b), (b, c) или (c, d), состоящую из двух чисел различных знаков. Оказывается, что число положительных корней уравнения третьей степени (все корни которого действительны) равно числу перемен знака в этом уравнении. При этом корни считаются вместе с их кратностями. Доказательство можно найти, например, в «Курсе высшей алгебры» А. Г. Куроша, § 41, стр. 258 (издание восьмое).

Возможны четыре случая [1]):

а) Все три характеристические числа имеют один и тот же знак, и $\Delta > 0$, тогда можем положить

$$\frac{\Delta}{\delta\lambda_1} = a^2, \quad \frac{\Delta}{\delta\lambda_2} = b^2, \quad \frac{\Delta}{\delta\lambda_3} = c^2,$$

причем a, b, c всегда считаем положительными. Переписываем уравнение (I**) в виде

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

— получили каноническое уравнение мнимого эллипсоида.

б) Все три характеристических числа имеют один и тот же знак, и $\Delta < 0$. Тогда полагаем

$$-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1} = a^2, \quad -\frac{\Delta}{\delta\lambda_2} = b^2, \quad -\frac{\Delta}{\delta\lambda_3} = c^2$$

— получаем каноническое уравнение вещественного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

в) Характеристические числа имеют разные знаки, и $\Delta < 0$. Предположим, что числа λ_1 и λ_2 имеют одинаковые знаки, а λ_3 имеет знак, им противоположный. Полагаем

$$\frac{\Delta}{\delta\lambda_1} = a^2, \quad \frac{\Delta}{\delta\lambda_2} = b^2, \quad -\frac{\Delta}{\delta\lambda_3} = c^2.$$

Получаем уравнение

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

— каноническое уравнение двуполостного гиперболоида. И наконец,

г) Характеристические числа имеют разные знаки, и $\Delta > 0$. Предположим снова, что числа λ_1 и λ_2 имеют одинаковые знаки, а число λ_3 — знак, им противоположный. Тогда, полагая

$$-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1} = a^2, \quad -\frac{\Delta}{\delta\lambda_2} = b^2, \quad \frac{\Delta}{\delta\lambda_3} = c^2,$$

придаем уравнению (I**) вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Это каноническое уравнение однополостного гиперболоида.

Итак, *каждая центральная поверхность второго порядка есть либо конус (действительный или мнимый), либо эллипсоид (действительный или мнимый), либо гиперболоид (двуполостный или однополостный).*

---

[1]) Пишем снова x, y, z вместо x'', y'', z''.

Положительные числа a, b, c в каноническом уравнении центральной поверхности, являющиеся ее *полуосями*, выражаются через характеристические числа λ_1, λ_2, λ_3 и детерминанты Δ, δ, т. е. через ортогональные инварианты многочлена $F(x, y, z)$, и, значит, не меняются при переходе от прямоугольной координатной системы $Oxyz$, в которой задано уравнение $F(x, y, z)=0$ рассматриваемой поверхности, к любой другой прямоугольной координатной системе. Но они не зависят также и от того, каким из уравнений, определяющих в первоначальной системе $Oxyz$ данную поверхность, мы воспользовались. В самом деле, уравнения эти отличаются друг от друга только числовым множителем k. Но при умножении всех коэффициентов многочлена $F(x, y, z)$ на данное число k на это же k умножаются и $\frac{\Delta}{\delta}$, и все характеристические числа λ_1, λ_2, λ_3; поэтому a^2, b^2, c^2, значит, и a, b, c остаются неизменными. Итак, *полуоси центральной поверхности не зависят ни от выбора прямоугольной системы координат, ни от того уравнения (из числа определяющих данную поверхность), которым в этой системе координат мы нашу поверхность задали; они зависят только от самой поверхности как геометрической фигуры, т. е. как множества точек в пространстве.*

Обратно, если дано наименование центральной поверхности и ее полуоси a, b, c, то поверхность вполне определена с точностью до ее положения в пространстве. В самом деле, две одноименные поверхности с одними и теми же полуосями имеют одно и то же каноническое уравнение; значит, отличаться они могут лишь тем, что первая из них этим уравнением определена в одной прямоугольной координатной системе, а вторая — в другой; но, совмещая первую координатную систему со второй посредством (собственного или несобственного) движения, мы совместим одну из наших поверхностей с другой.

Итак, *две центральные поверхности тогда и только тогда изометричны между собою, когда они имеют одно и то же наименование и когда их полуоси (соответствующие членам канонического уравнения данных знаков) соответственно равны между собою.*

Заметим, что (как непосредственно следует из определений чисел a, b, c) во всех рассмотренных случаях два характеристических числа равны между собою тогда и только тогда, когда соответствующие две полуоси центральной поверхности равны и входят в каноническое уравнение поверхности с одним и тем же знаком.

Мы видели (в гл. XVIII), что равенство двух каких-либо полуосей, например $a=b$, эллипсоида означает, что мы имеем эллипсоид вращения (сферу, если $a=b=c$). Поэтому признаком эллипсоида вращения является равенство двух характеристических чисел, а признаком сферы — равенство $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$.

Точно так же однополостный гиперболоид является гиперболоидом вращения, если $a^2=b^2$, т. е. $\lambda_1=\lambda_2$; то же верно и для двуполостного гиперболоида, и для конуса. Итак, равенство двух характеристических чисел необходимо и достаточно для того, чтобы центральная поверхность была поверхностью вращения, а равенство $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ верно для сферы (действительной или мнимой), и только для нее.

Переходим к случаю поверхности (1) ранга $r=2$. Покажем, что в этом случае уравнение (1) определяет: при $\Delta\neq 0$ (т. е. $R=4$) параболоид,

эллиптический, если $\Delta<0$,

гиперболический, если $\Delta>0$,

а при $\Delta=0$, $R=3$ — «центральный» (т. е. эллиптический или гиперболический) цилиндр, вырождающийся при $R=r=2$ в пару пересекающихся плоскостей.

Итак, пусть $r=2$. Тогда среди характеристических чисел многочлена $F(x, y, z)$ два, положим λ_1 и λ_2, отличны от нуля и $\lambda_3=0$.

В некоторой прямоугольной системе координат $Ox'y'z'$ (с тем же началом, что и исходная система $Oxyz$) уравнение (1) принимает вид

$$F'(x', y', z')\equiv\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+2a'_1x'+2a'_2y'+2a'_3z'+a_0=0.$$

Имеем

$$\Delta=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & a'_1\\ 0 & \lambda_2 & 0 & a'_2\\ 0 & 0 & 0 & a'_3\\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a_0\end{vmatrix}=-a'^2_3\lambda_1\lambda_2, \tag{2}$$

откуда заключаем, что $\Delta\neq 0$ тогда и только тогда, когда $a'_3\neq 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\Delta\neq 0$ и, следовательно, $a'_3\neq 0$. Перенос начала координат O в произвольную точку $O'=(x'_0, y'_0, z'_0)$, т. е. преобразование

$$\begin{aligned}x'&=x''+x'_0,\\ y'&=y''+y'_0,\\ z'&=z''+z'_0,\end{aligned}$$

переводит многочлен $F'(x', y', z')$ в

$$F''(x'', y'', z'')\equiv\lambda_1x''^2+\lambda_2y''^2+2(\lambda_1x'_0+a'_1)x''+2(\lambda_2y'_0+a'_2)y''+$$
$$+2a'_3z''+\lambda_1x'^2_0+\lambda_2y'^2_0+2a'_1x'_0+2a'_2y'_0+2a'_3z'_0+a_0=0.$$

Определяя x'_0, y'_0 и z'_0 из уравнений

$$\lambda_1x'_0+a'_1=0,\qquad \lambda_2y'_0+a'_2=0,$$
$$\lambda_1x'^2_0+\lambda_2y'^2_0+2a'_1x'_0+2a'_2y'_0+2a'_3z'_0+a_0=0,$$

получаем

$$F''(x'', y'', z'')=\lambda_1x''^2+\lambda_2y''^2+2a'_3z''=0.$$

Итак, в надлежаще выбранной прямоугольной системе координат уравнение всякой поверхности ранга $r=2$, $R=4$ принимает вид

$$\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2+2a_3'z''=0. \tag{II}$$

Из (2) получаем

$$|a_3'|=\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2}}.$$

Так как a_3' — вещественное число, то Δ имеет всегда знак, противоположный знаку $\lambda_1\lambda_2$. Другими словами, Δ положителен, если характеристические числа λ_1 и λ_2 разных знаков (гиперболический случай), и отрицательно, если λ_1 и λ_2 одного и того же знака (эллиптический случай). Изменив, если нужно, положительное направление оси z на противоположное, всегда можем предположить, что знак a_3' противоположен знаку λ_1, так что уравнение (II) можно переписать в виде (мы отбрасываем штрихи при координатах)

$$2z=\frac{x^2}{-\frac{a_3'}{\lambda_1}}+\frac{y^2}{-\frac{a_3'}{\lambda_2}}, \tag{II*}$$

где $-\frac{a_3'}{\lambda_1}$ есть положительное число, которое мы обозначим через p:

$$p=-\frac{a_3'}{\lambda_1}=+\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1^3\lambda_2}}.$$

Число $-\frac{a_3'}{\lambda_2}$ положительно, если знак λ_2 совпадает со знаком λ_1 (т. е. в эллиптическом случае, $\Delta<0$), и отрицательно, если λ_1 и λ_2 разных знаков (т. е. в гиперболическом случае, $\Delta>0$).

Поэтому, полагая в обоих случаях

$$q=\left|\frac{a_3'}{\lambda_2}\right|=+\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2^3}},$$

имеем:

$q=-\frac{a_3'}{\lambda_2}$ в эллиптическом случае,

$q=\frac{a_3'}{\lambda_2}$ в гиперболическом случае.

Соответственно получаем: в эллиптическом случае уравнение

$$2z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}$$

эллиптического, а в гиперболическом случае уравнение

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$$

гиперболического параболоида. Параметры p и q параболоида выражаются через ортогональные инварианты Δ, λ_1, λ_2 и поэтому не зависят от той прямоугольной системы координат, в которой было задано первоначальное уравнение (1) параболоида. Они не меняются при умножении многочлена $F(x, y, z)$ на числовой множитель k (так как при этом Δ умножается на k^4, а λ_1 и λ_2 — на k), поэтому они зависят лишь от самой поверхности (рассматриваемой как множество ее точек) и в свою очередь определяют ее однозначно (с точностью до ее положения в пространстве).

Равенство $\lambda_1 = \lambda_2$ означает, что мы имеем эллиптический параболоид с равными параметрами $p = q$, т. е. параболоид вращения.

Пусть теперь $\Delta = 0$, значит, и $a_3' = 0$. Тогда большой ранг $R \leqslant 3$. Уравнение (1′) в этом случае приобретает вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_1' x' + 2a_2' y' + a_0 = 0. \tag{3}$$

Применим к этому уравнению преобразование параллельного переноса

$$\begin{aligned} x' &= x'' + x_0', \\ y' &= y'' + y_0', \\ z' &= z''. \end{aligned}$$

Тогда будем иметь

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + 2(\lambda_1 x_0' + a_1')\, x'' + 2(\lambda_2 y_0' + a_2')\, y'' + a_0' = 0, \tag{4}$$

где

$$a' = \lambda_1 x_0'^2 + \lambda_2 y_0'^2 + 2a_1' x_0' + 2a_2' y_0' + a_0.$$

Определяя x_0' и y_0' из уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_0' + a_1' &= 0, \\ \lambda_2 y_0' + a_2' &= 0, \end{aligned}$$

приведем уравнение (4) к виду

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_0' = 0, \tag{III}$$

причем $R = 3$, если $a_0' \neq 0$, и $R = 2$, если $a_0' = 0$. Уравнение (1) задает (в системе координат $O'x''y''z''$) цилиндр над лежащей в плоскости $z'' = 0$ центральной кривой второго порядка, имеющей (в прямоугольной системе координат $O'x''y''$) то же уравнение (III). При $R = 3$ (т. е. $a_0' \neq 0$) эта кривая нераспадающаяся, при $R = 2$ она распадается на пару прямых, а цилиндр (III) вырождается в пару пересекающихся плоскостей. Любая плоскость $z'' = h$ пересекает цилиндрическую поверхность (III) по кривой, имеющей то же уравнение (III),

в плоскости $z''=h$ (в системе координат с началом $O''=(0, 0, h)$ и теми же направлениями осей x'' и y'', что и в координатной системе $O'x''y''z''$). Все эти кривые конгруэнтны между собою; достаточно знать одну из них, чтобы цилиндрическая поверхность (III) была определена. Пусть $R=3$. Тогда полуоси a, b кривой (III) (называемые также *полуосями цилиндрической поверхности* (III)), вместе с ее наименованием, полностью определяют поверхность (III) с точностью до ее положения в пространстве и в свою очередь всецело определяются ею. Чтобы определить полуоси a, b по первоначальному уравнению (I), надо только определить a_0'.

Для определения числа a' надо найти какую-нибудь точку прямой центров (из системы определяющих ее уравнений в исходной системе координат) и подставить координаты этой точки в левую часть первоначального уравнения поверхности. Полученный результат не зависит от выбора точки на прямой центров.

Переписывая уравнение кривой (III) в каноническом виде, мы получаем и каноническое уравнение

$$\frac{x''^2}{a^2}\pm\frac{y''^2}{b^2}=1$$

эллиптического, соответственно гиперболического, цилиндра, а также (если кривая (III) есть мнимый эллипс) уравнение $-\frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=1$ мнимого эллиптического цилиндра в прямоугольной системе координат $O'x''y''z''$. Снова равенство $\lambda_1=\lambda_2$ является признаком того, что наша цилиндрическая поверхность есть поверхность вращения, т. е. так называемый *круглый цилиндр;* его сечения плоскостями, перпендикулярными к образующим, суть окружности.

Пусть теперь $R=r=2$; тогда $a_0'=0$ и уравнение (III) превращается в уравнение

$$\lambda_1x''^2+\lambda_2y''^2=0,$$

задающее (в прямоугольной системе координат $O'x''y''z''$) пару пересекающихся плоскостей (вещественных, если λ_1 и λ_2 разных знаков; мнимых, если λ_1 и λ_2 одного знака). При этом отношение $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, характеризующее двугранный угол между плоскостями, полностью определяется этой парой плоскостей и в свою очередь полностью ее определяет.

Переходим к поверхностям ранга $r=1$. Для этих поверхностей лишь одно характеристическое число, пусть λ_2, отлично от нуля и $\lambda_1=\lambda_3=0$.

Если ось Oy' прямоугольной системы координат направить по единственному главному направлению, соответствующему отличному от нуля корню характеристического уравнения, а оси Ox' и Oz'

взять под прямым углом в плоскости, перпендикулярной к уже выбранной оси Oy' (а в остальном — произвольно), то во всякой такой системе координат уравнение нашей поверхности будет иметь вид

$$F(x, y, z) \equiv F'(x', y', z') = \lambda_2 y'^2 + 2a_1' x' + 2a_2' y' + 2a_3' z' + a_0 = 0. \quad (5)$$

Для поверхности ранга $r = 1$ всегда $R \leqslant 3$.

Пусть $R = 3$; тогда по крайней мере один из коэффициентов a_1', a_3' отличен от нуля (иначе в матрице коэффициентов многочлена $F'(x', y', z')$ все детерминанты третьего порядка будут равны нулю).

Пусть, например, $a_3' \neq 0$. Покажем, что в рассматриваемом случае поверхность (5) будет параболическим цилиндром. Наша задача сейчас — найти такую прямоугольную систему координат, в которой уравнение (5) примет канонический вид

$$y^2 = 2px. \quad (\text{IV})$$

Для этого произведем поворот координатной системы $Ox'y'z'$ вокруг оси y' на некоторый, пока произвольный, угол α, т. е. сделаем ортогональное преобразование координат

$$\begin{aligned} x' &= x'' \cos\alpha - z'' \sin\alpha, \\ y' &= y'', \\ z' &= x'' \sin\alpha + z'' \cos\alpha, \end{aligned}$$

что тождественно преобразует левую часть уравнения (5) в

$$\begin{aligned} F''(x'', y'', z'') \equiv{}& \lambda_2 y''^2 + 2a_1' (x'' \cos\alpha - z'' \sin\alpha) + \\ &+ 2a_2' y'' + 2a_3' (x'' \sin\alpha + z'' \cos\alpha) + a_0 \equiv \\ \equiv{}& \lambda_2 y''^2 + 2a_2' y'' + 2 (a_1' \cos\alpha + a_3' \sin\alpha) x'' + \\ &+ 2 (a_3' \cos\alpha - a_1' \sin\alpha) z'' + a_0 = 0. \end{aligned}$$

Приравниваем коэффициент при z'' нулю, что дает тригонометрическое уравнение

$$a_3' \cos\alpha - a_1' \sin\alpha = 0,$$

из которого и определяем α:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a_1'}{a_3'}.$$

В полученной прямоугольной системе координат уравнение (5) приобретает вид

$$\lambda_2 y''^2 + 2a_2' y'' + 2bx'' + a_0 = 0, \quad (6)$$

где положено

$$b = a_1' \cos\alpha + a_3' \sin\alpha.$$

При этом $b \neq 0$ (иначе матрица коэффициентов уравнения (6) имела бы ранг $\leqslant 2$ вопреки предположению, что $R = 3$).

Уравнение (6) есть уравнение цилиндра над параболой, лежащей в плоскости $z''=0$ и имеющей (в системе координат $Ox''y''$) то же уравнение (6). Остается только произвести сдвиг начала координат (в той же плоскости $Ox''y''$). Мы получим после этого сдвига прямоугольную систему координат, в которой уравнение (6) параболы, а следовательно, и построенного над нею цилиндра примет канонический вид (IV). Поставленная задача решена.

Число p, являющееся параметром параболы, получающейся при сечении параболического цилиндра плоскостью, перпендикулярной к его образующим, называется *параметром параболического цилиндра*. Это число определено самим цилиндром и в свою очередь определяет его с точностью до его положения в пространстве. Можно было бы указать формулы, позволяющие вычислить параметр параболического цилиндра непосредственно по коэффициентам его уравнения в произвольной прямоугольной системе координат. Мы, однако, этого делать не будем, отсылая читателя к более подробному курсу Б. Н. Делоне и Д. А. Райкова.

Пусть теперь $R\leqslant 2$. Тогда поверхность является парой параллельных (в широком смысле) плоскостей π_1, π_2; канонической системой координат будет произвольная прямоугольная система координат, одна из осей которой (положим, ось y) перпендикулярна к плоскостям π_1, π_2, а две другие оси расположены в средней плоскости между этими плоскостями. Тогда уравнение пары плоскостей π_1, π_2 будет

$$y=\pm b. \tag{7}$$

К этому результату можно прийти и из рассмотрения уравнения (5), в котором теперь непременно $a_1=a_3=0$ (если хотя бы один из коэффициентов a_1, a_3 был $\neq 0$, то мы имели бы параболический цилиндр и, значит, $R=3$).

Итак, уравнение (5) имеет в нашем случае вид

$$\lambda_2 y'^2+2a_2'y'+a_0=0.$$

Посредством сдвига начала координат по оси ординат преобразуем его в

$$\lambda_2 y''^2+k=0, \tag{V}$$

что эквивалентно каноническому уравнению (7).

Общим итогом этого параграфа является

Теорема 3. *Каждая поверхность, определяемая уравнением второй степени с вещественными коэффициентами, принадлежит к одному из следующих семнадцати классов:*

1. *Эллипсоиды вещественные.*
2. *Эллипсоиды мнимые.*
3. *Гиперболоиды однополостные.*

4. *Гиперболоиды двуполостные.*
5. *Конусы вещественные.*
6. *Конусы мнимые.*
7. *Параболоиды эллиптические.*
8. *Параболоиды гиперболические.*
9. *Цилиндры эллиптические вещественные.*
10. *Цилиндры эллиптические мнимые.*
11. *Цилиндры гиперболические.*
12. *Цилиндры параболические.*
13. *Поверхности, распадающиеся на пару пересекающихся вещественных плоскостей.*
14. *Поверхности, распадающиеся на пару пересекающихся мнимых сопряженных плоскостей.*
15. *Поверхности, распадающиеся на пару (различных) параллельных вещественных плоскостей.*
16. *Поверхности, распадающиеся на пару (различных) параллельных мнимых сопряженных плоскостей.*
17. *Поверхности, распадающиеся на пару совпадающих вещественных плоскостей.*

§ 8. Аффинная классификация поверхностей второго порядка

Докажем, что любые две поверхности, принадлежащие к какому-нибудь одному из перечисленных в конце предыдущего параграфа классов, аффинно эквивалентны между собою.

Для этого достаточно показать, что каждая из перечисленных поверхностей аффинно эквивалентна некоторой простейшей поверхности того же наименования.

Возьмем эллипсоид, заданный в канонической (прямоугольной) системе координат $Oxyz$ уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Рассмотрим аффинное преобразование

$$x'=\frac{x}{a},\quad y'=\frac{y}{b},\quad z'=\frac{z}{c}. \tag{1}$$

Это преобразование переводит эллипсоид в сферу, имеющую в той же (прямоугольной) системе координат $Oxyz$ уравнение

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Таким образом, каждый эллипсоид аффинно эквивалентен единичной сфере, концентрической с данным эллипсоидом.

То же аффинное преобразование (1) переводит однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

в гиперболоид

$$x^2+y^2-z^2=1;$$

двуполостный гиперболоид

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

в гиперболоид

$$-x^2-y^2+z^2=1;$$

конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

в конус

$$x^2+y^2-z^2=0;$$

мнимый конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

в мнимый конус

$$x^2+y^2+z^2=0.$$

Возьмем теперь эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$

и применим к нему аффинное преобразование

$$x'=\frac{x}{\sqrt{p}},\quad y'=\frac{y}{\sqrt{q}},\quad z'=z. \tag{2}$$

Это преобразование переводит данный параболоид в простейший параболоид, имеющий в той же системе координат уравнение

$$x^2+y^2=2z.$$

То же преобразование (2) переводит гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$

в параболоид

$$x^2 - y^2 = 2z.$$

Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

мнимый эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

пара мнимых пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

пара действительных пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

аффинным преобразованием

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{b}, \quad z' = z \tag{3}$$

переводятся соответственно в одноименные поверхности, имеющие в той же системе координат уравнения:

$$x^2 + y^2 = 1,$$
$$x^2 + y^2 = -1,$$
$$x^2 + y^2 = 0,$$
$$x^2 - y^2 = 1,$$
$$x^2 - y^2 = 0.$$

Параболический цилиндр

$$y^2 = 2px$$

после преобразования

$$x' = px, \quad y' = y, \quad z' = z \tag{4}$$

получает уравнение

$$y^2 = 2x.$$

Поверхности, распадающиеся на пары параллельных плоскостей

$$x^2 \pm a^2 = 0,$$

аффинно эквивалентны соответственно поверхностям

$$x^2 \pm 1 = 0$$

(верхний знак + соответствует мнимым, нижний знак — действительным плоскостям).

Остается доказать, что две поверхности, принадлежащие к различным классам, не могут быть аффинно эквивалентными. Мы сейчас дадим чисто геометрическое доказательство.

Рассмотрим прежде всего свойство поверхности быть центральной, т. е. иметь единственный центр симметрии. Так как при аффинном преобразовании центр симметрии данной фигуры переходит в центр симметрии преобразованной фигуры, то всякий аффинный образ поверхности второго порядка с единственным центром снова есть поверхность второго порядка с единственным центром [1]).

Итак, при аффинном преобразовании всякая центральная поверхность переходит снова в центральную.

Далее, среди центральных поверхностей невырожденные характеризуются тем, что их центр не лежит на данной поверхности. Поэтому аффинный образ невырожденной (соответственно вырожденной) центральной поверхности есть невырожденная (соответственно вырожденная) центральная поверхность.

Невырожденные центральные поверхности суть эллипсоиды, однополостные и двуполостные гиперболоиды; ни одна из этих поверхностей не может при аффинном преобразовании перейти в поверхность другого наименования.

В самом деле, эллипсоид не может быть аффинно эквивалентен никакой другой поверхности второго порядка, так как среди всех поверхностей второго порядка лишь эллипсоиды обладают свойством лежать внутри некоторого параллелепипеда (все остальные поверхности второго порядка простираются в бесконечность [2])).

Двуполостный и однополостный гиперболоиды аффинно не эквивалентны, так как у двуполостных гиперболоидов нет вещественных прямолинейных образующих, а у однополостных они есть. Очевидно также, что при аффинном преобразовании вещественный эллипсоид не может перейти в мнимый, так же как вещественный конус не может перейти в мнимый.

Итак, любой аффинный образ центральной поверхности данного наименования есть необходимо центральная поверхность того же наименования.

---

[1]) Если бы у преобразованной поверхности было несколько центров, то при обратном преобразовании все эти центры перешли бы в центры первоначальной поверхности. А у нее, по предположению, имеется лишь один центр.

[2]) Ср. с аналогичным свойством, выделяющим эллипсы среди всех кривых второго порядка (гл. XVI, § 5).

Переходим к нецентральным поверхностям.

Прежде всего, очевидно, что аффинный образ всякой поверхности, распадающейся в пару пересекающихся, соответственно параллельных (в широком или собственном смысле), плоскостей есть снова поверхность того же наименования, причем сохраняется и свойство поверхности быть вещественной или мнимой.

Остаются параболоиды и цилиндры.

Нецентральная поверхность при аффинном преобразовании не может перейти в центральную (иначе обратное преобразование перевело бы центральную поверхность в нецентральную). Поэтому аффинный образ параболоида или цилиндра не может быть центральной поверхностью; не может он быть и парой плоскостей.

Далее, аффинный образ параболоида не может быть ни эллиптическим, ни гиперболическим цилиндром (так как у параболоидов нет ни одного центра, а у названных цилиндров имеется целая прямая центров).

Гиперболический и эллиптический параболоиды аффинно различны, так как у гиперболического параболоида имеются (вещественные) прямолинейные образующие, а у эллиптического параболоида их нет.

По этой же причине эллиптический параболоид аффинно отличен от параболического цилиндра. Аффинная неэквивалентность гиперболического параболоида и параболического цилиндра вытекает из того, что асимптотические векторы гиперболического параболоида заполняют два различных двумерных векторных многообразия (это все векторы, параллельные одной какой-нибудь из двух пересекающихся плоскостей), тогда как асимптотические направления параболического цилиндра образуют одно-единственное двумерное векторное многообразие.

Неэквивалентность (какого бы то ни было) цилиндра (какому бы то ни было) параболоиду вытекает также из того, что у цилиндра все образующие параллельны между собою, тогда как ни один параболоид этому условию не удовлетворяет.

Из сказанного следует, что аффинным образом эллиптического (соответственно гиперболического) параболоида может быть только параболоид того же наименования.

Аффинным образом гиперболического или эллиптического цилиндра не может быть ни параболоид, ни пара плоскостей, ни центральная поверхность; не может им быть и параболический цилиндр, у которого нет ни одного центра, тогда как у эллиптического и гиперболического цилиндров имеется прямая центров.

Остается доказать, что эллиптический и гиперболический цилиндры аффинно различны. Это вытекает из того, что совокупность

вещественных асимптотических векторов гиперболического цилиндра есть объединение двух двумерных векторных многообразий, тогда как многообразие всех вещественных асимптотических векторов эллиптического цилиндра одномерно.

Аффинная неэквивалентность эллиптического и гиперболического цилиндров вытекает также из того, что у эллиптического цилиндра имеются плоские сечения, являющиеся эллипсами, тогда как у гиперболического цилиндра таких сечений нет (читатель должен это доказать).

Из предыдущего анализа вытекает, наконец, что параболический цилиндр аффинно отличен от поверхностей всех других названных выше типов.

Задача аффинной классификации поверхностей второго порядка решена до конца.

ГЛАВА XXI

ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ

§ 1. Перспективное соответствие между плоскостью и связкой

Множество всех прямых и плоскостей трехмерного пространства, проходящих через данную точку O, называется *связкой с центром O* или, кратко, *связкой*[1]) O. Возьмем какую-нибудь плоскость π, не проходящую через точку O. Тогда через каждую точку M плоскости π проходит единственная прямая $m = OM$ связки O. Прямые связки будем называть *лучами*[2]). Таким образом, установлено соответствие, называемое *перспективным соответствием*, между всеми точками плоскости π и лучами связки O.

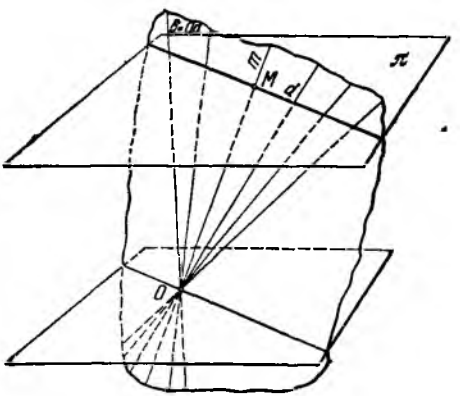


Рис. 226.

При перспективном соответствии каждой прямой d, лежащей в плоскости π, соответствует некоторая вполне определенная плоскость связки — плоскость δ, проходящая через точку O и прямую d. Плоскость эта образована всеми лучами, идущими из точки O в точки прямой d; мы будем ее обозначать через $Od = \delta$ (рис. 226).

Итак, *при перспективном соответствии точкам плоскости π соответствуют лучи связки O, а прямым плоскости π — плоскости связки O.*

---

[1]) Таким образом, связка с данным центром содержит, во-первых, связку прямых и, во-вторых, связку плоскостей с этим центром.

[2]) Название объясняется тем, что эти прямые удобно представлять себе как лучи, посылаемые во все стороны источником света, расположенным в O. Однако следует помнить, что *луч связки есть полная прямая, а не полупрямая.*

Назовем *луч* и *плоскость* связки O *инцидентными между собою*, если данный луч лежит в данной плоскости. Точно так же назовем *точку* и *прямую* на плоскости π *инцидентными между собою*, если данная точка лежит на данной прямой. Очевидно, при перспективном соответствии между связкой O и плоскостью π инцидентность сохраняется: если на плоскости π точка M инцидентна прямой d, то соответствующие луч OM и плоскость Od связки будут также инцидентны между собою, и обратно.

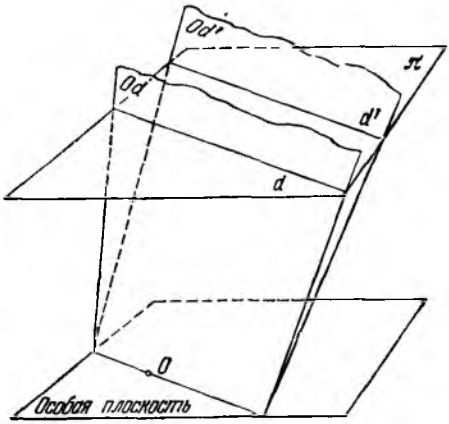


Рис. 227.

Возникает вопрос: является ли перспективное соответствие между плоскостью π и связкой O взаимно однозначным? Другими словами, каждый ли луч связки O соответствует некоторой точке M плоскости π?

Легко видеть, что этой взаимной однозначности нет: лучи связки, параллельные плоскости π, не соответствуют при перспективном соответствии никакой точке плоскости π, а плоскость связки, параллельная плоскости π, не соответствует никакой прямой плоскости π. Для сокращения речи назовем *особым лучом* связки всякий луч, параллельный плоскости π, а *особой плоскостью* связки назовем единственную плоскость, принадлежащую этой связке и параллельную плоскости π. Особые лучи и особая плоскость связки не соответствуют никаким точкам и никакой прямой плоскости π. В каждой неособой плоскости связки имеется единственный особый луч (по которому эта плоскость пересекает особую плоскость связки), и особые лучи заполняют всю особую плоскость связки.

Посмотрим, в каком случае две плоскости Od и Od' связки пересекаются по особому лучу (рис. 227). Так как особый луч связки не имеет общих точек с плоскостью π, то плоскости Od и Od' не могут иметь общих точек, принадлежащих плоскости π, т. е. прямые d и d', лежащие в плоскости π, не имеют никакой общей точки, следовательно, они параллельны. Обратно, если две прямые d и d' в плоскости π параллельны, то соответствующие им плоскости Od и Od' не могут иметь общих точек, лежащих в плоскости π, т. е. луч, по которому плоскости Od и Od' пересекаются, параллелен плоскости π, он является особым лучом. Итак, *две плоскости Od и Od' связки O тогда и только тогда пересекаются по особому лучу, когда соответствующие им прямые d и d' параллельны.*

Представляется естественным пополнить плоскость новыми — «несобственными», или «бесконечно удаленными», — точками, образующими несобственную, или бесконечно удаленную, прямую, и поставить их в соответствие с особыми лучами связки так, чтобы перспективное соответствие между связкой и пополненной плоскостью было уже взаимно однозначным. На введенные таким образом несобственные элементы мы распространим понятие инцидентности, считая, что данная обыкновенная («собственная») прямая d плоскости π инцидентна несобственной точке M_∞ тогда и только тогда, когда особый луч, которому точка M_∞ соответствует, инцидентен плоскости Od; несобственная прямая, по определению, инцидентна любой несобственной точке. Итак, при перспективном (теперь уже взаимно однозначном) соответствии между пополненной плоскостью и связкой отношение инцидентности сохраняется.

Таким образом, *пополнение плоскости несобственными элементами (несобственными точками и несобственной прямой) происходит при соблюдении следующих условий:*

1° *Каждая прямая d плоскости π пополняется единственной несобственной точкой (соответствующей единственному особому лучу плоскости Od).*

2° *Две прямые d, d' плоскости π тогда и только тогда имеют общую несобственную точку, когда они параллельны (т. е. тогда и только тогда, когда плоскости Od и Od' имеют общий особый луч).*

3° *Совокупность всех несобственных точек плоскости образует несобственную прямую (совокупность всех особых лучей связки образует особую плоскость этой связки).*

Пополненная несобственными точками и несобственной прямой плоскость π называется *проективной плоскостью*[1]); мы *будем ее обозначать через* $\overline{\pi}$. Перспективное соответствие между проективной плоскостью $\overline{\pi}$ и связкой есть взаимно однозначное соответствие между точками и прямыми плоскости, с одной стороны, и лучами и плоскостями связки, с другой стороны; это соответствие сохраняет инцидентность.

Из условий 1°, 2°, 3°, которым подчинено пополнение плоскости несобственными точками, вытекают следующие два свойства проективной плоскости:

А. *Всякие две прямые d и d' проективной плоскости пересекаются в одной точке.*

В самом деле, если прямые d и d' собственные и если на первоначальной обыкновенной плоскости π они пересекаются в точке M, то эта же точка M является и точкой пересечения прямых d и d' на проективной плоскости $\overline{\pi}$; так как несобственные точки пересе-

[1]) Точнее, проективной плоскостью в ее первом изображении или первой моделью проективной плоскости.

кающихся прямых d и d' различны, то точка M есть единственная общая точка прямых d и d' на проективной плоскости. Если прямые d и d', рассматриваемые на обыкновенной плоскости π, параллельны между собою, то на проективной плоскости $\bar{\pi}$ они имеют одну и ту же несобственную точку, и она является их единственной общей точкой.

Наконец, *несобственная прямая пересекается со всякой собственной прямой в несобственной точке этой последней.*

Предложение А можно сформулировать так: *для всяких двух различных прямых проективной плоскости имеется единственная точка, которой обе эти прямые инцидентны.*

Этому предложению как бы двойственно предложение

Б. *Для всяких двух различных точек на проективной плоскости имеется единственная прямая, которой обе эти точки инцидентны.*

Или: через каждые две точки плоскости проходит одна и только одна прямая. Это известно, если точки собственные. Предположим, что даны две точки A и B, из которых одна, положим A, собственная, а другая B — несобственная. Точка B есть несобственная точка некоторой прямой b и всех прямых, параллельных прямой b. Поэтому, проведя через точку A прямую b', параллельную прямой b (а такая прямая единственная), мы и получим прямую, инцидентную собственной точке A и несобственной точке B.

Наконец, единственная прямая, инцидентная двум несобственным точкам, есть несобственная прямая.

Аналитически пополнению плоскости несобственными точками соответствует введение так называемых однородных координат, к которому мы сейчас и переходим

§ 2. Однородные координаты точек на плоскости и лучей в связке

1. Определение однородных координат. Определение 1. Предположим, что на плоскости π дана система аффинных координат oe_1e_2 (начало ее обозначаем строчной буквой o). Пусть M — произвольная точка плоскости, x и y — ее координаты в системе oe_1e_2. Тогда всякая тройка чисел

$$x_1,\ x_2,\ x_3,$$

пропорциональная тройке

$$x,\ y,\ 1,$$

называется *тройкой однородных координат точки* M (определенных данной аффинной координатной системой oe_1e_2).

Решим две простые задачи:

а) по аффинным координатам точки M найти все тройки однородных координат этой точки;

б) по одной какой-нибудь тройке однородных координат данной точки найти ее аффинные координаты.

Первая задача решена самим определением однородных координат: тройки однородных координат данной точки $M=(x, y)$ суть все тройки x_1, x_2, x_3, пропорциональные тройке $x, y, 1$.

Вторая задача состоит в том, чтобы по данной тройке x_1, x_2, x_3 однородных координат точки M найти ту тройку $x, y, 1$, которой тройка x_1, x_2, x_3 пропорциональна. Значит, надо решить пропорцию

$$x:y:1=x_1:x_2:x_3,$$

откуда $x_1:x_3=x:1$, $x_2:x_3=y:1$, или

$$x=\frac{x_1}{x_3}, \qquad y=\frac{x_2}{x_3}. \tag{1}$$

Каждая точка $M=(x, y)$ плоскости получила бесконечное множество троек однородных координат.

Какими свойствами обладает это множество троек?

Во-первых, в нем не содержится «запрещенная тройка», состоящая из трех нулей, так как эта тройка не может быть тройкой, пропорциональной тройке вида $x, y, 1$, ни при каких x и y.

Во-вторых, любые две тройки, являющиеся элементами этого множества, пропорциональны между собою.

В-третьих, всякая тройка, пропорциональная какой-либо тройке, входящей в наше множество, сама входит в это множество.

Другими словами: *множество всех троек однородных координат какой-либо точки плоскости есть один из классов, на которые распадается множество всех вообще незапрещенных числовых троек, если считать эквивалентными всякие две пропорциональные между собою тройки.*

Кратко: *множество всех троек однородных координат какой-либо точки плоскости есть класс пропорциональных троек.*

Возникает обратный вопрос: всякий ли класс пропорциональных троек есть множество троек однородных координат какой-либо точки плоскости?

Пусть дан какой-нибудь класс троек K, и пусть x_1, x_2, x_3 — какая-нибудь тройка, входящая в этот класс. Возможны два случая:

либо $x_3\neq 0$, тогда мы эту тройку x_1, x_2, x_3 назовем *обыкновенной*;

либо $x_3=0$, тогда мы назовем тройку x_1, x_2, x_3 *особой*.

При этом, если в класс входит хотя бы одна обыкновенная тройка, то все тройки этого класса обыкновенные; если в класс входит хотя бы одна особая тройка, то все тройки этого класса особые.

Если класс K состоит из обыкновенных троек, то, взяв какую-нибудь одну из них, x_1, x_2, x_3, мы можем найти точку $M=(x, y)$

по формулам (1); это и будет точка, для которой x_1, x_2, x_3 является одной из троек однородных координат, а потому и весь данный класс K будет классом троек однородных координат точки M.

Если же данный класс состоит из особых троек, то в нем нет тройки вида x, y, 1, следовательно, такой класс не является классом, соответствующим какой-либо точке плоскости.

Итак, *точки плоскости находятся во взаимно однозначном соответствии с классами обыкновенных числовых троек.*

Посмотрим, каков геометрический смысл этого соответствия и что можно сказать об особых классах, т. е. о классах, состоящих из особых троек.

Для этого вернемся снова к связке с каким-нибудь центром O. Возьмем произвольную аффинную координатную систему $Oe_1e_2e_3$ в пространстве с началом в точке O. Координаты какого-нибудь вектора относительно этой координатной системы будем обозначать через x_1, x_2, x_3 (а не через x, y, z).

Определение 2. Пусть дан произвольный луч связки. Тройку координат x_1, x_2, x_3 любого направляющего вектора этого луча назовем *тройкой однородных координат* этого луча (в данной аффинной координатной системе $Oe_1e_2e_3$).

Так как существует бесконечное множество направляющих векторов данного луча, то каждый луч связки получает бесконечное множество троек однородных координат. Среди этих троек нет запрещенной тройки 0, 0, 0, так как она не может служить тройкой координат никакого направляющего вектора. Все эти тройки пропорциональны между собою; наконец, если дан какой-нибудь направляющий вектор $\{x_1, x_2, x_3\}$ данного луча и если тройка x_1', x_2', x_3' пропорциональна тройке x_1, x_2, x_3, то вектор $\{x_1', x_2', x_3'\}$ также будет направляющим вектором того же луча. Итак, множество всех троек однородных координат произвольного луча связки есть класс пропорциональных троек.

Нетрудно видеть, что любой класс числовых троек является классом троек однородных координат некоторого луча связки. В самом деле, пусть дан произвольный класс и в нем произвольная тройка x_1, x_2, x_3. Так как эта тройка не состоит из одних нулей, то она является тройкой координат некоторого вектора $\mathbf{u}$, отличного от нуля. Этот вектор есть направляющий вектор вполне определенного луча связки, и, значит, тройка x_1, x_2, x_3 и все пропорциональные ей тройки являются тройками однородных координат именно этого луча.

Каким же лучам связки соответствуют, в качестве троек их координат, особые тройки вида x_1, x_2, 0? Очевидно, тем и только тем лучам, которые лежат в плоскости Oe_1e_2.

Это положение вещей позволяет понять геометрический смысл введения однородных координат на плоскости.

Пусть, в самом деле, дана плоскость π с системой аффинных координат oe_1e_2 на ней. Возьмем аффинную систему $Oe_1e_2e_3$ в пространстве с началом $O \neq o$, с теми же двумя векторами e_1, e_2, что и в системе oe_1e_2 на плоскости π, и с третьим вектором $e_3 = \overrightarrow{Oo}$ (рис. 228).

Всякую такую координатную систему $Oe_1e_2e_3$ в пространстве называем *системой, естественно связанной с системой* oe_1e_2 (в плоскости π). В системе координат $Oe_1e_2e_3$ плоскость π, очевидно, имеет уравнение

$$x_3 = 1. \qquad (2)$$

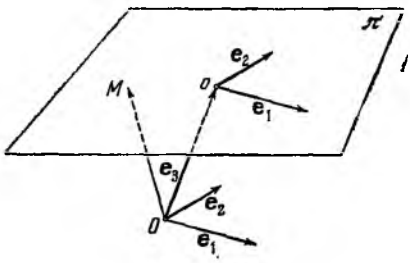


Рис. 228.

Замечание 1. Мы снова обозначаем координаты в системе $Oe_1e_2e_3$ через x_1, x_2, x_3. С другой стороны, в плоскости π относительно системы координат oe_1e_2 координаты точек (и векторов) будут обозначаться через x, y, так что координатами любой точки $M = (x, y)$ плоскости π являются в системе $Oe_1e_2e_3$

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = 1.$$

Эти координаты x_1, x_2, x_3 суть, очевидно, и координаты вектора $\overrightarrow{OM}$; тройка x_1, x_2, x_3 есть, следовательно, одна из троек однородных координат луча OM, идущего из центра связки O в точку M плоскости π.

Итак, *тройки однородных координат какой-либо точки M плоскости суть не что иное, как тройки однородных координат перспективного к этой точке луча связки* (в предположении, что аффинная координатная система $Oe_1e_2e_3$ естественно связана с системой oe_1e_2).

Так как классы особых троек суть классы однородных координат лучей связки, параллельных плоскости π, и именно этим лучам и должны соответствовать несобственные точки плоскости π, то *естественно считать особые тройки тройками однородных координат несобственных точек плоскости.*

Возвращаясь к началу этого параграфа, можем сказать:

Если в плоскости дана аффинная система координат oe_1e_2, то для каждой точки плоскости определены ее однородные координаты относительно системы oe_1e_2, причем для собственных точек плоскости аффинные и однородные координаты связаны между собою формулами (1). Пополнение плоскости несобственными точками состоит в том, что каждому классу особых троек вида x_1, x_2, 0 ставится в соответствие несобственная точка плоскости.

В результате этого пополнения множество всех без исключения классов числовых троек оказывается поставленным во взаимно однозначное соответствие с множеством всех точек плоскости.

Точку M с однородными координатами x_1, x_2, x_3 записываем так:

$$M=(x_1:x_2:x_3).$$

Замечание 2. Пусть M — несобственная точка плоскости, тогда

$$M=(x_1:x_2:0).$$

Пара чисел x_1, x_2 есть пара координат некоторого не равного нулю вектора $\{x_1, x_2\}$ плоскости; несобственные точки

$$M=(x_1:x_2:0) \quad \text{и} \quad N=(y_1:y_2:0)$$

совпадают тогда и только тогда, когда тройки x_1, x_2, 0 и y_1, y_2, 0, т. е. пары x_1, x_2 и y_1, y_2, пропорциональны, а это значит, что векторы $\{x_1, x_2\}$, $\{y_1, y_2\}$ коллинеарны, или определяют в плоскости одно и то же направление (являются направляющими векторами одной и той же прямой).

Таким образом, *несобственные точки плоскости взаимно однозначно соответствуют направлениям в плоскости* (при этом надо помнить, что два противоположных вектора определяют одно и то же направление). Несобственные точки называют также *бесконечно удаленными* и говорят, что бесконечно удаленная точка $M=(x_1:x_2:0)$ «удалена в бесконечность» в направлении вектора $\{x_1, x_2\}$ (или $\{-x_1:-x_2\}$), т. е. в направлении прямой, имеющей эти векторы своими направляющими векторами.

Мы вернулись к тому представлению о несобственных точках плоскости, которое было дано еще в § 5 главы V.

2. Уравнение прямой на плоскости в однородных координатах. Пусть на плоскости π дана прямая d своим уравнением

$$a_1x+a_2y+a_3=0 \tag{3}$$

в системе координат oe_1e_2.

Найдем уравнение, которому удовлетворяет всякая тройка однородных координат любой точки прямой d. Другими словами, найдем уравнение прямой d в однородных координатах. Для этого, взяв произвольную точку $M=(x, y)$ прямой d и какую-нибудь тройку x_1, x_2, x_3 однородных координат этой точки, выразим аффинные координаты x и y точки M через ее однородные координаты x_1, x_2, x_3 по формулам (1) и подставим полученные значения

$$x=\frac{x_1}{x_3}, \quad y=\frac{x_2}{x_3}$$

в уравнение (3). Получим

$$a_1\frac{x_1}{x_3}+a_2\frac{x_2}{x_3}+a_3=0,$$

т. е.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0. \tag{4}$$

Это и есть искомое уравнение.

Замечание 3. Этому же уравнению удовлетворяют и координаты x_1, x_2, x_3 (в системе $Oe_1e_2e_3$) любого луча связки O, лежащего в плоскости Od, и только координаты такого луча (рис. 229).

Обратно, пусть дано уравнение (4); предположим сначала, что в этом уравнении по крайней мере один из коэффициентов a_1, a_2 отличен от нуля. Посмотрим, каковы те собственные точки плоскости, которые удовлетворяют этому уравнению. Пусть собственная точка M плоскости π имеет тройку однородных координат x_1, x_2, x_3, удовлетворяющую уравнению (4). Тогда и всякая тройка однородных координат точки удовлетворяет уравнению (4); в частности, этому уравнению удовлетворяет и тройка x, y, 1, где x и y — аффинные координаты точки M. Итак, если однородные координаты точки M удовлетворяют уравнению (4), то аффинные координаты x и y этой точки удовлетворяют уравнению (3) и, следовательно, лежат на прямой (3).

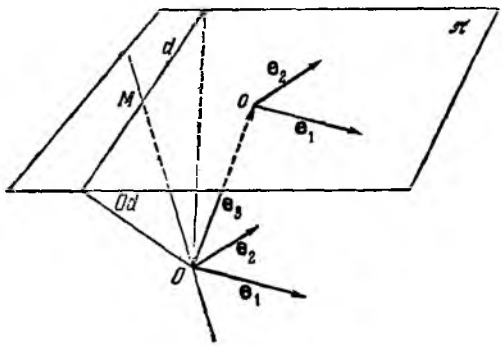


Рис. 229.

Но на проективной плоскости $\overline{\pi}$ имеется и несобственная точка, и притом только одна, удовлетворяющая уравнению (4). В самом деле, если x_1, x_2, 0 — тройка однородных координат несобственной точки, удовлетворяющей уравнению (4), то

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0, \tag{4'}$$

откуда

$$x_1 : x_2 = -a_2 : a_1;$$

единственная несобственная точка, удовлетворяющая уравнению (4), есть точка

$$(-a_2 : a_1 : 0). \tag{5}$$

Тройки класса (5) и только они суть тройки координат единственного несобственного луча, лежащего в плоскости Od. Так как при перспективном соответствии между связкой O и плоскостью $\overline{\pi}$

отношение инцидентности сохраняется, то несобственная точка (5) должна считаться инцидентной прямой d, т. е. эта точка есть (единственная) несобственная точка прямой d (в направлении которой точка и ушла в бесконечность).

Как и следовало ожидать, две прямые тогда и только тогда имеют общую несобственную точку, когда они параллельны.

Мы до сих пор рассматривали случай, когда в уравнении (4) по крайней мере один из коэффициентов a_1, a_2 отличен от нуля. Если оба коэффициента $a_1 = a_2 = 0$, то третий коэффициент $a_3 \neq 0$, и уравнение (4), имея вид $a_3 x_3 = 0$, $a_3 \neq 0$, равносильно уравнению

$$x_3 = 0. \tag{6}$$

Этому уравнению удовлетворяют все несобственные точки плоскости и только они. Уравнение (6) есть уравнение первой степени, его и естественно считать уравнением несобственной прямой плоскости.

§ 3. Координаты прямой; арифметическая проективная плоскость; общее определение проективной плоскости

1. Координаты прямой. Читателю уже давно известно, что координаты можно определять не только для точек, но и для других геометрических объектов; например, мы с самого начала этих «Лекций» говорим о координатах вектора и только что ввели понятие однородных координат луча связки. Координаты любого геометрического объекта (точки, вектора, луча связки) всегда являются числами, вполне определяющими данный геометрический объект.

Пусть теперь на проективной плоскости $\bar{\pi}$ дана прямая своим уравнением

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0. \tag{1}$$

Тройка коэффициентов a_1, a_2, a_3 вполне определяет уравнение (1) и, следовательно, прямую, выражаемую этим уравнением. При этом два уравнения: (1) и

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0, \tag{2}$$

тогда и только тогда определяют одну и ту же прямую, если их коэффициенты пропорциональны между собою, т. е. если

$$b_1 : a_1 = b_2 : a_2 = b_3 : a_3. \tag{3}$$

В самом деле, если уравнения (1) и (2) определяют одну и ту же прямую, то всякая тройка чисел x_1, x_2, x_3, удовлетворяющая одному из этих уравнений, удовлетворяет и другому, т. е. уравнения (1) и (2) эквивалентны (см. гл. X, § 2, следствие 2 теоремы 5), но два однородных уравнения (1) и (2) эквивалентны тогда и только тогда, когда их коэффициенты пропорциональны.

Определение 3. Тройка коэффициентов a_1, a_2, a_3 любого уравнения данной прямой d называется *тройкой (однородных) координат этой прямой*, а также *тройкой координат плоскости* Od *связки* O (в системе координат $Oe_1e_2e_3$, естественно связанной с системой oe_1e_2, данной в плоскости π).

Очевидно: «запрещенная» тройка 0, 0, 0 не может быть тройкой координат никакой прямой. Далее, из только что доказанного следует:

1. Любые две тройки координат данной прямой пропорциональны между собою.

2. Если данная тройка a_1, a_2, a_3 есть тройка координат данной прямой, то и всякая тройка, пропорциональная тройке a_1, a_2, a_3, есть тройка координат той же прямой.

Другими словами: множество всех троек координат данной прямой есть класс троек. Положение с однородными координатами прямых совершенно такое же, как с однородными координатами точек. Мы можем резюмировать это положение следующим образом:

Всякая (незапрещенная) тройка чисел может рассматриваться и как тройка однородных координат некоторой точки на проективной плоскости, и как тройка координат некоторой прямой. Две тройки определяют при этом одну и ту же точку, соответственно одну и ту же прямую, тогда и только тогда, когда они пропорциональны между собою.

Прямую с координатами u_1, u_2, u_3 мы обозначаем так:

$$\{u_1 : u_2 : u_3\}.$$

Прямая $\{u_1 : u_2 : u_3\}$ и точка $(x_1 : x_2 : x_3)$ инцидентны, если

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$

Пример. Прямая $x = y$ или $x_1 - x_2 = 0$ есть прямая $\{1 : -1 : 0\}$; прямая $y = 1$ или $x_2 - x_3 = 0$ есть прямая $\{0 : +1 : -1\}$; прямая $x = 0$ (ось ординат) или $x_1 = 0$ есть прямая $\{1 : 0 : 0\}$; несобственная прямая $x_3 = 0$ есть прямая $\{0 : 0 : 1\}$.

2. Арифметическая проективная плоскость. Теперь читатель готов к введению следующего определения.

Определение 4. *Арифметической проективной плоскостью* называется множество P_{ap} элементов двух родов, называемых соответственно «*арифметическими точками*» и «*арифметическими прямыми*». И те и другие суть классы пропорциональных между собою числовых троек, снабженные отметкой, указывающей, имеется ли в виду «точка» или «прямая»: точки обозначаются, например, через $(x_1 : x_2 : x_3)$, а прямые — через $\{u_1 : u_2 : u_3\}$. При этом между точками и прямыми установлено отношение инцидентности, состоящее в том, что точка $(x_1 : x_2 : x_3)$ и прямая $\{u_1 : u_2 : u_3\}$ называются *инцидентными между собою*, если

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0. \tag{4}$$

Замечание 1. Ставя в соответствие точкам $(x_1:x_2:x_3)$ и прямым $\{u_1:u_2:u_3\}$ арифметической проективной плоскости прямые и плоскости связки O, имеющие в некоторой фиксированной системе координат соответственно координаты x_1, x_2, x_3 и u_1, u_2, u_3, видим, что получаем взаимно однозначное соответствие между элементами арифметической проективной плоскости и элементами связки, сохраняющее отношение инцидентности (точка и прямая арифметической плоскости инцидентны между собою тогда и только тогда, когда инцидентны между собою соответствующие им луч и плоскость связки).

3. Общее определение проективной плоскости. Наконец, мы можем дать и следующее общее

Определение 5. *Проективной плоскостью* называется вообще всякое множество P, состоящее из элементов двух родов, называемых соответственно «*точками*» и «*прямыми*» и связанных между собою некоторым отношением, называемым *отношением инцидентности* между какой-нибудь «точкой» и какой-нибудь «прямой»[1]). При этом требуется, чтобы существовало сохраняющее инцидентность взаимно однозначное соответствие между «точками» и «прямыми» проективной плоскости P, с одной стороны, и лучами и плоскостями связки, с другой стороны: «точка» и «прямая» проективной плоскости P инцидентны между собою тогда и только тогда, когда инцидентны соответствующие им луч и плоскость связки. В частности, проективной плоскостью является и сама связка, если ее лучи называть «точками», а плоскости—«прямыми».

Замечание 2. Взаимно однозначное соответствие между элементами (точками и прямыми) двух проективных плоскостей, сохраняющее отношение инцидентности, называется *изоморфным соответствием* (*изоморфизмом*) этих двух плоскостей. Мы видим, что все проективные плоскости изоморфны связке[2]) и, следовательно, изоморфны между собою. Очевидно также, что всякая проективная плоскость изоморфна арифметической проективной плоскости (так как связка ей изоморфна).

Замечание 3. До тех пор, пока в пространстве не выбрана аффинная координатная система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, все лучи связки O и все плоскости этой связки (т. е. все «точки» и все «прямые» проективной плоскости) равноправны между собою — никаких несобственных «точек» и никаких несобственных «прямых» связка O сама по себе не знает. Не знает их и проективная геометрия, которая есть не что иное, как *геометрия связки*. Лишь после того, как выбрана система координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ с началом в центре связки — и этим выбором установлен определенный изоморфизм между связкой и арифметической

[1]) Смысл последнего утверждения заключается в том, что относительно каждой данной точки M и каждой данной прямой d известно, инцидентны они между собою или нет.

[2]) То есть могут быть изоморфно отображены на связку.

проективной плоскостью, — можно говорить о несобственных лучах связки (несобственных точках плоскости) как о лучах (о точках), третья координата x_3 которых равна нулю; можно говорить и о несобственной прямой $\{0:0:1\}$, которой все эти точки инцидентны.

Положение аналогично тому, которое мы имели в теории n-мерных векторных и точечно-векторных пространств: выбор в таком пространстве определенного базиса (определенной системы координат) означало установление определенного изоморфизма между данным пространством и соответствующим арифметическим пространством, что в свою очередь позволяло ограничиться исследованием этого последнего.

Подобным же образом, изучая любую проективную плоскость P, мы можем всегда заменить ее по нашему желанию связкой или арифметической проективной плоскостью P_{ap}. Последнее особенно целесообразно, если желательно с самого начала выделить несобственные элементы. При этом удобно и законно представлять себе арифметическую проективную плоскость как результат введения однородных координат (относительно некоторой «исходной» аффинной координатной системы oe_1e_2) на данной обычной плоскости π, как это мы делали в начале § 2.

Проективную плоскость с выделенной на ней несобственной прямой называют «аффинно-проективной» плоскостью — по причинам, которые выяснятся в § 6.

4. Комплексная проективная плоскость. Мы ограничимся определением арифметической комплексной проективной плоскости.

Комплексной арифметической проективной плоскостью называется множество элементов двух родов, называемых соответственно *комплексными арифметическими точками* и *комплексными арифметическими прямыми*[1]). И те и другие суть классы пропорциональных между собою троек, теперь уже произвольных комплексных, чисел, снабженных по-прежнему отметкой, указывающей, идет ли речь о точках или прямых; точки будут обозначаться через $(x_1:x_2:x_3)$, прямые — через $\{u_1:u_2:u_3\}$. Среди всех троек комплексных чисел лишь одна тройка 0, 0, 0 по-прежнему остается запрещенной. Точка (соответственно прямая) называется *вещественной* (*действительной*), если среди троек x_1, x_2, x_3, классом которых она является, имеется тройка, состоящая из действительных чисел. Так, точка $M=(i:i:i)$ есть действительная точка: она может быть записана и в виде $M=(1:1:1)$. Все не действительные точки (прямые) называются *мнимыми*.

Между точками и прямыми комплексной проективной плоскости установлено отношение инцидентности: точка $(x_1:x_2:x_3)$ и прямая

[1]) Мы, естественно, будем их называть просто *точками* и *прямыми*.

$\{u_1:u_2:u_3\}$ называются *инцидентными между собою*, если

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0.$$

Так же можно говорить и о комплексной связке как о множестве всех комплексных прямых («лучей» связки) и плоскостей, проходящих через одну какую-нибудь действительную точку O комплексного трехмерного пространства. В дальнейшем (уже в следующем параграфе) мы будем предполагать, что в связке O (вообще говоря, комплексной) дана система координат $Oe_1e_2e_3$, которая всегда будет предполагаться действительной (т. е. не только точка O, но и векторы e_1,e_2,e_3 будут всегда вещественными). Отождествляя луч связки, имеющий в избранной «исходной» системе координат $Oe_1e_2e_3$ координаты x_1, x_2, x_3, с точкой $(x_1:x_2:x_3)$, а плоскость связки, имеющую координаты u_1, u_2, u_3,—с прямой $\{u_1:u_2:u_3\}$ арифметической проективной плоскости, мы и саму связку можем отождествить с арифметической проективной плоскостью.

§ 4. Принцип двойственности для проективной плоскости

Вернемся к условию инцидентности

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0 \tag{1}$$

точки $(x_1:x_2:x_3)$ и прямой $\{u_1:u_2:u_3\}$.

Поставим в соответствие каждой точке $(x_1:x_2:x_3)$ проективной плоскости прямую $\{x_1:x_2:x_3\}$ с теми же координатами (и, наоборот, прямой $\{u_1:u_2:u_3\}$ — точку $(u_1:u_2:u_3)$), т. е. сделаем взаимно однозначное отображение множества всех элементов (точек и прямых) проективной плоскости на себя, записывающееся в виде

$$(x_1:x_2:x_3)\leftrightarrow\{x_1:x_2:x_3\}. \tag{2}$$

Тогда имеет место следующий очевидный и тем не менее замечательный факт.

Отображение (2) сохраняет отношение инцидентности, т. е. переводит точку $(x_1:x_2:x_3)$ и прямую $\{u_1:u_2:u_3\}$, инцидентные между собою, в прямую $\{x_1:x_2:x_3\}$ и точку $(u_1:u_2:u_3)$, по-прежнему инцидентные между собою.

В самом деле, условие инцидентности (1) не зависит от того, считаем ли мы тройки x_1, x_2, x_3 и u_1, u_2, u_3 тройками координат точки и прямой или, наоборот, прямой и точки, т. е. не зависит от того, какую из двух троек x_1, x_2, x_3 и u_1, u_2, u_3 мы заключаем в круглые, а какую — в фигурные скобки.

Непосредственным следствием этого факта является следующий

Принцип двойственности для проективной плоскости. *Пусть верно какое-нибудь предложение, касающееся точек,*

прямых и отношения инцидентности между ними. Тогда будет верно и двойственное предложение, получаемое, если в данном предложении поменять слова «прямая» и «точка».

В самом деле, речь идет о предложении, которое может заключаться лишь в утверждении инцидентности таких-то прямых $\{u_1 : u_2 : u_3\}$ и таких-то точек $(x_1 : x_2 : x_3)$. Эти утверждения выражаются в тождествах вида (1), в которых ничего не изменится, если мы в формулировке нашего предложения заменим прямые точками, а точки — прямыми (т. е. заменим фигурные скобки круглыми и наоборот).

Прежде чем приводить примеры взаимно двойственных предложений, сделаем следующее общее замечание.

В плоской аффинной геометрии точки и прямые не были равноправны: плоскость состояла из точек, а прямые определялись как множества точек, координаты которых удовлетворяли уравнениям первой степени.

Теперь мы можем стать на другую точку зрения: и прямые и точки суть совершенно равноправные геометрические объекты, и те и другие взаимно однозначно соответствуют классам числовых троек; эти геометрические объекты связаны между собою основным отношением инцидентности, выражающимся условием (1). Если мы в (1) будем считать прямую $\{u_1, u_2, u_3\}$ данной, то равенство (1) является уравнением, определяющим множество точек, инцидентных данной прямой. Если же мы в равенстве (1) будем считать данной точку $(x_1 : x_2 : x_3)$, то оно превращается в уравнение, определяющее множество всех прямых $\{u_1 : u_2 : u_3\}$, инцидентных данной точке, т. е. пучок прямых с центром в данной точке. С таким же правом, как мы раньше считали первоначальным понятие точки, а прямую определяли как множество точек, удовлетворяющих уравнению (1), мы могли бы считать первоначальным понятие прямой и определять точку как множество инцидентных ей прямых (как пучок прямых), удовлетворяющих тому же уравнению (1). Свое полное выражение это равноправие точек и прямых проективной плоскости и находит в сформулированном выше принципе двойственности.

Приведем примеры двойственных в указанном смысле предложений; их доказательства будут тоже «двойственны»: одно получится из другого, если в каждый момент доказательства слово «прямая» заменить словом «точка» с сохранением каждый раз отношений инцидентности.

Теорема 1. *Ко всяким двум различным точкам A, B имеется единственная прямая, им инцидентная; она обозначается через $\overline{AB}$ (или просто через AB).*

Теорема 1′. *Ко всяким двум различным прямым a и b имеется единственная точка, им инцидентная; она обозначается через $(a \cdot b)$ (или просто через $a \cdot b$).*

Доказательство

Пусть $a_1:a_2:a_3$ и $b_1:b_2:b_3$ суть две данные различные точки. | прямые.

Мы ищем всевозможные

прямые | точки

$$\xi_1:\xi_2:\xi_3,$$

инцидентные двум данным

точкам | прямым

$a_1:a_2:a_3$, $b_1:b_2:b_3$. Искомые $\xi_1:\xi_2:\xi_3$ удовлетворяют условиям

$$a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3=0, \tag{3}$$

$$b_1\xi_1+b_2\xi_2+b_3\xi_3=0, \tag{4}$$

откуда следует, что

$$\xi_1:\xi_2:\xi_3=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

т. е. что координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 определены с точностью до пропорционального множителя однозначно; значит, существует единственная

прямая $\{\xi_1:\xi_2:\xi_3\}$, | точка $(\xi_1:\xi_2:\xi_3)$,

инцидентная данным двум

точкам | прямым

$(a_1:a_2:a_3)$, $(b_1:b_2:b_3)$. | $\{a_1:a_2:a_3\}$, $\{b_1:b_2:b_3\}$.

Замечание. Теорема 1 выражает хорошо известный читателю из школьного курса геометрии факт: через всякие две различные точки проходит одна и только одна прямая. Двойственная теореме 1 теорема 1′ в более привычной формулировке звучит так: всякие две различные прямые пересекаются в одной точке, собственной или несобственной; в собственной точке они пересекаются тогда, когда пересекаются на обычной (не пополненной несобственными точками) плоскости, в несобственной — тогда, когда они на обычной плоскости параллельны. *На проективной плоскости параллельных прямых нет.*

Вернемся к доказательству теорем 1 и 1′. Единственная прямая (точка), инцидентная двум данным точкам (прямым) $a_1:a_2:a_3$ и $b_1:b_2:b_3$, имеет координаты, определяемые формулами (5):

$$\xi_1:\xi_2:\xi_3=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Если $A=(a_1:a_2:a_3)$ и $B=(b_1:b_2:b_3)$ суть две различные точки, то прямая (5) есть прямая $\{\xi_1:\xi_2:\xi_3\}$, этим двум точкам инцидентная; ее уравнение есть

$$\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0, \tag{6}$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 даны пропорцией (5), так что уравнение (6) можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

Уравнение (6) или (7) есть уравнение, которому удовлетворяют координаты всех точек, инцидентных прямой $\{\xi_1:\xi_2:\xi_3\}$. Это уравнение (7) выражает тот факт, что первая строка матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

есть линейная комбинация второй и третьей, т. е. что

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\lambda a_1+\mu b_1,\\ x_2&=\lambda a_2+\mu b_2,\\ x_3&=\lambda a_3+\mu b_3. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Давая параметрам λ и μ всевозможные числовые значения (кроме запрещенной пары значений $\lambda=\mu=0$), будем получать по формулам (8) тройки однородных координат всевозможных точек M прямой AB. Очевидно при этом, что двум пропорциональным парам $\lambda':\mu'=\lambda'':\mu''$ будут соответствовать пропорциональные тройки $x_1':x_2':x_3'$ и $x_1'':x_2'':x_3''$. Обратно, если формулы (8) определяют для данных значений λ', μ' соответственно λ'', μ'', одну и ту же точку, т. е. две пропорциональные тройки x_1', x_2', x_3' и x_1'', x_2'', x_3'', то пары λ', μ' и λ'', μ'' пропорциональны: $\lambda':\mu'=\lambda'':\mu''$. В самом деле, пусть $x_1''=kx_1'$, $x_2''=kx_2'$, $x_3''=kx_3'$. Тогда

$$\begin{aligned} \lambda''a_1+\mu''b_1&=k(\lambda'a_1+\mu'b_1),\\ \lambda''a_2+\mu''b_2&=k(\lambda'a_2+\mu'b_2),\\ \lambda''a_3+\mu''b_3&=k(\lambda'a_3+\mu'b_3), \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} (\lambda''-k\lambda')a_1&=(k\mu'-\mu'')b_1,\\ (\lambda''-k\lambda')a_2&=(k\mu'-\mu'')b_2,\\ (\lambda''-k\lambda')a_3&=(k\mu'-\mu'')b_3, \end{aligned}$$

откуда следует, что или $\lambda''=k\lambda'$, $\mu''=k\mu'$, т. е. $\lambda'':\mu''=\lambda':\mu'$, или тройки a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 пропорциональны и, значит, точки A и B совпадают между собою — вопреки предположению.

Итак, точки прямой $\{\xi_1:\xi_2:\xi_3\}=AB$ взаимно однозначно соответствуют классам пропорциональных пар значений параметров λ, μ, поэтому система уравнений (8) называется *системой параметрических уравнений* или, для краткости, просто *параметрическим уравнением прямой* AB. Однако следует помнить, что для того, чтобы написать эту систему уравнений, надо не только знать самые точки A, B, определяющие нашу прямую, но и выбрать среди троек однородных координат этих точек определенную тройку a_1, a_2, a_3, соответственно b_1, b_2, b_3.

Если $a=\{a_1:a_2:a_3\}$ и $b=\{b_1:b_2:b_3\}$ суть две различные прямые, то формулы (5) определяют их точку пересечения $(a\cdot b)=(\xi_1:\xi_2:\xi_3)$. Уравнение (6) или (7) есть уравнение (относительно x_1, x_2, x_3), которому удовлетворяет любая тройка координат всякой прямой $d=\{x_1:x_2:x_3\}$, инцидентной точке $(a\cdot b)=(\xi_1:\xi_2:\xi_3)$ (т. е. проходящей через эту точку); другими словами, уравнение (7) есть уравнение пучка прямых с центром $(a\cdot b)$. Уравнения (8) образуют систему параметрических уравнений этого пучка; они выражают давно известный нам факт, что каждая прямая пучка есть линейная комбинация двух каких-нибудь прямых этого пучка.

Из доказанного вытекает

Следствие. *Пусть* x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 *суть произвольные тройки координат каких-нибудь трех*

точек. | *прямых.*

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы эти три

точки | *прямые*

были инцидентны одной и той же

прямой (*т. е. чтобы три данные точки лежали на одной прямой*), | *точке* (*т. е. чтобы три данные прямые проходили через одну точку*),

является равенство (7), *т. е. выражаемая им линейная зависимость между* (*произвольными*) *тройками координат*

$$x_1,\ x_2,\ x_3;\quad a_1,\ a_2,\ a_3;\quad b_1,\ b_2,\ b_3$$

данных трех

точек. | *прямых.*

Дальнейшим примером двух двойственных между собою предложений может служить знаменитая *теорема Дезарга* [1]).

---

[1]) Дезарг (1593—1662)—выдающийся французский геометр, явившийся вместе с Паскалем и некоторыми другими предтечей современной проективной геометрии.

Теорема 2. *Пусть на плоскости даны два треугольника*[1]; *вершины и стороны одного треугольника обозначим соответственно через* A, B, C *и* a, b, c (*так что*[2]) $a=\overline{BC}$, $b=\overline{CA}$, $c=\overline{AB}$ *и* $A=(b\cdot c)$, $B=(c\cdot a)$, $C=(a\cdot b)$); *вершины и стороны второго треугольника обозначим аналогично через* A', B', C' *и* a', b', c' (*снова* $a'=\overline{B'C'}$ *и т. д.*). *Предположим, что не совпадают никакие две соответственные вершины и никакие две соответственные стороны этих прямоугольников. Тогда имеют место следующие двойственные друг другу предложения* (рис. 230):

Если три точки $(a\cdot a')$, $(b\cdot b')$, $(c\cdot c')$ *инцидентны одной и той же прямой,*

то

три прямые $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ *инцидентны одной и той же точке.*

Если три прямые $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ *инцидентны одной и той же точке,*

то

три точки $(a\cdot a')$, $(b\cdot b')$, $(c\cdot c')$ *инцидентны одной и той же прямой.*

Читатель легко убедится в том, что эти две теоремы не только взаимно двойственны, но и взаимно обратны. Достаточно доказать одну из них. Докажем «правую» теорему.

Предположим, что на плоскости введены однородные координаты. Обозначим какую-нибудь тройку координат точек A, B, C, A', B', C' соответственно через $\boxed{a}$, $\boxed{b}$, $\boxed{c}$, $\boxed{a'}$, $\boxed{b'}$, $\boxed{c'}$. По предположению три прямые $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ инцидентны одной и той же точке Ω. Пусть $\boxed{\omega}$ — какая-нибудь тройка координат этой точки. Так как три точки A, A', Ω коллинеарны, то три тройки $\boxed{a}$, $\boxed{a'}$ и $\boxed{\omega}$ линейно зависимы, а так как тройки $\boxed{a}$ и $\boxed{a'}$ (будучи тройками координат различных точек A и A') не пропорциональны, т. е. линейно независимы между собою, то тройка $\boxed{\omega}$ есть линейная комбинация троек $\boxed{a}$ и $\boxed{a'}$. По тем же соображениям тройка $\boxed{\omega}$ есть линейная комбинация троек $\boxed{b}$ и $\boxed{b'}$, а также $\boxed{c}$

[1]) *Треугольником* в проективной геометрии вообще называется совокупность каких-либо трех не коллинеарных между собою точек и трех прямых, каждая из которых инцидентна каким-либо двум из данных трех точек. Можно было бы сказать и так: *треугольником* называется совокупность трех прямых, не инцидентных одной и той же точке (т. е. не принадлежащих одному пучку), и трех точек, каждая из которых инцидентна двум каким-либо из данных трех прямых.

[2]) Прямую, инцидентную точкам A и B, обозначаем через $\overline{AB}$; точку, инцидентную прямым a и b, обозначаем через $(a\cdot b)$.

и $\boxed{c'}$. Итак, мы имеем тождества

$$\boxed{\omega} = \lambda\boxed{a} + \lambda'\boxed{a'} = \mu\boxed{b} + \mu'\boxed{b'} = \nu\boxed{c} + \nu'\boxed{c'},$$

из которых следует:

$$\left.\begin{aligned} \mu\boxed{b} - \nu\boxed{c} &= \nu'\boxed{c'} - \mu'\boxed{b'}, \\ \nu\boxed{c} - \lambda\boxed{a} &= \lambda'\boxed{a'} - \nu'\boxed{c'}, \\ \lambda\boxed{a} - \mu\boxed{b} &= \mu'\boxed{b'} - \lambda'\boxed{a'}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Обозначая тройку $\mu\boxed{b} - \nu\boxed{c} = \nu'\boxed{c'} - \mu'\boxed{b'}$ через $\boxed{u}$, тройку $\nu\boxed{c} - \lambda\boxed{a} = \lambda'\boxed{a'} - \nu'\boxed{c'}$ через $\boxed{v}$, тройку $\lambda\boxed{a} - \mu\boxed{b} = \mu'\boxed{b'} - \lambda'\boxed{a'}$ через $\boxed{w}$, замечаем, что тройка $\boxed{u}$, будучи линейной комбинацией троек $\boxed{b}$ и $\boxed{c}$ (т. е. координатных троек точек B и C), есть тройка координат некоторой точки P прямой $\overline{BC}$. Но тройка $\boxed{u}$ есть в то же время и линейная комбинация троек $\boxed{c'}$ и $\boxed{b'}$, т. е. координатных троек точек C' и B'. Поэтому точка P, одной из координатных троек которой является тройка $\boxed{u}$, является не только точкой прямой $\overline{BC}$, но и точкой прямой $\overline{B'C'}$ — точка P есть точка пересечения прямых $\overline{BC}$ и $\overline{B'C'}$. Аналогично точка Q, определенная координатной тройкой $\boxed{v}$, есть точка пересечения прямых $\overline{CA}$ и $\overline{C'A'}$, а точка R, определенная координатной тройкой $\boxed{w}$, есть точка пересечения прямых $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$. Складывая почленно равенства (9), имеем

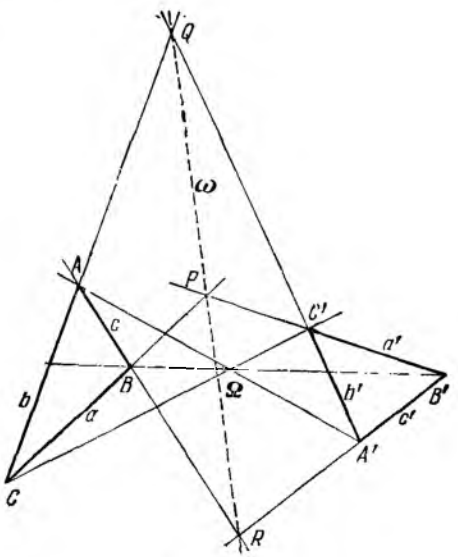


Рис. 230.

$$\boxed{u} + \boxed{v} + \boxed{w} = \boxed{0},$$

где $\boxed{0}$ — тройка, состоящая из одних нулей. Итак, координатные тройки $\boxed{u}$, $\boxed{v}$, $\boxed{w}$ точек P, Q, R линейно зависимы, следовательно, точки P, Q, R коллинеарны, что и требовалось доказать.

§ 5. Проективная система координат в связке и на проективной плоскости

Пусть снова дана связка O (действительная или комплексная), и пусть, наряду с аффинной системой координат $Oe_1e_2e_3$, дана вторая система координат[1]) $Oe'_1e'_2e'_3$ с тем же началом O, единичные векторы e'_1, e'_2, e'_3, которой получаются из векторов e_1, e_2, e_3 умножением их на одно и то же число λ. Две такие координатные системы назовем *эквивалентными*. Всякая тройка чисел x_1, x_2, x_3, являющихся тройкой координат какого-нибудь вектора $\mathbf{u}$ в одной из двух эквивалентных координатных систем, будет тройкой координат коллинеарного вектора $\lambda\mathbf{u}$ $\left(\text{соответственно } \frac{1}{\lambda}\mathbf{u}\right)$ в другой системе. Поэтому совокупность всех троек однородных координат какого-нибудь луча связки будет в двух эквивалентных координатных системах одной и той же.

Легко доказать и обратное утверждение. Если относительно двух координатных систем $Oe_1e_2e_3$ и $Oe'_1e'_2e'_3$ в связке O каждый луч этой связки имеет одни и те же однородные координаты, то системы $Oe_1e_2e_3$ и $Oe'_1e'_2e'_3$ эквивалентны.

В самом деле, так как луч, несущий вектор e'_1, имеет в системе $Oe'_1e'_2e'_3$ тройку координат $\{1, 0, 0\}$, то в обеих системах $Oe_1e_2e_3$ и $Oe'_1e'_2e'_3$ тройками координат этого луча являются все тройки вида $\{\lambda_1, 0, 0\}$, $\lambda_1 \neq 0$, и только они, откуда, в частности, следует, что вектор e'_1 имеет в системе $Oe_1e_2e_3$ координаты λ_1, 0, 0, где $\lambda_1 \neq 0$, так что $e'_1 = \lambda_1 e_1$. Аналогично $e'_2 = \lambda_2 e_2$, $e'_3 = \lambda_3 e_3$. Остается доказать, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Но луч, несущий вектор $e' = e'_1 + e'_2 + e'_3$, имеет, по предположению, в обеих системах $Oe_1e_2e_3$ и $Oe'_1e'_2e'_3$ одну и ту же координатную запись $\{1:1:1\}$, так что мы имеем для самого вектора e' равенство $e' = \lambda(e_1 + e_2 + e_3)$ при некотором $\lambda \neq 0$. Так как, с другой стороны, $e' = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$, то $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Из приведенного доказательства вытекает, что для эквивалентности двух координатных систем $Oe_1e_2e_3$ и $Oe'_1e'_2e'_3$ в связке O необходимо и достаточно, чтобы три координатных луча $\{1:0:0\}$, $\{0:1:0\}$, $\{0:0:1\}$ и «единичный луч» $\{1:1:1\}$ одной системы имели бы ту же координатную запись $\{1:0:0\}$, $\{0:1:0\}$, $\{0:0:1\}$ и $\{1:1:1\}$ и в другой системе координат.

[1]) Согласно сказанному в конце § 3 мы будем рассматривать лишь действительные системы координат.

Вводим теперь следующее

Определение 6 (первое определение проективной системы координат). *Задать в связке O систему проективных координат* — значит задать в пространстве какую-нибудь систему аффинных координат с началом O. При этом две эквивалентные системы аффинных координат, по определению, задают в связке одну и ту же систему проективных координат.

Другими словами: *система проективных координат в связке с центром O есть класс эквивалентных между собою аффинных координатных систем с началом O.*

Посмотрим, как определить этот класс геометрически.

Чтобы задать аффинную систему координат с началом O, можно, вместо того чтобы задавать сами единичные векторы $\overrightarrow{OE_1}=\mathbf{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2}=\mathbf{e}_2$, $\overrightarrow{OE_3}=\mathbf{e}_3$, задать несущие их прямые $\overline{OE}_1=\overline{X}_1$, $\overline{OE}_2=\overline{X}_2$, $\overline{OE}_3=\overline{X}_3$ (оси координат) и точку $E=(1, 1, 1)$. Проекции E_1, E_2, E_3 этой точки E на оси координат [1]) и определят единичные векторы $\overrightarrow{OE_1}=\mathbf{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2}=\mathbf{e}_2$, $\overrightarrow{OE_3}=\mathbf{e}_3$, причем $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OE_1}+\overrightarrow{OE_2}+\overrightarrow{OE_3}$. Точка E называется *единичной точкой* данной аффинной системы координат. Очевидно, две аффинные системы координат с началом O тогда и только тогда эквивалентны, когда у них одни и те же оси, а единичные точки лежат на одном и том же луче — на «единичном» луче $\overline{E}$ связки.

Поэтому определение 6 может быть сформулировано и следующим образом.

Определение 6′ (второе определение проективной системы координат). *Задать проективную систему координат в связке* — значит задать в этой связке три некомпланарных координатных луча $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$ и четвертый, «*единичный*» луч $\overline{E}$, не компланарный ни с какими двумя из координатных лучей $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$.

Пусть в связке O дана проективная система координат $\overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3\overline{E}$. Спрашивается: как найти класс эквивалентных между собою аффинных координатных систем, определяющих (в смысле первого определения) данную проективную систему координат? Для этого возьмем на единичном луче $\overline{E}$ данной проективной координатной системы $\overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3\overline{E}$ произвольную точку E (рис. 231), обозначив через E_1, E_2, E_3 ее проекции на оси координат (т. е. на лучи $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$), получим векторы $\mathbf{e}_1=\overrightarrow{OE_1}$, $\mathbf{e}_2=\overrightarrow{OE_2}$, $\mathbf{e}_3=\overrightarrow{OE_3}$.

Аффинная координатная система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и все системы $O\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$, ей эквивалентные, и образуют, очевидно, класс, определяющий дан-

[1]) Здесь (и далее) проекции на какую-либо координатную ось берутся вдоль плоскости, несущей две другие оси координат.

ную проективную систему $\overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3\overline{E}$. Каждая система $Oe_1e_2e_3$, входящая в этот класс, получается, если на том же единичном луче $\overline{E}$ взять какую-нибудь точку E' и ее проекции E'_1, E'_2, E'_3 на лучи $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$.

Из этого построения ясна и роль единичного луча $\overline{E}$ проективной координатной системы: если брать разные тройки векторов e'_1, e'_2, e'_3, лежащих соответственно на координатных осях $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$, и не связывать эти тройки требованием, чтобы сумма векторов

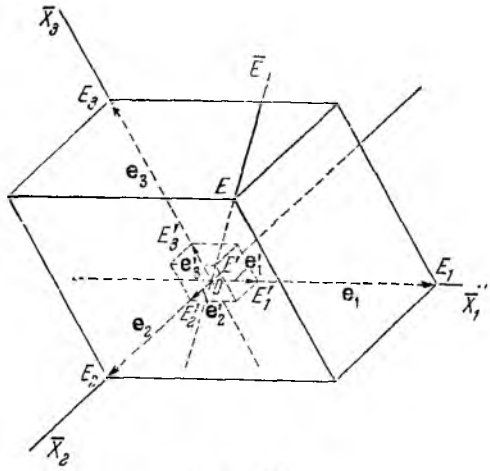


Рис. 231.

каждой тройки была направляющим вектором одного и того же (для всех троек) луча связки O, то будем получать различные, вообще говоря, не эквивалентные между собою аффинные координатные системы.

Тройки координат произвольного луча связки O в аффинной координатной системе $Oe_1e_2e_3$ или что то же, в любой аффинной координатной системе, эквивалентной системе $Oe_1e_2e_3$, и называются, по определению, тройками проективных координат этого луча в проективной системе $\overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3\overline{E}$.

В частности, координатные лучи $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$ и единичный луч $\overline{E}$ получают в системе $\overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3\overline{E}$ соответственно координатную запись

$$\overline{X}_1=(1:0:0),\ \overline{X}_2=(0:1:0),\ \overline{X}_3=(0:0:1),\ \overline{E}=(1:1:1).$$

Далее, любая тройка коэффициентов u_1, u_2, u_3 любого уравнения

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

произвольной плоскости связки O относительно системы координат $Oe_1e_2e_3$ является, по определению, тройкой проективных координат этой плоскости в проективной системе координат $\overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3\overline{E}$.

Все это переносится посредством изоморфного, а именно перспективного, отображения и на плоскость $P=\bar{\pi}$, получаемую пополнением обычной плоскости π несобственными точками. Все остается по-прежнему, только вместо «луч связки O» надо говорить «точка плоскости P», а вместо «плоскость связки O» — «прямая плоскости P». Координатные лучи $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$ превращаются в точки X_1, X_2, X_3 (рис. 232); эти точки принято называть *вершинами координатного треугольника*, состоящего из трех точек X_1, X_2, X_3 и трех прямых X_1X_2, X_2X_3, X_3X_1, инцидентных парам этих точек; эти прямые называются *сторонами координатного треугольника*. Единичный луч $\overline{E}$ делается единичной точкой E. Четыре точки X_1, X_2, X_3, E называются *фундаментальными* (или *базисными*) *точками* данной проективной координатной системы на плоскости.

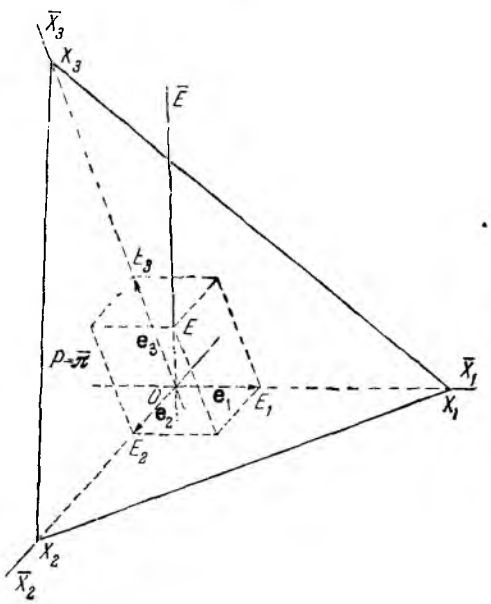


Рис. 232.

Замечание 2. Пусть π — плоскость трехмерного пространства с заданной в ней аффинной системой координат oe_1e_2. Построим в пространстве аффинную систему координат $Oe_1e_2e_3$, естественно связанную с системой oe_1e_2 на плоскости π. Система $Oe_1e_2e_3$ определит на проективной плоскости $\bar{\pi}$, происшедшей от пополнения плоскости π несобственными элементами, проективную систему координат $X_1X_2X_3E$ (рис. 233), причем проективная плоскость $\bar{\pi}$ отображена на связку O естественным изоморфизмом, а именно перспективным отображением. Очевидно, что проективные координаты точек плоскости $\bar{\pi}$ относительно системы $X_1X_2X_3E$ суть не что иное, как их однородные координаты относительно аффинной системы координат oe_1e_2. Поэтому только что определенная

нами на проективной плоскости $\bar{\pi}$ проективная система координат $X_1X_2X_3E$ называется *однородной системой координат*, соответствующей данной аффинной координатной системе oe_1e_2 на π. Из трех вершин координатного треугольника $X_1X_2X_3$ вершины

$$X_1=(1:0:0), \quad X_2=(0:1:0)$$

суть, очевидно, несобственные точки соответственно оси абсцисс и оси ординат системы oe_1e_2 («точки, удаленные в бесконечность

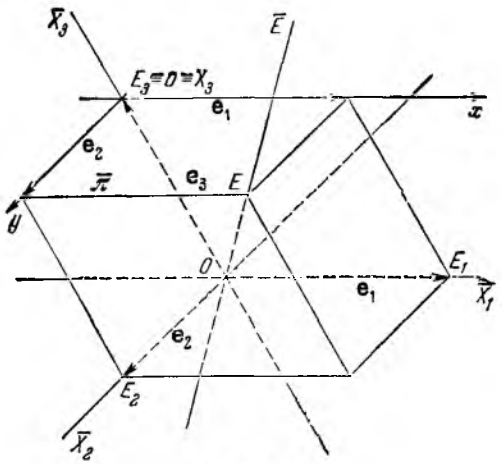


Рис. 233

в направлении соответственно прямых ox и oy»), тогда как точка $X_3=(0:0:1)$ есть начало координат o системы oe_1e_2, а точка $E=(1:1:1)$ — точка плоскости π, имеющая в системе координат oe_1e_2 координаты $x=y=1$.

Прямая X_3X_1 (т. е. прямая, инцидентная точкам X_3 и X_1) есть ось абсцисс, а прямая X_3X_2 — ось ординат координатной системы oe_1e_2, прямая X_1X_2 есть несобственная прямая.

Вообще, если проективная система координат определена вершинами координатного треугольника X_1, X_2, X_3 и единичной точкой E, то прямая X_3X_1 должна иметь такие координаты u_1, u_2, u_3, чтобы точки $X_3=(0:0:1)$ и $X_1=(1:0:0)$ удовлетворяли уравнению

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0,$$

откуда сразу вытекает, что $u_3=u_1=0$ (тогда как, естественно, третья координата u_2 отлична от нуля). Итак, прямая X_3X_1 имеет координаты 0: 1: 0. Аналогично заключаем, что прямые X_3X_2 и X_1X_2 имеют соответственно координаты 1: 0: 0 и 0: 0: 1.

Итак, наряду с формулами

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= (1:0:0),\\ X_2 &= (0:1:0),\\ X_3 &= (0:0:1), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

дающими координатную запись вершин X_1, X_2, X_3 координатного треугольника, имеем следующую координатную запись сторон этого треугольника:

$$\left.\begin{aligned} \overline{X_3X_1} &= \{0:1:0\},\\ \overline{X_3X_2} &= \{1:0:0\},\\ \overline{X_1X_2} &= \{0:0:1\}. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Отождествляя каждую точку плоскости $\bar{\pi}$ с классом троек ее однородных координат, мы превращаем плоскость $\bar{\pi}$ в арифметическую проективную плоскость с данной в ней основной, «привилегированной» проективной координатной системой $X_1X_2X_3E$, где точки X_1, X_2, X_3, E, как точки арифметической проективной плоскости, даны своей записью (1). Эта система координат называется *системой однородных координат на арифметической проективной плоскости.*

Пусть в связке O (или какой-нибудь плоскости P, изоморфно отображенной на связку O) даны две проективные координатные системы — исходная $X_1X_2X_3E$ и «новая» система $X_1'X_2'X_3'E'$; новая система задана какими-то тройками координат ее фундаментальных точек X_1', X_2', X_3', E' относительно исходной системы:

$$\left.\begin{aligned} X_1' &= (c_{11}:c_{21}:c_{31}),\\ X_2' &= (c_{12}:c_{22}:c_{32}),\\ X_3' &= (c_{13}:c_{23}:c_{33}),\\ E' &= (\varepsilon_1:\varepsilon_2:\varepsilon_3). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Требуется написать «формулы преобразования координат», выражающие координаты x_1, x_2, x_3 любой точки M относительно исходной системы координат через координаты x_1', x_2', x_3' той же точки в «новой» системе координат.

Предположим сначала, что тройки координат (2) каждой из точек X_1', X_2', X_3', E' выбраны *согласованными*, т. е. так, что имеет место векторное равенство

$$\{c_{11},\ c_{21},\ c_{31}\} + \{c_{12},\ c_{22},\ c_{32}\} + \{c_{13},\ c_{23},\ c_{33}\} = \{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3\}; \tag{3}$$

тогда, считая векторы [1])

$$\mathbf{e}_1' = \{c_{11},\ c_{21},\ c_{31}\},\quad \mathbf{e}_2' = \{c_{12},\ c_{22},\ c_{32}\},\quad \mathbf{e}_3' = \{c_{13},\ c_{23},\ c_{33}\} \tag{2'}$$

[1]) Данные своими координатами в системе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

единичными векторами аффинной системы координат в связке O, видим, что эта аффинная координатная система задает именно проективную систему $X_1'X_2'X_3'E'$ и что, следовательно, проективные координаты какого-либо луча m связки O (и соответствующей ему точки M плоскости P) в системе $X_1'X_2'X_3'E'$ суть не что иное, как координаты того же луча в аффинной системе $Oe_1'e_2'e_3'$.

Вернемся теперь к системе $Oe_1e_2e_3$.

Выберем на луче $\overline{E}$ какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OE} = \mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ и возьмем его проекции $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{OE_3}$ на лучи $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\overline{X}_3$. Тогда $Oe_1e_2e_3$ есть аффинная система координат в связке, задающая проективную систему $X_1X_2X_3E$. Каждая тройка x_1, x_2, x_3 проективных координат в системе $X_1X_2X_3E$ луча m есть тройка координат в аффинной системе $Oe_1e_2e_3$ некоторого направляющего вектора $\mathbf{u}$ этого луча [1]).

С другой стороны, тройка координат x_1', x_2', x_3' луча m в системе $X_1'X_2'X_3'E'$ есть тройка координат (в аффинной системе координат $Oe_1'e_2'e_3'$) какого-то направляющего вектора $\mathbf{u}' = \lambda\mathbf{u}$ того же луча m. Поэтому из (2′) и из формул преобразования аффинных координат получаем (имея в виду, что координаты вектора $\mathbf{u}$ в системе $Oe_1'e_2'e_3'$ суть $\frac{1}{\lambda}x_1'$, $\frac{1}{\lambda}x_2'$, $\frac{1}{\lambda}x_3'$), что

$$x_1 = c_{11}\frac{x_1'}{\lambda} + c_{12}\frac{x_2'}{\lambda} + c_{13}\frac{x_3'}{\lambda},$$
$$x_2 = c_{21}\frac{x_1'}{\lambda} + c_{22}\frac{x_2'}{\lambda} + c_{23}\frac{x_3'}{\lambda},$$
$$x_3 = c_{31}\frac{x_1'}{\lambda} + c_{32}\frac{x_2'}{\lambda} + c_{33}\frac{x_3'}{\lambda},$$

т. е. что

$$\left.\begin{aligned} \lambda x_1 &= c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + c_{13}x_3', \\ \lambda x_2 &= c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + c_{23}x_3', \\ \lambda x_3 &= c_{31}x_1' + c_{32}x_2' + c_{33}x_3'. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Это и есть формулы перехода от проективной системы $X_1X_2X_3E$ к проективной системе $X_1'X_2'X_3'E'$ в предположении, что для координатной записи фундаментальных точек X_1', X_2', X_3', E' выбраны (относительно системы $X_1X_2X_3E$) согласованные тройки координат (2′).

---

[1]) Выбор другого вектора $\mathbf{e} = \overrightarrow{OE}$ на луче $\overline{E}$ привел бы к аффинной системе координат, эквивалентной системе $Oe_1e_2e_3$; каждая тройка координат луча m в одной из этих координатных систем была бы тройкой координат того же луча и в другой системе, так что для последующих рассуждений не имеет значения, какой именно вектор $\mathbf{e}$ взят на луче $\overline{E}$.

Предположим теперь, что выбраны какие угодно, может быть, и не согласованные между собою, тройки координат (2) [1]) точек X_1', X_2', X_3', E'. Тогда их надо заменить определяющими те же точки согласованными тройками, т. е. надо найти такие отличные от нуля множители λ_1, λ_2, λ_3, чтобы

$$\left.\begin{aligned} X_1' &= (\lambda_1 c_{11}, \quad \lambda_1 c_{21}, \quad \lambda_1 c_{31}), \\ X_2' &= (\lambda_2 c_{12}, \quad \lambda_2 c_{22}, \quad \lambda_2 c_{32}), \\ X_3' &= (\lambda_3 c_{13}, \quad \lambda_3 c_{23}, \quad \lambda_3 c_{33}) \end{aligned}\right\} \qquad (2'')$$

и чтобы, кроме того, имело место векторное равенство

$$\lambda_1 \{c_{11}, \ c_{21}, \ c_{31}\} + \lambda_2 \{c_{12}, \ c_{22}, \ c_{32}\} + \lambda_3 \{c_{13}, \ c_{23}, \ c_{33}\} = \\ = \{\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \varepsilon_3\}. \qquad (3')$$

Но векторное равенство (3') равносильно системе уравнений (относительно λ_1, λ_2, λ_3)

$$\left.\begin{aligned} c_{11}\lambda_1 + c_{12}\lambda_2 + c_{13}\lambda_3 &= \varepsilon_1, \\ c_{21}\lambda_1 + c_{22}\lambda_2 + c_{23}\lambda_3 &= \varepsilon_2, \\ c_{31}\lambda_1 + c_{32}\lambda_2 + c_{33}\lambda_3 &= \varepsilon_3. \end{aligned}\right\} \qquad (3'')$$

Детерминант d этой системы отличен от нуля (так как столбцы матрицы коэффициентов линейно независимы), поэтому система (3'') решается однозначно по правилу Крамера. При этом ни одно из чисел λ_1, λ_2, λ_3 не равно нулю. В самом деле, имеем, например,

$$\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & c_{12} & c_{13} \\ \varepsilon_2 & c_{22} & c_{23} \\ \varepsilon_3 & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}}{d}.$$

Если бы числитель этой дроби был равен нулю, то столбцы стоящего в числителе детерминанта были бы линейно зависимы, что невозможно, так как эти столбцы суть тройки координат не коллинеарных между собою точек E', X_2', X_3'.

Найдя из уравнений (3'') значения λ_1, λ_2, λ_3 и подставив их в (2''), получим координатную запись (2) точек X_1', X_2', X_3', E' уже посредством согласованных троек координат и формулы преобразования координат:

$$\left.\begin{aligned} \lambda x_1 &= c_{11}' x_1' + c_{12}' x_2' + c_{13}' x_3', \\ \lambda x_2 &= c_{21}' x_1' + c_{22}' x_2' + c_{23}' x_3', \\ \lambda x_3 &= c_{31}' x_1' + c_{32}' x_2' + c_{33}' x_3', \end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

[1]) В исходной системе $X_1X_2X_3E$.

где

$$c'_{11}=\lambda_1 c_{11},\quad c'_{12}=\lambda_2 c_{12},\quad c'_{13}=\lambda_3 c_{13},$$
$$c'_{21}=\lambda_1 c_{21},\quad c'_{22}=\lambda_2 c_{22},\quad c'_{23}=\lambda_3 c_{23},$$
$$c'_{31}=\lambda_1 c_{31},\quad c'_{32}=\lambda_2 c_{32},\quad c'_{33}=\lambda_3 c_{33},$$

т. е. коэффициенты c'_{ik} вполне определены первоначальными («несогласованными») тройками (2).

Замечание 3. Пусть на проективной плоскости P задана некоторая привилегированная («исходная») проективная система координат, например, на арифметической проективной плоскости задана исходная система однородных координат. Координаты какой-нибудь точки в этой исходной системе будем обозначать через x_1, x_2, x_3. Тогда переход к какой-нибудь новой системе координат определяется просто некоторой невырождающейся матрицей C — матрицей коэффициентов в формулах (4) или (4′). Поэтому можно, не вдаваясь в приведенные выше «геометрические» рассуждения, просто сказать: *задать на арифметической проективной плоскости систему проективных координат x'_1, x'_2, x'_3 — значит задать невырожденную матрицу C. В определенной этой матрицей новой системе координат точка M получает в качестве координат всевозможные тройки вида*[1])

$$\left.\begin{aligned} x'_1&=\lambda\,(d_{11}x_1+d_{12}x_2+d_{13}x_3),\\ x'_2&=\lambda\,(d_{21}x_1+d_{22}x_2+d_{23}x_3),\\ x'_3&=\lambda\,(d_{31}x_1+d_{32}x_2+d_{33}x_3),\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

где матрица коэффициентов D есть обратная матрица к матрице C коэффициентов в (4), *так что формулы* (4) *и* (5) *эквивалентны между собою и выражают взаимно однозначное соответствие между классами троек старых «однородных» и новых «проективных» координат какой-либо точки проективной плоскости*[2]).

Замечание 4. Можно было бы рассуждать следующим образом: для того чтобы определить на проективной плоскости (снабженной привилегированной «однородной» системой координат $X_1X_2X_3E$) новую проективную систему координат с заданным координатным треугольником $X'_1X'_2X'_3$, достаточно задать точки X'_1, X'_2, X'_3 вместе с какими-нибудь определенными

[1]) Множитель λ в правой части равенств (5) позволяет по одной тройке координат x_1, x_2, x_3 точки M в старой координатной системе найти все тройки координат той же точки в новой системе.

[2]) На эту простую и во многих случаях удобную точку зрения становится, например, Н. И. Мусхелишвили в своем классическом «Курсе аналитической геометрии»; я не думаю, чтобы такой подход заслуживал упрека в чрезмерном алгебраическом формализме: ведь задать на обыкновенной аффинной плоскости новую систему координат, по существу, тоже значит задать матрицу, столбцы которой выражают векторы нового репера через векторы старого. В конце концов, вся аналитическая геометрия сводится к такого рода алгебраическим формализмам.

троиками их координат (в системе $X_1X_2X_3E$), а именно:

$$\left.\begin{array}{ll} c_{11},\ c_{21},\ c_{31} & \text{для точки } X_1, \\ c_{12},\ c_{22},\ c_{32} & \text{для точки } X_2, \\ c_{13},\ c_{23},\ c_{33} & \text{для точки } X_3. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Тогда единичная точка E однозначно определится требованием, чтобы тройка ее координат ε_1, ε_2, ε_3 была согласована с тройками (6), т. е. требованием

$$\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3\} = \{c_{11},\ c_{21},\ c_{31}\} + \{c_{12},\ c_{22},\ c_{32}\} + \{c_{13},\ c_{23},\ c_{33}\}$$

или

$$\varepsilon_1 = c_{11} + c_{12} + c_{13},\quad \varepsilon_2 = c_{21} + c_{22} + c_{23},\quad \varepsilon_3 = c_{31} + c_{32} + c_{33}.$$

Это понятно и геометрически: выбор троек (6) означает, что в связке выбраны не только оси координат X_1, X_2, X_3, но и единичные векторы на них, т. е. выбрана аффинная система координат, определяющая данную проективную.

Приведенным рассуждением иногда бывает удобно пользоваться, однако надо иметь в виду следующее.

Среди троек координат точек (и прямых) проективной плоскости нет привилегированных: отдельная тройка — например, c_{11}, c_{21}, c_{31} для точки X_1 — никакого смысла на проективной плоскости не имеет; выделяя ее, мы, по существу, покидаем проективную плоскость (как множество ее точек и прямых), возвращаемся к породившему ее трехмерному пространству и даже выбираем в нем определенную аффинную систему координат. Поэтому только что предложенное рассуждение выпадает из рамок проективной геометрии; это можно делать, лишь рассматривая проективную геометрию плоскости как часть аффинной геометрии трехмерного пространства, как геометрию конкретно данной в нем связки, без всякой претензии на проективную чистоту метода.

§ 6. Проективные преобразования и отображения проективной плоскости

1. Определение и аналитическая запись проективных преобразований. Пусть на проективной плоскости P задана определенная («исходная») система проективных координат. Без ограничения общности можно предположить, например, что есть арифметическая проективная плоскость с системой однородных координат на ней. Задать на плоскости P проективное преобразование — значит задать некоторую новую проективную систему координат; этим определится преобразование плоскости P, состоящее в том, что каждой точке M плоскости, координаты которой в исходной системе пусть будут $x_1 : x_2 : x_3$, ставится в соответствие точка M' плоскости, имеющая те же координаты $x_1 : x_2 : x_3$, но уже в новой системе координат. Читатель видит, что это определение проективных преобразований совершенно аналогично определению аффинных преобразований, данному в главе XI.

Замечание 1. Из этого определения непосредственно следует, что преобразование проективной плоскости P, обратное к проективному преобразованию, есть проективное преобразование. Очевидно

также, что тождественное преобразование плоскости P есть проективное преобразование.

Если новая система координат задана матрицей C, то, как непосредственно следует из формул преобразования координат, данных в предыдущем параграфе, точка M', имеющая в новой системе координат координаты x_1, x_2, x_3, будет иметь в старой системе координаты

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= \lambda\,(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3),\\ x'_2 &= \lambda\,(c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3),\\ x'_3 &= \lambda\,(c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Поэтому *проективное преобразование можно определить как преобразование, ставящее в соответствие каждой точке* $M=(x_1:x_2:x_3)$ *проективной плоскости точку* $M'=(x'_1:x'_2:x'_3)$, *где координаты* x'_1, x'_2, x'_3 *даны формулами* (1), *причем детерминант матрицы* C *преобразования* (1) *не равен* 0. *Система координат при этом все время одна и та же*[1]).

Задается проективное преобразование любой неособой невырожденной матрицей C. Поэтому, считая исходную («однородную») систему координат раз навсегда данной, мы будем обозначать проективное преобразование тою же буквой, что и задающую его матрицу.

Если проективные преобразования $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ задаются соответственно матрицами A и B, то произведение матриц A и B задает проективное преобразование, являющееся произведением преобразований $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Отсюда следует, что произведение двух проективных преобразований есть проективное преобразование.

Аналогично, если проективное преобразование $\mathcal{C}$ задается матрицей C, то матрица C^{-1} задает проективное преобразование, обратное к преобразованию $\mathcal{C}$; преобразование, обратное к проективному, есть проективное преобразование. Так как, наконец, тождественное преобразование, очевидно, является проективным, то из доказанного вытекает

Теорема 3. *Совокупность всех проективных преобразований проективной плоскости есть группа* (*подгруппа группы всех преобразований проективной плоскости*).

При проективном преобразовании $\mathcal{C}$ множество точек $M=(x_1:x_2:x_3)$ какой-либо прямой $d=\{u_1:u_2:u_3\}$, определенной уравнением

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \qquad (2)$$

[1]) Множитель λ в правой части равенств (1) позволяет по одной какой-нибудь тройке координат точки M' найти любую тройку координат этой точки.

переходит в множество точек M', координаты которых в некоторой новой проективной системе координат удовлетворяют тому же уравнению (2) и которые поэтому образуют некоторую прямую d'. Уравнение этой прямой d' в исходной системе координат получится, если подставить в (2) вместо координат x_1, x_2, x_3 какой-нибудь точки M их значения, выраженные через координаты x'_1, x'_2, x'_3 (в той же исходной координатной системе) точки $M' = \mathscr{C}M$. Эти значения получаются, если решить уравнения (1) относительно x_1, x_2, x_3, т. е.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda' (d_{11}x'_1 + d_{12}x'_2 + d_{13}x'_3), \\ x_2 &= \lambda' (d_{21}x'_1 + d_{22}x'_2 + d_{23}x'_3), \\ x_3 &= \lambda' (d_{31}x'_1 + d_{32}x'_2 + d_{33}x'_3), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где матрица D коэффициентов d_{ik} есть матрица, обратная к C.

Очевидно, формулы (3) равносильны формулам (1). Внося (3) в (2), получим

$$u_1 (d_{11}x'_1 + d_{12}x'_2 + d_{13}x'_3) + u_2 (d_{21}x'_1 + d_{22}x'_2 + d_{23}x'_3) + \\ + u_3 (d_{31}x'_1 + d_{32}x'_2 + d_{33}x'_3) = 0$$

или

$$(d_{11}u_1 + d_{21}u_2 + d_{31}u_3) x'_1 + (d_{12}u_1 + d_{22}u_2 + d_{32}u_3) x'_2 + \\ + (d_{13}u_1 + d_{23}u_2 + d_{33}u_3) x'_3 = 0.$$

Полагая

$$\left.\begin{aligned} u'_1 &= d_{11}u_1 + d_{21}u_2 + d_{31}u_3, \\ u'_2 &= d_{12}u_1 + d_{22}u_2 + d_{32}u_3, \\ u'_3 &= d_{13}u_1 + d_{23}u_2 + d_{33}u_3, \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

видим, что при проективном преобразовании $\mathscr{C}$ всякая прямая d с координатами u_1, u_2, u_3 переходит в прямую d' с координатами u'_1, u'_2, u'_3. Так как образом прямой при проективном преобразовании всегда является прямая, то проективные преобразования называются иначе *коллинеарными преобразованиями* (или, короче, *коллинеациями*): они сохраняют коллинеарность точек [1]).

Замечание 2. Из доказанного, очевидно, следует, что при проективном преобразовании всякая тройка неколлинеарных точек переходит в тройку неколлинеарных точек (иначе при обратном преобразовании коллинеарные точки перешли бы в неколлинеарные).

---

[1]) Верно и обратное утверждение: *всякое преобразование (вещественной) проективной плоскости, сохраняющее коллинеарность точек, есть проективное преобразование*.

Доказательство последнего утверждения читатель может найти в книге А. С. Пархоменко и П. С. Моденова «Геометрические преобразования», а также в «Аналитической геометрии» Б. Н. Делоне и Д. А. Райкова и в «Высшей геометрии» Н. В. Ефимова.

2. Основная теорема о проективных преобразованиях плоскости. Докажем сначала следующее предложение. Пусть при проективном преобразовании $\mathcal{A}$ проективной (арифметической) плоскости четверка фундаментальных точек Y_1, Y_2, Y_3, E некоторой проективной системы координат переходит в четверку точек Y'_1, Y'_2, Y'_3, E'. Так как никакие три из точек Y'_1, Y'_2, Y'_3, E', по только что сказанному, не лежат на одной прямой, то эти четыре точки определяют снова проективную систему координат. *Пусть M — произвольная точка проективной плоскости, M' — ее образ при преобразовании $\mathcal{A}$. Тогда M' имеет относительно системы $Y'_1Y'_2Y'_3E'$ те же координаты, какие точка M имела относительно системы $Y_1Y_2Y_3E$.*

В самом деле, пусть координатная запись точек Y_1, Y_2, Y_3, E в исходной системе координат $X_1X_2X_3\mathscr{E}$ есть

$$Y_1=(a_1:a_2:a_3),\quad Y_2=(b_1:b_2:b_3),\quad Y_3=(c_1:c_2:c_3),$$
$$E=(\varepsilon_1:\varepsilon_2:\varepsilon_3),$$

причем в каждой скобке тройки координат выбраны согласованно, т. е. так, что

$$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}+\{b_1,\ b_2,\ b_3\}+\{c_1,\ c_2,\ c_3\}=\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3\}.$$

Тогда, по сказанному в § 5 (формулы (2) и (4)), однородные координаты x_1, x_2, x_3 произвольной точки M связаны с координатами y_1, y_2, y_3 той же точки в системе $Y_1Y_2Y_3E$ соотношениями

$$\left.\begin{aligned}\lambda x_1&=a_1y_1+b_1y_2+c_1y_3,\\ \lambda x_2&=a_2y_1+b_2y_2+c_2y_3,\\ \lambda x_3&=a_3y_1+b_3y_2+c_3y_3.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Проективное преобразование $\mathcal{A}$ задано тем, что, наряду с исходной (однородной) системой координат $X_1X_2X_3\mathscr{E}$, дана некоторая проективная система $X'_1X'_2X'_3\mathscr{E}'$, так что тройки координат точки M' относительно системы $X'_1X'_2X'_3\mathscr{E}'$ суть не что иное, как тройки координат $x_1:x_2:x_3$ точки M в исходной однородной системе.

Это верно для любой точки M. Так как, в частности, точки Y'_1, Y'_2, Y'_3, E' суть образы точек Y_1, Y_2, Y_3, E при преобразовании $\mathcal{A}$, то тройки координат точек Y'_1, Y'_2, Y'_3, E' относительно системы $X'_1X'_2X'_3\mathscr{E}'$ пропорциональны тройкам однородных координат точек Y_1, Y_2, Y_3, E, т. е. соответственно тройкам a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3 и $\varepsilon_1:\varepsilon_2:\varepsilon_3$. Значит, формулы преобразования координат, соответствующие переходу от системы $X'_1X'_2X'_3\mathscr{E}'$ к системе $Y'_1Y'_2Y'_3E'$, имеют ту же матрицу коэффициентов, что

и преобразование (4). Поэтому, обозначая через $y'_1 : y'_2 : y'_3$ координаты точки M' в системе $Y'_1Y'_2Y'_3E'$ и помня, что в системе $X'_1X'_2X'_3\mathcal{E}'$ координаты точки M' суть $x_1 : x_2 : x_3$, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \lambda x'_1 &= a_1 y'_1 + b_1 y'_2 + c_1 y'_3, \\ \lambda x'_2 &= a_2 y'_1 + b_2 y'_2 + c_2 y'_3, \\ \lambda x'_3 &= a_3 y'_1 + b_3 y'_2 + c_3 y'_3, \end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

Так как и (4) и (4′), рассматриваемые как уравнения относительно y_1, y_2, y_3, соответственно y'_1, y'_2, y'_3, однозначно разрешимы, то мы видим, что тройки координат точки M' в системе $Y'_1Y'_2Y'_3E'$ совпадают с тройками координат точки M в системе $Y_1Y_2Y_3E$. Наше утверждение доказано.

Из доказанного утверждения мы выведем следующий основной факт.

Теорема 4. *Пусть Y_1, Y_2, Y_3, E и Y'_1, Y'_2, Y'_3, E' — две четверки точек проективной плоскости, удовлетворяющие тому условию, что никакие три точки, принадлежащие одной и той же четверке, не коллинеарны между собою. Тогда существует одно и только одно проективное преобразование $\mathcal{A}$ проективной плоскости, переводящее каждую из точек одной четверки в соответствующую точку другой* (*т. е. Y_1 в Y'_1, Y_2 в Y'_2, Y_3 в Y'_3 и E в E'*).

В самом деле, рассматривая данные четверки как четверки фундаментальных точек двух проективных координатных систем и ставя в соответствие каждой точке M ту точку M', которая относительно координатной системы $Y'_1Y'_2Y'_3E'$ имеет те самые тройки координат, которые точка M имела относительно системы $Y_1Y_2Y_3E$, мы получим проективное преобразование, переводящее соответственно точки Y_1, Y_2, Y_3, E в точки Y'_1, Y'_2, Y'_3, E'.

Это преобразование единственно, так как, по только что доказанному, при всяком проективном преобразовании $\mathcal{A}$, переводящем точки Y_1, Y_2, Y_3, E соответственно в точки Y'_1, Y'_2, Y'_3, E', тройки координат точки $\mathcal{A}M$ относительно системы $Y'_1Y'_2Y'_3E'$ суть не что иное, как тройки координат точки M относительно системы $Y_1Y_2Y_3E$.

Замечание 3. Непосредственными следствиями теоремы являются такие простые утверждения:

1° Существует бесконечно много проективных преобразований плоскости, переводящих данные три ее неколлинеарные точки A, B, C в любые три неколлинеарные точки A', B', C'. Тем более существует бесконечно много проективных преобразований, переводящих одну заданную точку в другую.

2° Существует бесконечно много проективных преобразований плоскости, переводящих пару заданных прямых d, g в пару заданных прямых d', g'. Достаточно взять любые две точки A, B на прямой d, две точки C и D на

прямой g, а также точки A', B' на прямой d', точки C', D' на прямой g' и построить проективное преобразование, переводящее точки A, B, C, D соответственно в A', B', C', D'.

Тем более существует бесконечно много проективных преобразований, переводящих одну из двух данных прямых в другую, а также отображающих любую данную прямую саму на себя.

Предполагая, что в плоскости выбрана определенная система проективных координат, запишем, в частности, преобразование, отображающее одну из координатных прямых на другую, положим прямую $x_1=0$ на прямую $x_3=0$. Таким преобразованием является, например, преобразование

$$\begin{aligned} x_1' &= x_3, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_1. \end{aligned}$$

Запишем в качестве второго примера преобразование, переводящее любую прямую $\{a_1:a_2:a_3\}$ в одну из координатных прямых, например, предполагая, что $a_1\neq 0$, в прямую $x_1=0$. В качестве такого преобразования можно взять

$$\begin{aligned} x_1' &= a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3. \end{aligned}$$

3. **Задание проективных преобразований проективной плоскости аффинными преобразованиями трехмерного пространства.** Проективную плоскость рассматриваем как связку с центром O. Данное проективное преобразование $\mathcal{A}$ задается переходом от исходной проективной системы координат $\overline{X_1X_2X_3E}$ к новой системе координат $\overline{X_1'X_2'X_3'E'}$. Берем в классе аффинных координатных систем с началом O, соответствующих проективной координатной системе $\overline{X_1X_2X_3E}$, какую-нибудь определенную систему $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, а в классе аффинных систем, соответствующих проективной координатной системе $\overline{X_1'X_2'X_3'E'}$, — какую-нибудь систему $O\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$. Аффинное преобразование, задаваемое переходом от системы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ к системе $O\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$, переводит каждый луч $m=\overline{OM}$ связки O в луч

$$\mathcal{A}m=\overline{OM'},$$

являющийся образом луча $\overline{OM}$ при преобразовании $\mathcal{A}$, и в этом смысле определяет в связке O заданное в ней проективное преобразование $\mathcal{A}$.

Обратно, каждое аффинное преобразование $\mathcal{A}$ трехмерного пространства, задаваемое переходом от (какой-нибудь) аффинной координатной системы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ к (какой-нибудь) координатной системе $O\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ (с тем же началом O), определяет проективное преобразование $\mathcal{A}$ связки O, задаваемое переходом от проективной системы координат $\overline{X_1X_2X_3E}$ (состоящей из класса всех аффинных систем, эквивалентных системе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$) к проективной координатной системе $\overline{X_1'X_2'X_3'E'}$ (состоящей из всех аффинных систем, эквивалентных системе $O\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$). Спрашивается: когда два аффинных преобразования $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$ (оставляющих неподвижной точку O) определяют одно и то же проективное преобразование $\mathcal{A}$ связки O? Без ограничения общности можно предположить, что оба преобразования $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$ определены переходом от одной и той же аффинной си-

стемы координат $Oe_1e_2e_3$ соответственно к системам $Oe'_1e'_2e'_3$ и $Oe''_1e''_2e''_3$. Для того чтобы они определяли одно и то же проективное преобразование, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы системы $Oe'_1e'_2e'_3$ и $Oe''_1e''_2e''_3$ были эквивалентны, т. е. чтобы существовало такое $\lambda \neq 0$, что

$$e'_1 = \lambda e''_1, \quad e'_2 = \lambda e''_2, \quad e'_3 = \lambda e''_3.$$

Но тогда аффинное отображение $\mathcal{A}''$ получается из аффинного отображения $\mathcal{A}'$ умножением его на растяжение (гомотетию) с центром O и коэффициентом растяжения λ. Итак, доказана

Теорема 5. *Всякое проективное преобразование связки O порождается некоторым аффинным преобразованием трехмерного пространства, оставляющим неподвижную точку O; обратно, всякое аффинное преобразование пространства, оставляющее неподвижной точку O, порождает некоторое проективное преобразование связки O; два аффинных преобразования (оставляющие неподвижной точку O) тогда и только тогда порождают одно и то же проективное преобразование связки O, когда каждое из этих аффинных преобразований получается из другого последующим растяжением пространства с центром O.*

4. Подгруппа проективно-аффинных преобразований. *Проективное преобразование проективно-аффинной плоскости* (т. е. проективной плоскости с выделенной в ней несобственной прямой [1])) *называется проективно-аффинным, если оно отображает несобственную прямую саму на себя* (т. е. отображает всякую несобственную точку на несобственную).

Замечание 4. Для того чтобы проективное преобразование было проективно-аффинным, достаточно, чтобы оно отображало две какие-нибудь несобственные точки M_1 и M_2 на несобственные же точки M'_1 и M'_2: тогда и несобственная прямая, будучи инцидентной точкам M_1 и M_2, отобразится на прямую, инцидентную несобственным точкам M'_1 и M'_2, т. е. на несобственную прямую.

Замечание 5. *При проективно-аффинном преобразовании $\mathcal{C}$ всякая собственная точка M отображается на собственную точку M'.*

В самом деле, пусть точка $M' = \mathcal{C}M$ несобственная. В силу взаимной однозначности отображения $\mathcal{C}$ точка M', будучи образом собственной точки M, не может быть образом никакой несобственной точки. Поэтому из сделанного предположения следует, что при отображении $\mathcal{C}$ несобственная прямая отображается на свою истинную часть, что невозможно, так как при проективном преобразовании всякая прямая (как множество инцидентных ей точек) отображается *на* прямую.

Итак, *при проективно-аффинном отображении $\mathcal{C}$ проективной плоскости происходит отображение множества всех собственных точек плоскости на себя, т. е. происходит некоторое преобразование $\mathcal{C}_0$*

[1]) Можно ограничиться рассмотрением арифметической проективной плоскости с несобственной прямой $x_3 = 0$ на ней.

той аффинной плоскости, от пополнения которой несобственными элементами произошла данная проективная плоскость. Докажем, что *это преобразование $\mathscr{C}_0$ является аффинным.*

Предполагаем, что данная проективная плоскость есть арифметическая проективная плоскость с несобственной прямой $x_3 = 0$.

Рассмотрим сначала какое-нибудь проективное преобразование $\mathscr{C}$, задаваемое формулами

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \lambda (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3), \\ x_2' &= \lambda (c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3), \\ x_3' &= \lambda (c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

выражающими однородные координаты x_1', x_2', x_3' точки

$$M' = \mathscr{C}M$$

через однородные координаты x_1, x_2, x_3 точки M.

Предположим, что при преобразовании $\mathscr{C}$ образом несобственной точки всегда является несобственная же точка. Тогда, полагая в последнем равенстве (1)

$$x_3 = 0,$$

будем при любых значениях x_1 и x_2 всегда иметь $x_3' = 0$. Но это возможно лишь тогда, когда

$$c_{31} = c_{32} = 0.$$

Так как детерминант матрицы C отличен от нуля, то

$$c_{33} \neq 0,$$

так что преобразование (1) записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \lambda (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3), \\ x_2' &= \lambda (c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3), \\ x_3' &= \lambda c_{33}x_3, \\ \det C &= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{vmatrix} = c_{33} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Перейдем к аффинным координатам собственных точек арифметической проективной плоскости. Для этого поделим левую

и правую части равенств (5) на $x_3' = \lambda c_{33} x_3$; получим

$$\frac{x_1'}{x_3'} = \frac{c_{11}}{c_{33}}\frac{x_1}{x_3} + \frac{c_{12}}{c_{33}}\frac{x_2}{x_3} + \frac{c_{13}}{c_{33}},$$

$$\frac{x_2'}{x_3'} = \frac{c_{21}}{c_{33}}\frac{x_1}{x_3} + \frac{c_{22}}{c_{33}}\frac{x_2}{x_3} + \frac{c_{23}}{c_{33}};$$

полагая

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x' = \frac{x_1'}{x_3'}, \quad y' = \frac{x_2'}{x_3'},$$

$$a_{11} = \frac{c_{11}}{c_{33}}, \quad a_{12} = \frac{c_{12}}{c_{33}}, \quad a_{13} = \frac{c_{13}}{c_{33}},$$

$$a_{21} = \frac{c_{21}}{c_{33}}, \quad a_{22} = \frac{c_{22}}{c_{33}}, \quad a_{23} = \frac{c_{23}}{c_{33}},$$

получим

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{6}$$

Итак, проективно-аффинное преобразование, рассматриваемое на множестве собственных точек плоскости, есть аффинное преобразование.

Обратно, если дано аффинное преобразование

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13},$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}$$

плоскости, то, переходя к однородным координатам, можем написать

$$\frac{x_1'}{x_3'} = a_{11}\frac{x_1}{x_3} + a_{12}\frac{x_2}{x_3} + a_{13},$$

$$\frac{x_2'}{x_3'} = a_{21}\frac{x_1}{x_3} + a_{22}\frac{x_2}{x_3} + a_{23}.$$

Отсюда

$$x_1' : (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) = x_3' : x_3 = x_2' : (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = \lambda,$$

так что

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \lambda\,(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3), \\ x_2' &= \lambda\,(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3), \\ x_3' &= \lambda x_3, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

что дает при $x_3 = 0$ непременно $x_3' = 0$, — получаем проективное

преобразование, оставляющее на месте несобственную прямую, т. е. проективно-аффинное преобразование. Доказана следующая

Теорема 6. *Всякое проективно-аффинное преобразование, рассматриваемое лишь на множестве собственных точек проективной плоскости, есть аффинное преобразование.*

Обратно, всякое аффинное преобразование посредством формул (7) *может быть распространено на всю проективную плоскость таким образом, что получится проективно-аффинное преобразование проективной плоскости.*

Отсюда легко следует, что *совокупность всех проективно-аффинных преобразований есть подгруппа группы всех проективных преобразований проективной плоскости, изоморфная группе всех аффинных преобразований (обыкновенной аффинной плоскости)* [1]).

Иногда доказанную теорему кратко, но неточно формулируют так: *аффинные преобразования суть проективные преобразования, при которых несобственная прямая отображается на себя.*

В заключение покажем, какой вид имеет в аффинных координатах любое проективное преобразование, если его рассматривать лишь на множестве собственных точек плоскости.

Итак, пишем снова формулы проективного преобразования (1) и переходим к аффинным координатам, для чего переписываем эти формулы в виде

$$\frac{x_1'}{x_3'} = \frac{c_{11}\dfrac{x_1}{x_3} + c_{12}\dfrac{x_2}{x_3} + c_{13}}{c_{31}\dfrac{x_1}{x_3} + c_{32}\dfrac{x_2}{x_3} + c_{33}},$$

$$\frac{x_2'}{x_3'} = \frac{c_{21}\dfrac{x_1}{x_3} + c_{22}\dfrac{x_2}{x_3} + c_{23}}{c_{31}\dfrac{x_1}{x_3} + c_{32}\dfrac{x_2}{x_3} + c_{33}}$$

и полагаем в них

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x' = \frac{x_1'}{x_3'}, \quad y' = \frac{x_2'}{x_3'}.$$

Получаем

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{c_{11}x + c_{12}y + c_{13}}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}}, \\ y' &= \frac{c_{21}x + c_{22}y + c_{23}}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Это и есть формулы, дающие проективное преобразование

[1]) То, что проективно-аффинные преобразования образуют группу, без труда выводится из самого их определения.

собственных точек плоскости в аффинных координатах. Эти формулы перестают действовать для точек, лежащих на прямой $c_{31}x + c_{32}y + c_{33} = 0$, т. е. на прямой $c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 = 0$. Но, как показывает последняя из формул (1), эти точки при нашем преобразовании переходят в точки вида $(x_1' : x_2' : 0)$, т. е. в несобственные точки плоскости; естественно, что мы не можем найти аффинных координат этих точек.

Пусть дано какое-нибудь проективное преобразование плоскости, не являющееся проективно-аффинным. Оно переводит несобственную

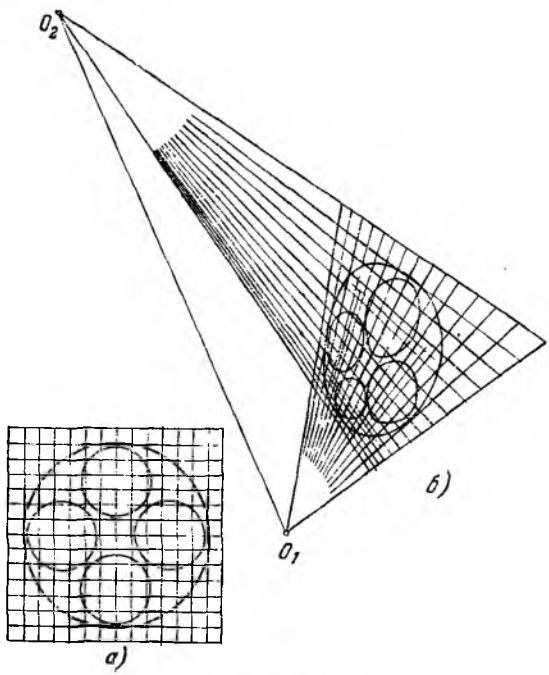


Рис. 234.

прямую в некоторую обыкновенную прямую d. Пусть при этом несобственные точки (1:0:0) и (0:1:0) оси абсцисс и оси ординат какой-нибудь (хотя бы прямоугольной) координатной системы переходят соответственно в точки O_1 и O_2 прямой d. Тогда два несобственных пучка прямых $x = a$ и $y = b$, параллельных (на обыкновенной плоскости) соответственно оси ординат и абсцисс выбранной прямоугольной координатной системы, перейдут соответственно в пучки с центрами O_1 и O_2, а квадратная сетка, изображенная на рис. 234, *а*, перейдет в сетку четырехугольников, изображенную на

рис. 234, *б*. Эти рисунки, а также сделанный на их основе рис. 235 помогут читателю составить себе наглядное представление о том, что может происходить при проективном преобразовании.

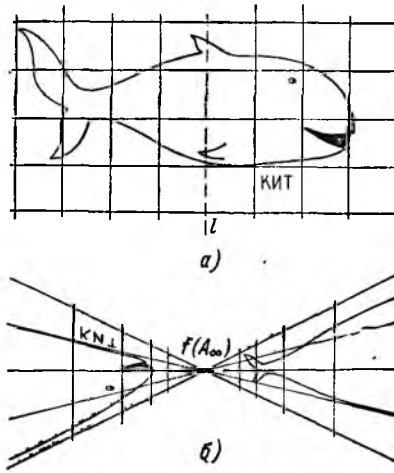


Рис. 235.

5. Проективные отображения одной плоскости на другую. Перспективные отображения. До сих пор мы рассматривали лишь проективные преобразования, т. е. проективные отображения какой-либо проективной плоскости на себя. Однако легко определить и взаимно однозначные проективные отображения одной проективной плоскости P на другую P'. Для того чтобы задать такое отображение, надо задать на плоскостях P и P' по проективной координатной системе $X_1X_2X_3E$ и $X_1'X_2'X_3'E'$: этим определится отображение $\mathscr{C}$ плоскости P на плоскость P', которое каждой точке M плоскости P ставит в соответствие ту точку M' плоскости P', которая в системе $X_1'X_2'X_3'E'$ имеет те самые тройки координат, какие точка M имела в системе $X_1X_2X_3E$.

Пусть π и π' — две плоскости в трехмерном пространстве; пополняем их соответствующими несобственными точками до проективных плоскостей $\bar{\pi}$ и $\bar{\pi}'$. Берем какую-нибудь точку O, не лежащую ни в одной из двух плоскостей $\bar{\pi}$ и $\bar{\pi}'$. Каждой точке M проективной плоскости $\bar{\pi}$ ставим в соответствие ту собственную или несобственную точку M' плоскости $\bar{\pi}'$, в которой эту плоскость $\bar{\pi}'$ пересекает луч $m = \overline{OM}$ связки O (рис. 236). Полученное таким образом отображение плоскости $\bar{\pi}$ на плоскость π' называется *перспективным отображением с центром перспективы* O.

Легко видеть, что всякое перспективное отображение является проективным. В самом деле, возьмем в связке O какую-нибудь систему проективных координат $\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3\bar{E}$. Она определит в плоскости $\bar{\pi}$ проективную систему $X_1X_2X_3E$, а в плоскости $\bar{\pi}'$ — систему $X_1'X_2'X_3'E'$. Очевидно, и точка M плоскости $\bar{\pi}$ (в системе $X_1X_2X_3E$), и точка M'

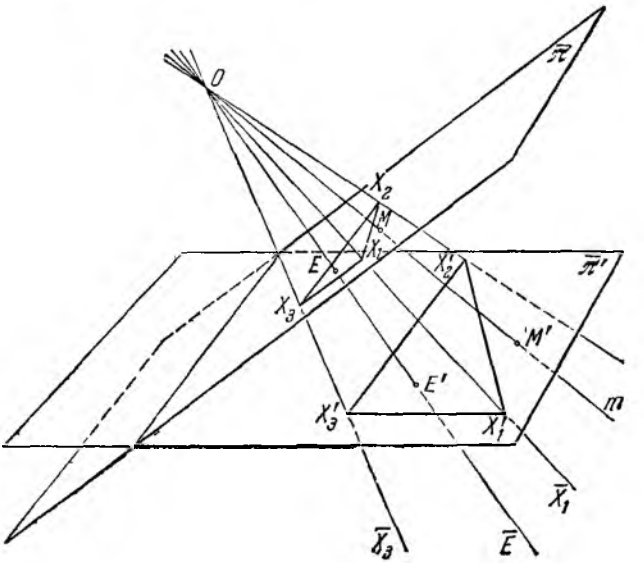


Рис. 236.

плоскости $\bar{\pi}'$ в системе $X_1'X_2'X_3'E'$ будут иметь те самые координаты, которые луч $m = \overline{OM} = \overline{OM'}$ имеет в системе $\bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3\bar{E}$.

Замечание 6. Важность перспективных отображений вытекает из следующей теоремы, выражающей один из основных фактов проективной геометрии:

Всякое проективное отображение плоскости $\bar{\pi}$ на плоскость $\bar{\pi}'$ либо отображает несобственную прямую плоскости $\bar{\pi}$ на несобственную прямую плоскости $\bar{\pi}'$ (и, следовательно, сводится к аффинному отображению плоскости π на плоскость π'), либо может быть осуществлено посредством собственного или несобственного движения плоскости π в пространстве, пополнения перемещенной плоскости π' до проективной плоскости $\bar{\pi}'$ и последующего перспективного отображения плоскости $\bar{\pi}$ на плоскость $\bar{\pi}'$.

Доказательство этой теоремы читатель может найти в книге А. С. Пархоменко и П. С. Моденова «Геометрические преобразования» (Москва, Издательство Московского университета, 1961). Эта книга вообще может быть горячо рекомендована читателю, желающему в доступном изложении подробнее ознакомиться с основными свойствами проективных преобразований.

Замечание 7. Легко видеть, что всякое перспективное отображение какой-нибудь плоскости $\bar{\pi}$ на параллельную ей плоскость $\bar{\pi}'$ есть аффинное отображение (так как оно отображает множество всех несобственных точек плоскости $\bar{\pi}$ на множество несобственных точек плоскости $\bar{\pi}'$).

§ 7. Проективные координаты на прямой. Проективные отображения прямой

Подобно тому, как проективная плоскость находится в естественном взаимно однозначном (перспективном) соответствии со связкой, так проективная прямая находится в естественном соответствии с пучком прямых.

Пусть в самом деле на какой-нибудь плоскости π, проходящей через данную прямую d, взята точка O, не лежащая на прямой d.

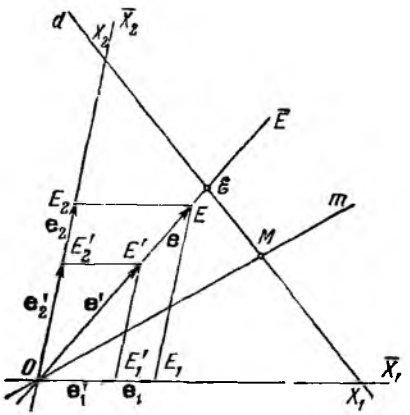


Рис. 237.

Прямые m, проходящие через точку O, — мы будем их в дальнейшем называть *лучами* — образуют пучок, который будем обозначать одной буквой O. Каждой точке M прямой d соответствует единственный ведущий в нее луч $m = \overline{OM}$ пучка O, и этим установлено соответствие, называемое *перспективным*, между точками M прямой d и лучами m пучка O. Соответствие это взаимно однозначно, если считать, что лучу пучка O, параллельному прямой d, соответствует несобственная точка этой последней.

Далее все идет знакомым нам путем, только проще, чем в случае плоскости и связки. Всякая аффинная система координат Oe_1e_2 на плоскости π, начало которой лежит в центре O пучка O, называется *системой координат в пучке* (рис. 237); *координатами данного луча пучка* называются координаты любого направляющего вектора этого луча относительно системы Oe_1e_2. Две координатные системы Oe_1e_2 и $Oe_1'e_2'$ называем *эквивалентными*, если при некотором $\lambda \neq 0$ имеем $e_1' = \lambda e_1$, $e_2' = \lambda e_2$. Совокупность всех пар x_1, x_2 координат всякого луча m пучка O в двух эквивалентных координатных системах Oe_1e_2 и $Oe_1'e_2'$ будет одна и та же. Обратно, если две аффинные координатные системы Oe_1e_2 и $Oe_1'e_2'$ в пучке таковы, что каждый луч пучка имеет в обеих этих системах одни и те же

множества пар координат x_1, x_2, то — как легко видеть (ср. § 5) — системы Oe_1e_2 и $Oe_1'e_2'$ эквивалентны между собою.

Определение 7. *Задать в пучке O систему проективных координат* — значит задать в этом пучке какую-нибудь аффинную систему Oe_1e_2, причем две эквивалентные аффинные системы координат, по определению, задают одну и ту же проективную систему. Другими словами: проективная система координат в пучке есть класс эквивалентных между собою аффинных систем.

Чтобы определить проективную координатную систему в пучке, достаточно задать два каких-нибудь его луча $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$, называемых *координатными лучами*, и третий, «*единичный*» луч $\overline{E}$: беря на луче $\overline{E}$ произвольную точку E и проектируя ее на координатные лучи $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$, получим векторы $\overrightarrow{OE_1} = e_1$ и $\overrightarrow{OE_2} = e_2$, которые и определяют аффинную систему Oe_1e_2, задающую данную проективную. Беря на луче $\overline{E}$ всевозможные точки E, получим указанным способом все аффинные координатные системы, задающие данную проективную. Всегда при этом имеем векторное равенство

$$\overrightarrow{OE} = e = e_1 + e_2.$$

Поэтому задать в пучке проективную координатную систему — значит задать в этом пучке три луча: два координатных $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ и один единичный $\overline{E}$.

Проективную прямую d считаем раз на всегда поставленной во взаимно однозначное перспективное соответствие с пучком O; последующие рассуждения в равной мере относятся к пучку O и к перспективной ему прямой d, надо только считать равноправными слова «точка M прямой d» и «луч m пучка O». В частности, *проективная система координат на прямой* есть тройка «фундаментальных» точек: две координатные точки X_1 и X_2 и единичная точка $\mathscr{E}$ (см. рис. 237). В системе координат $X_1X_2\mathscr{E}$ сами фундаментальные точки имеют следующую координатную запись:

$$X_1 = (1:0), \qquad X_2 = (0:1), \qquad \mathscr{E} = (1:1).$$

Каждая точка M прямой (каждый луч $m = \overline{OM}$ пучка O) записывается в виде

$$M = (x_1 : x_2),$$

где любая пара координат $x_1 : x_2$ есть пара координат луча $m = \overline{OM}$ в любой аффинной системе координат Oe_1e_2, задающей данную проективную систему X_1X_2E.

Если точка M отлична от точки $X_1 = (1:0)$, то для нее $x_2 \neq 0$ и число $\frac{x_1}{x_2}$ называется *неоднородной проективной координатой точки*

M (в данной системе координат). Пусть наряду с данной, «исходной» системой координат $X_1X_2\mathscr{E}$ на прямой d дана вторая, проективная система координат $X_1'X_2'\mathscr{E}'$ и координатная запись точек X_1', X_2', $\mathscr{E}'$ в системе $X_1X_2\mathscr{E}$ есть

$$\left.\begin{aligned} X_1' &= (a_1 : a_2), \\ X_2' &= (b_1 : b_2), \\ \mathscr{E}' &= (\varepsilon_1 : \varepsilon_2). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Предположим, что пары координат a_1, a_2; b_1, b_2; ε_1, ε_2 берутся **«согласованно»** в смысле векторного равенства

$$\{a_1,\ a_2\} + \{b_1,\ b_2\} = \{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\},$$

означающего, что взятые пары координат суть пары координат соответствующих лучей пучка в одной и той же аффинной системе, задающей данную проективную. Тогда координаты x_1', x_2' какой-нибудь точки M в системе $X_1'X_2'\mathscr{E}'$ связаны с координатами x_1, x_2 той же точки M в системе $X_1X_2\mathscr{E}$ формулами преобразования координат

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= a_1x_1' + b_1x_2', \\ \lambda x_2 &= a_2x_1' + b_2x_2' \end{aligned}$$

(ср. формулы (2) — (4) в § 5, стр. 595—596).

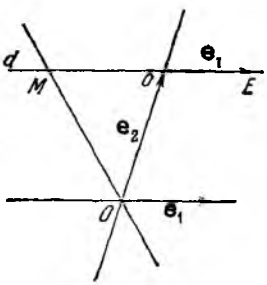


Рис. 238.

Если пары (1) не являются согласованными, то их можно согласовать, умножая первые две из них на множители $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, однозначно определяемые требованием

$$\lambda_1\{a_1,\ a_2\} + \lambda_2\{b_1,\ b_2\} = \{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\}$$

(ср. § 5, стр. 597).

Замечание 1. Пусть на прямой d дана «аффинная» система координат $o\mathbf{e}_1$ в элементарном смысле главы I с началом o и единичным вектором $\mathbf{e}_1$. Ей соответствует на плоскости π и в пучке O вполне определенная аффинная координатная система $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ с тем же первым единичным вектором $\mathbf{e}_1$ и вторым вектором $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{Oo}$ (рис. 238). Проективная система координат, определенная в пучке O этой системой $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, переходит (посредством перспективного соответствия между пучком O и прямой d) в систему X_1X_2E на прямой d, называемую *системой однородных координат на прямой d*, соответствующей аффинной системе $o\mathbf{e}_1$. Точка $X_1 = (1:0)$ есть при этом несобственная точка прямой d (это несобственная точка плоскости π, удаленная в направлении прямой d); точка $X_2 = (0:1)$

есть точка o, а точка $E=(1:1)$ есть конец вектора $\mathbf{e}_1$, приложенного к точке o. Координаты $x_1:x_2$ точек M прямой d в этой системе координат называются *однородными координатами* (соответствующими данной аффинной системе). Связь между аффинной координатой x и однородными координатами x_1, x_2 точки M дается формулой $x=\frac{x_1}{x_2}$.

Замечание 2. Если на прямой d даны две точки A и B своими совершенно произвольно фиксированными парами координат $A=(a_1:a_2)$, $B=(b_1:b_2)$ в любой «исходной» проективной системе координат (например, в однородной), то любая пара координат x_1, x_2 (в той же исходной системе) любой точки M прямой d может быть записана в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\lambda a_1+\mu b_1,\\ x_2&=\lambda a_2+\mu b_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(«*параметрическое представление прямой* через пары координат точек A и B»). Любая такая запись определяет (при произвольных λ и μ, не равных нулю одновременно) некоторую точку M прямой d. При этом, если

$$\left.\begin{aligned} x'_1&=\lambda' a_1+\mu' b_1,\\ x'_2&=\lambda' a_2+\mu' b_2, \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

то $x_1:x_2=x'_1:x'_2$ тогда и только тогда, когда $\lambda:\mu=\lambda':\mu'$. Все это следует из того, что, задавая точки A, B вместе с *определенными парами* их (однородных) координат, мы фактически уже задаем на прямой новую проективную координатную систему: полагая (в аффинной координатной системе на плоскости, соответствующей исходной проективной системе координат на прямой) $\mathbf{e}'_1=\{a_1,\ a_2\}$, $\mathbf{e}'_2=\{b_1,\ b_2\}$, т. е. $\mathbf{e}'_1=\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{e}'_2=\overrightarrow{OB}$, получим на плоскости π аффинную систему $Oe'_1e'_2$, в которой вектор $\mathbf{u}=\{x_1,\ x_2\}=x_1\mathbf{e}'_1+x_2\mathbf{e}'_2$ есть направляющий вектор луча $\overrightarrow{OM}$.

Проективное отображение прямой d на прямую d' (отличную от прямой d или совпадающую с нею) определяется как отображение $\mathcal{A}$ прямой d на прямую d', задаваемое выбором на прямых d и d' по проективной системе координат X_1X_2E и $X'_1X'_2E'$, и состоящее в том, что каждой точке M прямой d ставится в соответствие та точка M', которая в координатной системе $X'_1X'_2E'$ имеет те самые координаты, которые точка M имела в системе X_1X_2E.

Совершенно аналогично определяется и проективное отображение пучка O на пучок O', а также проективное отображение прямой d на пучок O'.

Если прямые d и d' совпадают, так что X_1X_2E и $X'_1X'_2E'$ суть две проективные координатные системы на одной и той же прямой,

то координаты точки $M' = \mathcal{A}M$ в исходной системе X_1X_2E определяются по формулам

$$\begin{aligned} \lambda x_1' &= a_1x_1 + b_1x_2 \\ \lambda x_2' &= a_2x_1 + b_2x_2 \end{aligned} \qquad \text{для } M = (x_1 : x_2);$$

доказательство совершенно аналогично доказательству соответствующего предложения для проективных преобразований плоскости (см. § 6, стр. 600), только проще. Совершенно так же, как теорема 4 (§ 6) для плоскости, доказывается и следующая

Теорема 7. *Пусть X_1, X_2, E и X_1', X_2', E' — две тройки (попарно различных) точек на проективной прямой. Тогда существует единственное проективное преобразование прямой, переводящее соответственно точки X_1, X_2, E в X_1', X_2', E'.*

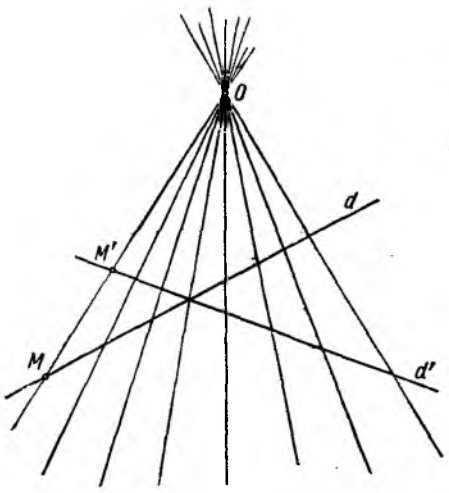


Рис. 239.

Рассматривая эти точки как фундаментальные точки двух проективных координатных систем на нашей прямой, мы получим искомое преобразование как преобразование, ставящее в соответствие каждой точке M прямой ту точку M', которая в координатной системе $X_1'X_2'E'$ имеет те самые координаты, которые точка M имела в системе X_1X_2E.

Если прямые d и d' различны, то, считая их раз навсегда перспективно отображенными на один и тот же пучок O, мы можем всякое проективное отображение одной из этих прямых на другую свести к проективному преобразованию пучка O, откуда следует, что теорема 7 имеет место не только для проективного преобразования прямой, но и для проективных отображений одной прямой на другую.

Частным случаем проективного отображения прямой d на прямую d' является перспективное отображение. Для того чтобы задать какое-нибудь *перспективное отображение* («*перспективу*») прямой d на прямую d' (обе прямые предполагаются лежащими в одной плоскости), надо задать какую-нибудь точку O, не лежащую ни на одной из этих прямых (эта точка называется *центром перспективы*); тогда перспективное отображение прямой d на прямую d', определяемое выбором точки O, состоит в том, что каждой точке M прямой d ставится в соответствие точка пересечения M' прямой d' с лучом

$\overline{OM}$ пучка O (рис. 239). То, что всякое перспективное отображение одной прямой на другую есть проективное отображение, доказывается совершенно так же, как аналогичное предложение для перспективного отображения одной плоскости на другую (§ 6, п. 5). Частным случаем проективного отображения пучка O на пучок O' (оба пучка предполагаются лежащими в одной и той же плоскости

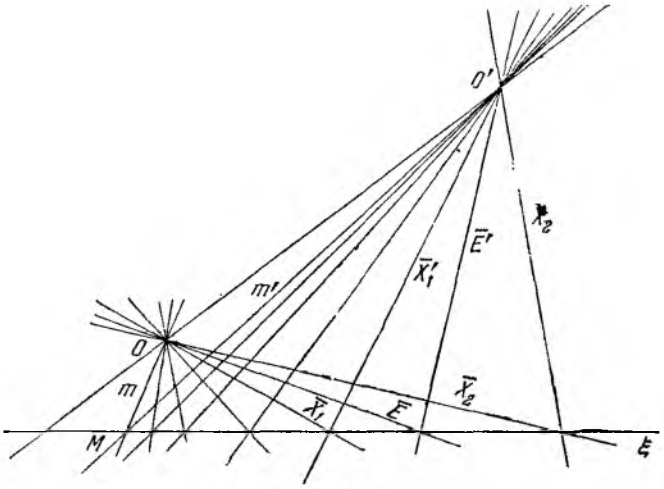


Рис. 240.

п) является *перспективное отображение*. Оно задается осью перспективы, т. е. прямой ξ, не являющейся лучом ни одного из пучков O и O', и состоит в том, что каждому лучу $m = \overline{OM}$ пучка O, где M — точка пересечения луча m с прямой ξ, ставится в соответствие луч $m' = \overline{O'M}$ пучка O' (рис. 240).

Для того чтобы убедиться, что полученное таким образом отображение $\mathcal{A}$ пучка O на пучок O' есть проективное отображение, достаточно взять на прямой ξ какую-нибудь проективную систему координат; она определит в пучках O и O' проективные координатные системы $\bar{X}_1\ \bar{X}_2\ \bar{E}$ и $\bar{X}_1'\bar{X}_2'\bar{E}'$. Очевидно, луч m имеет в системе $\bar{X}_1\ \bar{X}_2\ \bar{E}$ те же координаты, что и его образ m' в системе $\bar{X}_1'\bar{X}_2'\bar{E}'$.

Связь между проективными отображениями плоскостей и прямых, лежащих в этих плоскостях, дается следующим предложением.

Теорема 8. *Пусть $\mathcal{A}$ — проективное отображение плоскости P на плоскость P', d — прямая на плоскости P, d' — ее образ при отображении $\mathcal{A}$.*

Тогда отображение $\mathcal{A}$, рассматриваемое на множестве точек прямой d, является проективным отображением прямой d на прямую d'.

Доказательство. Пусть X_1, X_2 — две различные точки прямой d. Возьмем на плоскости P произвольную точку X_3, не лежащую на прямой d, и пусть E — точка плоскости P, не лежащая ни на одной из прямых $\overline{X_1X_2}$, $\overline{X_2X_3}$, $\overline{X_3X_1}$ (рис. 241). Обозначим через X_1', X_2', X_3', E' образы точек X_1, X_2, X_3, E при отображении $\mathcal{A}$.

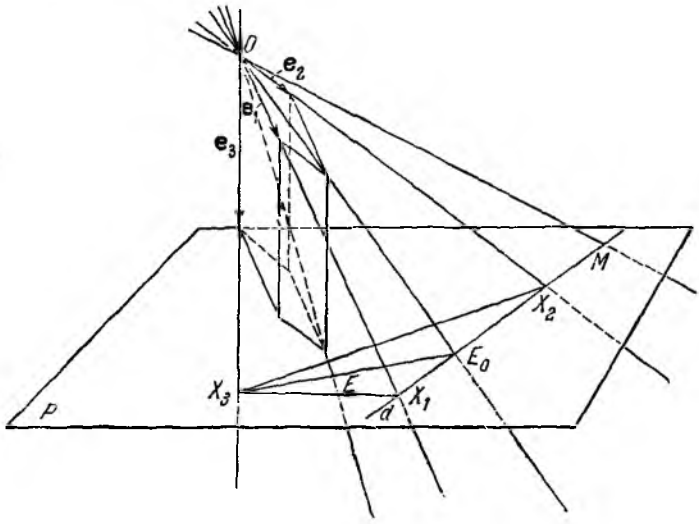


Рис. 241.

Пусть E_0 — точка пересечения прямых $d=\overline{X_1X_2}$ и $\overline{X_3E}$. Ее образ E_0' при отображении $\mathcal{A}$ будет точкой пересечения прямых $d'=\overline{X_1'X_2'}$ и $\overline{X_3'E'}$. Рассмотрим две системы проективных координат: $X_1X_2X_3E$ на плоскости P и $X_1'X_2'X_3'E'$ на плоскости P'. В этих системах имеем соответственно[1]):

$$\begin{array}{l|l} X_1=(1:0:0), & X_1'=(1:0:0), \\ X_2=(0:1:0), & X_2'=(0:1:0), \\ X_3=(0:0:1), & X_3'=(0:0:1), \\ E=(1:1:1), & E'=(1:1:1), \\ E_0=(1:1:0), & E_0'=(1:1:0). \end{array}$$

[1]) Лишь последняя строка в этой совокупности равенств требует, может быть, некоторого пояснения. Достаточно показать, что $E_0=(1:1:0)$. Прямая $d=\overline{X_1X_2}$ имеет уравнение $x_3=0$. Если уравнение прямой $\overline{X_3E}$ есть $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$, то (так как точки $X_3=(0:0:1)$ и $E=(1:1:1)$ лежат на этой прямой) имеем $u_3=0$, $u_1+u_2=0$, так что можно положить $u_1=1$, $u_2=-1$, $u_3=0$. Точка E_0, будучи точкой пересечения прямых $x_3=0$ и $x_1-x_2=0$, имеет координаты $x_1=x_2\neq 0$ и $x_3=0$, что и дает запись $E_0=(1:1:0)$.

Пусть M — произвольная точка прямой d и M' — ее образ при отображении $\mathcal{A}$. Точка M' лежит на прямой d'. Так как точка M лежит на стороне $\overline{X_1X_2} = d$ координатного треугольника $X_1X_2X_3$, то третья ее координата равна нулю.

Пусть

$$M = (x_1 : x_2 : 0).$$

Так как $\mathcal{A}$ — проективное отображение, то в системе $X_1'X_2'X_3'E'$ имеем

$$M' = (x_1 : x_2 : 0).$$

Предположим, что обе плоскости отображены посредством фиксированного (перспективного) изоморфизма на связку O, и пусть $Oe_1e_2e_3$ — аффинная система координат в связке O, задающая проективную координатную систему $X_1X_2X_3E$; тогда Oe_1e_2 есть аффинная координатная система в плоскости (и в лежащем в этой плоскости пучке лучей), задающая проективную систему координат $X_1X_2E_0$ на прямой $\overline{X_1X_2} = d$.

Следовательно, в системе $X_1X_2E_0$ точка M имеет координатную запись $M = (x_1 : x_2)$.

Подобным же образом устанавливается, что в проективной координатной системе $X_1'X_2'E_0'$ на прямой $d' = \overline{X_1'X_2'}$ имеем $M' = (x_1 : x_2)$, откуда и следует, что посредством отображения $\mathcal{A}$ прямая d проективно отображается на прямую d'.

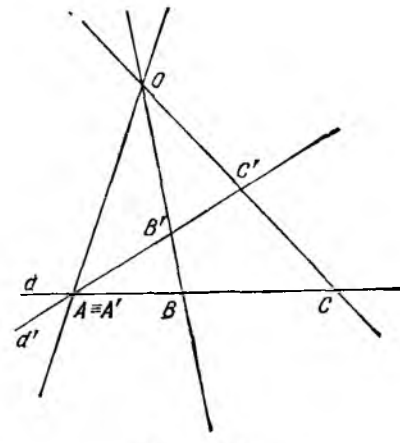


Рис. 242.

Теорема 9. *Всякое проективное отображение прямой d на прямую d' слагается из движения прямой d и последующего перспективного отображения.*

Доказательство. Пусть при данном проективном отображении прямой d на прямую d' точка A прямой d отображается в точку A' прямой d'.

Посредством движения прямой d можно совместить точку A с точкой A'. Поэтому теорема 9 вытекает из следующего предложения.

Теорема 10. *Пусть прямые d и d' пересекаются в некоторой точке A. Всякое проективное отображение $\mathcal{A}$ прямой d на прямую d', отображающее точку A на эту же самую точку, есть перспективное отображение прямой d на прямую d'.*

Доказательство теоремы 10. Возьмем на прямой d две различные точки B и C, ни одна из которых не совпадает с точкой A (рис. 242). Образы точек B и C при данном проективном отображении $\mathcal{A}$ обозначим через B' и C'. Обозначим через O точку пересечения прямых BB' и CC'. Два проективных отображения прямой d на прямую d' — заданное отображением $\mathcal{A}$ и перспективное отображение прямой d на прямую d' с центром перспективы O — отображают три точки A, B, C соответственно на $A'(=A)$, B', C'. Следовательно, по теореме 7 оба эти отображения совпадают между собою, что и требовалось доказать.

Аналогично доказываются двойственные теоремы.

Теорема $\overline{10}$. *Пусть пучки O и O' имеют общий луч*

$$a = \overline{OO'},$$

переходящий в себя при данном проективном отображении $\mathcal{A}$ пучка O на пучок O'. Тогда это отображение является перспективным.

Из этой теоремы вытекает, что всякое проективное отображение одного пучка на другой слагается из движения и перспективы.

§ 8. Двойное отношение

1. Определение двойного отношения четырех точек на прямой. Пусть A, B, C, D — четыре точки, лежащие на одной прямой g. Предположим сначала, что как прямая g, так и взятые на ней точки A, B, C, D являются собственными. *Двойным отношением четырех точек* A, B, C, D называется число

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}.$$

Это число мы будем обозначать через

$$(ABCD);$$

его называют также *сложным* или *ангармоническим отношением четырех точек* A, B, C, D. Иногда $(ABCD)$ называют *двойным отношением точки D к трем точкам A, B, C.*

Двойное отношение $(ABCD)$ положительно, если обе точки C и D лежат внутри или вне отрезка AB; оно отрицательно, если из двух точек C и D одна лежит внутри, а другая вне отрезка AB; в этом случае говорят, что *пары точек A, B и C, D разделяют друг друга* (на данной прямой). Если точка D уходит в бесконечность, а точки A, B, C остаются на своих местах, то отношение $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$ стремится к пределу -1, а $(ABCD)$ — к пределу $-\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$.

Введем на прямой g аффинную систему координат, и пусть в этой системе

$$A=\xi_1,\quad B=\xi_2,\quad C=\xi_3,\quad D=\xi_4;$$

тогда

$$(ABCD)=\frac{\xi_3-\xi_1}{\xi_2-\xi_3}:\frac{\xi_4-\xi_1}{\xi_2-\xi_4}. \tag{1}$$

Если перейти к однородным координатам, полагая [1])

$$\xi=\frac{x}{t}$$

и вводя обозначения

$$A=(x_1:t_1),\quad B=(x_2:t_2),\quad C=(x_3:t_3),\quad D=(x_4:t_4),$$

то для двойного отношения четырех точек A, B, C, D будем иметь

$$(ABCD)=\frac{\xi_3-\xi_1}{\xi_2-\xi_3}:\frac{\xi_4-\xi_1}{\xi_2-\xi_4}=\frac{\dfrac{x_3}{t_3}-\dfrac{x_1}{t_1}}{\dfrac{x_2}{t_2}-\dfrac{x_3}{t_3}}:\frac{\dfrac{x_4}{t_4}-\dfrac{x_1}{t_1}}{\dfrac{x_2}{t_2}-\dfrac{x_4}{t_4}}=\frac{\begin{vmatrix}x_1 & t_1\\ x_3 & t_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_2 & t_2\\ x_4 & t_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x_1 & t_1\\ x_4 & t_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_2 & t_2\\ x_3 & t_3\end{vmatrix}},$$

т. е. [2])

$$(ABCD)=\frac{\begin{vmatrix}x_1 & t_1\\ x_3 & t_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_2 & t_2\\ x_4 & t_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x_1 & t_1\\ x_4 & t_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x_2 & t_2\\ x_3 & t_3\end{vmatrix}}. \tag{2}$$

---

[1]) Наши привычные обозначения x_1, x_2 для однородных координат на прямой мы здесь заменяем через x, t (а аффинную координату на прямой обозначаем через ξ).

[2]) Правилом для запоминания детерминантов в числителе и знаменателе правой части формулы (2) может служить следующее. В четверостишиях различают рифмы перекрестные (самые распространенные), когда рифмуются первая и третья, вторая и четвертая строки, и рифмы опоясывающие, когда рифмуется первая строка с четвертой, а вторая с третьей. Первые четыре стиха во всякой строфе «Евгения Онегина» рифмованы перекрестно, например:

Меж тем Онегина явленье
У Лариных произвело
На всех большое впечатленье,
И всех соседей развлекло.

Третье четверостишие онегинской строфы имеет опоясывающие рифмы:

Иные даже утверждали,
Что свадьба слажена совсем,
Но остановлена затем,
Что модных колец не достали.

Детерминанты в числителе правой части формулы (2) построены по принципу перекрестных рифм: (1, 3); (2, 4), детерминанты в знаменателе — по принципу опоясывающих: (1, 4); (2, 3).

Выражение, стоящее в правой части равенства (2), имеет смысл и в том случае, когда одна из точек A, B, C, D является несобственной.

Если A, B, C — собственные, а D — несобственная точка, то в формуле (2) можно положить:

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2, \quad x_3 = \xi_3,$$
$$t_1 = t_2 = t_3 = 1,$$
$$x_4 \neq 0, \quad t_4 = 0,$$

и мы получаем

$$(ABCD) = -\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$$

— в соответствии со сказанным выше.

Если при этом C есть середина отрезка $\overline{AB}$, то $(ABCD) = -1$.

Перейдем теперь от однородных координат $x:t$ к каким-нибудь другим проективным координатам $x':t'$ на прямой g, и пусть в этих координатах

$$A = (x_1':t_1'), \quad B = (x_2':t_2'), \quad C = (x_3':t_3'), \quad D = (x_4':t_4').$$

Покажем, что тогда

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & t_1 \\ x_3 & t_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & t_2 \\ x_4 & t_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & t_1 \\ x_4 & t_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & t_2 \\ x_3 & t_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_1' & t_1' \\ x_3' & t_3' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2' & t_2' \\ x_4' & t_4' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1' & t_1' \\ x_4' & t_4' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2' & t_2' \\ x_3' & t_3' \end{vmatrix}}. \tag{3}$$

В самом деле, пусть

$$x = ax' + bt', \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4}$$
$$t = cx' + dt',$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} x_1 & t_1 \\ x_3 & t_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax_1' + bt_1' & cx_1' + dt_1' \\ ax_3' + bt_3' & cx_3' + dt_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1' & t_1' \\ x_3' & t_3' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix},$$

и аналогично для трех остальных детерминантов, стоящих в правой части формулы (4).

Мы видим, что при преобразовании проективных координат на прямой каждый из упомянутых детерминантов умножается на одно и то же число, следовательно, оно появляется в качестве сомножителя два раза в числителе и два раза в знаменателе формулы (3). Итак, доказана формула (3), выражающая *инвариантность двойного отношения относительно преобразования проективных координат на прямой.*

Теперь естественно дать следующее основное

Определение. Пусть A, B, C, D — четыре точки, лежащие на проективной прямой g, на которой дана какая-нибудь, совершенно произвольная система проективных координат. Пусть в этой системе проективных координат

$$A=(x_1:t_1),\quad B=(x_2:t_2),\quad C=(x_3:t_3),\quad D=(x_4:t_4).$$

Двойным отношением четырех точек A, B, C, D называется число $(ABCD)$, определенное равенством

$$(ABCD)=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & t_1 \\ x_3 & t_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_2 & t_2 \\ x_4 & t_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & t_1 \\ x_4 & t_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_2 & t_2 \\ x_3 & t_3 \end{vmatrix}}. \tag{2}$$

Равенство (3) показывает, что двойное отношение четырех точек не зависит от того, в какой системе проективных координат на прямой взяты координаты этих точек. Если, в частности, принять за фундаментальные точки проективной системы координат точки A и B, а за единичную точку — точку C и положить $D=(\lambda:\mu)$, то будем иметь

$$(ABCD)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}}=\frac{\lambda}{\mu},$$

т. е.

$$(ABCD)=\frac{\lambda}{\mu}; \tag{5}$$

двойное отношение $(ABCD)$ *равно неоднородной проективной координате точки* D в системе проективных координат ABC.

Пусть A, B, C — раз навсегда зафиксированные точки прямой g, а D — произвольная (переменная) точка; она вполне определяется отношением своих координат $\lambda:\mu$, которое в свою очередь определяется из равенства (5) двойным отношением $(ABCD)$. Мы получили следующий очень важный результат.

Теорема 11. *Если на прямой даны три зафиксированные точки* A, B, C, *то всякая четвертая точка однозначно определяется своим двойным отношением к трем данным точкам.*

2. Гармонические четверки точек. *Если*

$$(ABCD)=-1,$$

то четверка точек A, B, C, D *называется гармонической.* В этом случае говорят также, что *две точки* C *и* D *являются гармонически сопряженными относительно точек* A *и* B или что *пары точек* A, B *и* C, D *гармонически разделяют друг друга.* Точку D также называют *четвертой гармонической к тройке точек* A, B, C.

Замечание. Из определения двойного отношения следует (и читатель легко убедится в этом), что при перестановке точек A, B, C, D двойное отношение может менять свой знак, а также может менять свою величину на обратную.

В частности,

$$(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = \frac{1}{(BACD)} = \frac{1}{(ABDC)}.$$

Поэтому, *если пары A, B и C, D гармонически сопряжены, то гармонически сопряжены и пары C, D и A, B; гармоническая сопряженность двух пар точек не нарушается также при перестановке точек в какой-нибудь паре.*

Наконец, мы видели, что если двойное отношение $(ABCD)$ отрицательно, то пары точек A, B и C, D разделяют друг друга; в частности, разделяют друг друга две гармонически сопряженные пары.

3. Двойное отношение и проективные отображения. Теорема 12. *Пусть $\mathcal{A}$ — проективное отображение плоскости P на плоскость P'; A, B, C, D — четыре точки плоскости P, лежащие на прямой g, а A', B', C', D' — их образы при проективном отображении $\mathcal{A}$, лежащие на прямой g' (в которую при отображении перешла прямая g). Тогда*

$$(A'B'C'D') = (ABCD),$$

т. е. двойное отношение четырех точек есть инвариант проективного отображения одной плоскости на другую.

Доказательство. Введем на прямой g систему проективных координат с фундаментальными точками X и T и единичной точкой E, и пусть в этой системе

$$A = (x_1 : t_1), \quad B = (x_2 : t_2), \quad C = (x_3 : t_3), \quad D = (x_4 : t_4).$$

При проективном отображении плоскости P на плоскость P' прямая g проективно отображается на прямую g'.

Это значит, что на прямой g' имеется система проективных координат с фундаментальными точками X' и T' и единичной точкой E', по отношению к которой точки A', B', C', D' имеют такие же координаты, какие точки A, B, C, D имеют в системе проективных координат, введенной на прямой g, т. е.

$$A' = (x_1 : t_1), \quad B' = (x_2 : t_2), \quad C' = (x_3 : t_3), \quad D' = (x_4 : t_4),$$

а отсюда следует, что

$$(A'B'C'D') = (ABCD).$$

Из этой теоремы и теоремы 11 вытекает

Теорема 13. *Всякое взаимно однозначное отображение* φ *прямой* g *на прямую* g', *сохраняющее двойное отношение любой четверки точек* [1]), *есть проективное отображение.*

В самом деле, пусть A, B, C — какие-нибудь три различные точки на прямой g, и пусть $A'=\varphi A$, $B'=\varphi B$, $C'=\varphi C$ — их образы при отображении φ. Тогда существует единственное проективное отображение $\mathcal{A}$, отображающее точки A, B, C соответственно на A', B', C'. При отображении $\mathcal{A}$ любая точка M прямой g переходит в точку M^*, для которой

$$(A'B'C'M^*)=(ABCM).$$

Но при отображении φ точка M переходит в точку M', для которой тоже

$$(A'B'C'M')=(ABCM).$$

Значит, в силу теоремы 11 для любой точки M прямой g точки $M^*=\mathcal{A}M$ и $M'=\varphi M$ совпадают, а это и значит, что отображение φ совпадает с проективным отображением $\mathcal{A}$.

4. Двойное отношение в пучке прямых. Пусть на плоскости $\bar{\pi}$ дан пучок O и в нем четыре луча a, b, c, d. Возьмем на плоскости $\bar{\pi}$ какие-нибудь две прямые g и g', не проходящие через точку O. Они пересекают прямые a, b, c, d соответственно в точках A, B, C, D и A', B', C', D' (рис. 243). При перспективном отображении прямой g на прямую g' с центром перспективы O точки A, B, C, D переходят соответственно в точки A', B', C', D'. Так как при перспективном отображении (являющемся, как мы знаем, частным случаем проективного отображения) одной прямой на другую двойное отношение любой четверки точек сохраняется, то $(ABCD)=(A'B'C'D')$, и мы получили такой результат:

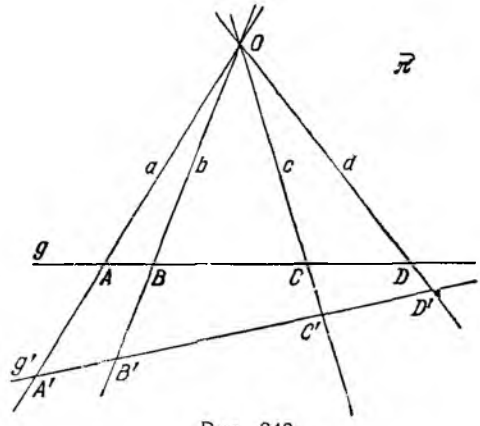


Рис. 243.

Теорема 14. *Пусть на плоскости* $\bar{\pi}$ *дан пучок прямых* O *и в нем четыре луча* a, b, c, d. *Тогда, какова бы ни была прямая* g, *лежащая в плоскости* $\bar{\pi}$ *и не проходящая через точку* O, *двойное*

[1]) В том смысле, что $(ABCD)=(A'B'C'D')$, если A, B, C, D — любые четыре точки на прямой g, а A', B', C', D' — образы этих точек при данном отображении.

отношение $(ABCD)$ *четырех точек* A, B, C, D, *в которых прямая* g *пересекает прямые* a, b, c, d, *одно и то же: оно не зависит от выбора прямой* g. *Это двойное отношение называется поэтому двойным отношением* $(abcd)$ *четырех лучей* a, b, c, d *пучка* O.

Если в пучке O дана проективная система координат, в которой $a=(1:0)$, $b=(0:1)$, $c=(1:1)$, $d=(\alpha:\beta)$, то

$$(abcd)=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Этот результат непосредственно следует из определения двойного отношения четырех лучей пучка и из формулы (5) (стр. 623).

Читателю предоставляется доказать следующую теорему: *отображение* φ *пучка* O *на пучок* O' *тогда и только тогда является проективным, когда оно сохраняет двойное отношение любых четырех лучей.*

Лучи a, b, c, d образуют гармоническую четверку, если $(abcd)=-1$. О них можно повторить сказанное выше по поводу гармонических четверок точек.

Возьмем прямую g так, чтобы она не была параллельной ни одному из четырех лучей a, b, c, d. Тогда все четыре точки A, B, C, D, в которых прямая g пересекает лучи a, b, c, d, — собственные, и двойное отношение $(ABCD)$, а значит и $(abcd)$, равно следующему выражению через площади ориентированных треугольников:

$$(abcd)=\frac{\text{пл}\triangle AOC}{\text{пл}\triangle COB}:\frac{\text{пл}\triangle AOD}{\text{пл}\triangle DOB}.$$

Но $\text{пл}\triangle AOC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\sin(a,c)$, где (a,c) есть угол от вектора $\overrightarrow{OA}$ до вектора $\overrightarrow{OC}$ и т. д., так что

$$(abcd)=\frac{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\sin(a,c)}{|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OB}|\sin(c,b)}\cdot\frac{|\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{OB}|\sin(d,b)}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OD}|\sin(a,d)},$$

т. е.

$$(abcd)=\frac{\sin(a,c)}{\sin(c,b)}:\frac{\sin(a,d)}{\sin(d,b)}.$$

5. Выражение двойного отношения четырех точек на прямой, заданных своими координатами относительно системы проективных координат на плоскости. Пусть в системе проективных координат $X_1X_2X_3E$ точки A, B, C, D, лежащие на прямой g (рис. 244), имеют следующие координаты:

$$A=(a_1:a_2:a_3),$$
$$B=(b_1:b_2:b_3),$$
$$C=(c_1:c_2:c_3),$$
$$D=(d_1:d_2:d_3).$$

Так как точки X_1, X_2, X_3 не лежат на одной прямой, то прямая g не проходит по крайней мере через одну из этих точек. Предположим,

например, что прямая g не проходит через точку $X_3=(0:0:1)$, и рассмотрим перспективное отображение прямой g на прямую X_1X_2 с центром перспективы X_3. Пусть A', B', C', D' — образы точек A, B, C, D при этом отображении. Так как при проективном, и в частности при перспективном, отображении двойное отношение четырех точек на прямой остается неизменным, то

$$(ABCD)=(A'B'C'D').$$

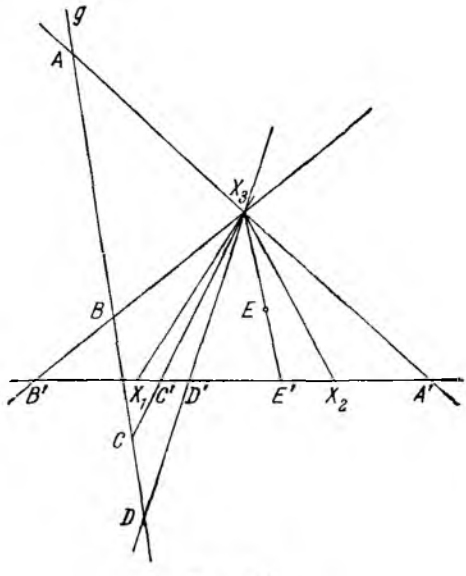


Рис. 244.

В системе проективных координат $X_1X_2X_3E$ точки A',B',C',D' имеют следующие координаты:

$$A'=(a_1:a_2:0),$$
$$B'=(b_1:b_2:0),$$
$$C'=(c_1:c_2:0),$$
$$D'=(d_1:d_2:0).$$

Пусть E' — точка пересечения прямой X_3E с прямой X_1X_2. Тогда

$$E'=(1:1:0).$$

Введем на прямой X_1X_2 систему проективных координат с фундаментальными точками X_1, X_2 и единичной точкой E'. В этой системе координат (см. доказательство теоремы 8 (§ 7)) точки A', B', C', D' имеют следующие координаты:

$$A'=(a_1:a_2),\quad B'=(b_1:b_2),\quad C'=(c_1:c_2),\quad D'=(d_1:d_2).$$

Поэтому

$$(A'B'C'D')=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ d_1 & d_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ d_1 & d_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}}.$$

Но

$$(A'B'C'D')=(ABCD),$$

и потому имеем окончательно

$$(ABCD)=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ d_1 & d_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ d_1 & d_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}}. \qquad (6)$$

Точно так же можно показать, что если прямая g не проходит через точку X_2, то

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}, \tag{6'}$$

и, наконец, если g не проходит через X_1, то

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}. \tag{6''}$$

6. Двойное отношение четырех точек на прямой, заданной параметрическими уравнениями. Пусть прямая g проходит через точки

$$A = (a_1 : a_2 : a_3), \qquad B = (b_1 : b_2 : b_3).$$

Так как точки A и B различны, то матрица

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 2. Предположим, например, что отличен от нуля детерминант

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Пусть теперь — в параметрическом представлении прямой g через координаты точек A и B — имеем:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \alpha a_1 + \beta b_1, \\ c_2 &= \alpha a_2 + \beta b_2, \\ c_3 &= \alpha a_3 + \beta b_3, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \lambda a_1 + \mu b_1, \\ d_2 &= \lambda a_2 + \mu b_2, \\ d_3 &= \lambda a_3 + \mu b_3, \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

где $C = (c_1 : c_2 : c_3)$ и $D = (d_1 : d_2 : d_3)$ — точки прямой g. Тогда

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 & \alpha a_2 + \beta b_2 \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 & \alpha a_2 + \beta b_2 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix},$$

и аналогично

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix},$$

так что формулу (6) можно переписать в виде

$$(ABCD) = \frac{\lambda}{\mu} : \frac{\alpha}{\beta}. \tag{8}$$

Замечание. Так как точки $C = (c_1 : c_2)$ и $D = (d_1 : d_2)$ отличны и от A, и от B, то все коэффициенты в (7), (7′) отличны от нуля, так что мы можем положить, например, $\mu = 1$, $\beta = 1$ и в этом предположении переписать (8) в виде

$$(ABCD) = \frac{\lambda}{\alpha}. \tag{8′}$$

Если четверка точек A, B, C, D гармоническая, то формула (8) дает

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{\alpha}{\beta} \tag{9}$$

или (при нормировке $\beta = 1$, $\mu = 1$)

$$\lambda = -\alpha, \quad \lambda + \alpha = 0. \tag{10}$$

ГЛАВА XXII

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 1. Определение. Теорема единственности

Алгебраической кривой порядка n на проективной плоскости (действительной или комплексной) называется множество всех точек этой плоскости, координаты которых в некоторой проективной системе координат удовлетворяют уравнению вида

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{1}$$

где $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ есть однородный многочлен (форма) степени n от переменных x_1, x_2, x_3, коэффициенты которого мы будем всегда предполагать действительными.

При переходе от одной проективной координатной системы к другой координаты испытывают однородное линейное преобразование, переводящее форму $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ в форму $\Phi'(x_1', x_2', x_3')$ той же степени n от новых координат, поэтому данное выше определение порядка кривой не зависит от выбора той или иной системы проективных координат. Если не оговорено противное, мы будем считать, что на плоскости выбрана привилегированная система координат и что $x_1 : x_2 : x_3$ являются координатами по отношению к этой системе.

Проще всего представить себе при этом данную проективную плоскость как арифметическую проективную плоскость или, что сводится к тому же, но нагляднее, как проективную плоскость $\bar{\pi}$, происшедшую от пополнения несобственными точками обычной плоскости π с аффинной системой координат oe_1e_2 на ней, а систему проективных координат на проективной плоскости $\bar{\pi}$ — как однородную систему, соответствующую аффинной системе oe_1e_2. Тогда несобственные точки $(x_1 : x_2 : x_3)$ характеризуются условием

$$x_3 = 0,$$

которое и является уравнением несобственной прямой. При перспективном отображении плоскости $\bar{\pi}$ на связку O координаты $x_1 : x_2 : x_3$ какой-нибудь точки M плоскости $\bar{\pi}$ переходят в координаты луча

$m = \overline{OM}$ связки, а уравнение (1) превращается в уравнение конической поверхности с вершиной в центре связки O, сечением которой плоскостью $\bar{\pi}$ и является кривая, определенная в этой плоскости тем же уравнением (1). Мы будем рассматривать лишь кривые второго порядка, так что левая часть уравнения (1), задающего данную кривую, будет всегда квадратичной формой и уравнение кривой будет иметь вид

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0. \quad (2)$$

В силу только что сказанного кривые второго порядка суть плоские сечения конуса второго порядка.

Кривая второго порядка называется *невырождающейся*, если левая часть ее уравнения есть квадратичная форма ранга $R = 3$.

Посмотрим, чем отличаются кривые второго порядка, определенные на проективной плоскости $\bar{\pi}$, от давно известных нам кривых на аффинной плоскости π.

Возьмем аффинную систему координат oe_1e_2, соответствующую данной однородной системе $X_1X_2X_3$. Тогда множество X собственных точек проективной плоскости $\bar{\pi}$, удовлетворяющих уравнению (2), совпадет с множеством точек аффинной плоскости π, координаты которых

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{x_3}$$

(относительно системы oe_1e_2) удовлетворяют уравнению

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (3)$$

Множество X пусто в том и только том случае, когда уравнение (3) противоречиво, т. е. когда $a_{33} \neq 0$, а все остальные коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23} равны нулю. В этом случае уравнение (2) превращается в

$$a_{33}x_3^2 = 0, \quad (2_\infty)$$

т. е. в $x_3^2 = 0$, и является уравнением дважды взятой несобственной прямой.

Итак:

Теорема 1а. *Если все точки кривой* (2) *несобственные, то кривая* (2) *есть дважды взятая несобственная прямая; тогда ее уравнение непременно имеет вид* (2_∞).

Предположим теперь, что кривая (2) содержит все несобственные точки плоскости и хотя бы одну собственную. В силу только что доказанного, в этом случае хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23} отличен от нуля.

По нашему предположению, всякая несобственная точка $(x_1:x_2:0)$ удовлетворяет уравнению (2), т. е. равенство

$$\Phi(x_1, x_2, 0) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

есть тождество, верное для любых значений x_1, x_2. Это значит, что

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0,$$

и уравнение (2) имеет вид

$$2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

т. е.

$$x_3(2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}x_3) = 0, \qquad (2'_\infty)$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов a_{13}, a_{23} отличен от нуля.

Кривая (2) в этом случае распадается на пару различных прямых: несобственную прямую $x_3 = 0$ и собственную прямую

$$2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0.$$

Итак:

Теорема 1б. *Если кривая* (2) *содержит все несобственные точки плоскости и хотя бы одну собственную, то она распадается на пару различных прямых, из которых одна есть несобственная прямая. Уравнение* (2) *в этом случае непременно имеет вид* $(2'_\infty)$.

Очевидно и обратное утверждение: если уравнение (2) имеет вид $(2'_\infty)$, то кривая (2) распадается на пару прямых: на несобственную прямую

$$x_3 = 0$$

и на прямую

$$2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0;$$

это вторая прямая оказывается несобственной тогда и только тогда, когда $a_{13} = a_{23} = 0$ (и тогда непременно $a_{33} \neq 0$).

Предположим теперь, что не все несобственные точки плоскости лежат на кривой (2) (т. е. что несобственная прямая не содержится в кривой (2)). Тогда среди коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} по крайней мере один отличен от нуля и уравнение (2) определяет на аффинной плоскости π с координатной системой Oe_1e_2 некоторую кривую второго порядка.

Для определения несобственных точек кривой (2) подставляем в уравнение (2)

$$x_3 = 0.$$

Получаем

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0. \qquad (4$$

Это уравнение определяет два значения (действительные различные, мнимые сопряженные или совпадающие действительные) для отношения $x_1 : x_2$. Итак:

Теорема 1в. *Кривая второго порядка* (2), *не содержащая несобственную прямую, имеет лишь две несобственные точки: действительные* (*быть может, совпадающие*) *или мнимые сопряженные.*

Так как вектор $\{x_1, x_2\}$, удовлетворяющий уравнению (4), есть вектор асимптотического направления кривой (3)[1]), то несобственные точки кривой второго порядка, не содержащей несобственную прямую, суть точки, удаленные в бесконечность в одном из двух направлений, асимптотических для данной кривой.

Из доказанного легко следует

Теорема 2 (теорема единственности)[2]). *Если два уравнения*

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) \equiv$$
$$\equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0 \quad (2)$$

и

$$\Phi'(x_1, x_2, x_3) \equiv$$
$$\equiv a'_{11}x_1^2 + 2a'_{12}x_1x_2 + a'_{22}x_2^2 + 2a'_{13}x_1x_3 + 2a'_{23}x_2x_3 + a'_{33}x^2 = 0, \quad (2')$$

рассматриваемые относительно одной и той же системы проективных координат, определяют одну и ту же кривую второго порядка, то одно из двух уравнений (2), (2′) *получается из другого почленным умножением на некоторый числовой множитель* λ.

Доказательство. Без ограничения общности можем предположить, что выбранная проективная координатная система есть одиородная система, соответствующая некоторой аффинной координатной системе[3]) oe_1e_2. Рассматриваем три случая.

1° Кривая γ состоит из одних несобственных точек. Тогда в силу теоремы 1а оба уравнения (2) и (2′) имеют вид

$$a_{33}x_3^2 = 0$$

и

$$a'_{33}x_3^2 = 0,$$

и утверждение теоремы 2 доказано.

2° Кривая γ есть пара прямых, одна из которых есть несобственная прямая $x_3 = 0$, а другая — собственная прямая d. Тогда по

---

[1]) Состоящей из собственных точек кривой (2).

[2]) Второе доказательство теоремы единственности будет дано в начале § 3, читатель может его прочитать уже сейчас.

[3]) В самом деле, рассматривая данную проективную координатную систему как класс эквивалентных между собою аффинных систем в связке O, берем одну из этих систем $Oe_1e_2e_3$ и определяем плоскость π как плоскость $x_3 = 1$, а точку o в ней — как точку с координатами 0, 0, 1 (в системе $Oe_1e_2e_3$). Система oe_1e_2 есть искомая.

теореме 1б уравнения (2) и (2′) имеют соответственно вид

$$x_3(2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}x_3) = 0$$

и

$$x_3(2a'_{13}x_1 + 2a'_{23}x_2 + a'_{33}x_3) = 0,$$

а прямая d определяется каждым из уравнений

$$2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

и

$$2a'_{13}x_1 + 2a'_{23}x_2 + a'_{33}x_3 = 0,$$

из чего следует, что при некотором $\lambda \neq 0$

$$a'_{13} = \lambda a_{13}, \quad a'_{23} = \lambda a_{23}, \quad a'_{33} = \lambda a_{33}.$$

Так как, кроме того,

$$a_{11} = a'_{11} = 0, \quad a_{12} = a'_{12} = 0, \quad a_{22} = a'_{22} = 0,$$

то утверждение теоремы единственности доказано и в случае 2°.

3° Кривая γ не содержит несобственной прямой. В этом случае кривая γ, определяемая уравнениями (2) и (2′) имеет две (быть может, слившиеся) несобственные точки и только ими отличается от кривой второго порядка, определяемой на плоскости oe_1e_2 уравнениями

$$\Phi(x, y, 1) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (3)$$

$$\Phi'(x, y, 1) \equiv a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0. \quad (3')$$

Так как кривые (3) и (3′), по предположению, состоят из одних и тех же точек, то в силу теоремы единственности главы XVII, § 2, коэффициенты уравнения (2′), т. е. коэффициенты формы $\Phi'(x_1, x_2, x_3)$, получаются из соответствующих коэффициентов уравнения (2), т. е. из коэффициентов формы $\Phi(x_1, x_2, x_3)$, умножением их на некоторый числовой множитель $\lambda \neq 0$. Теорема 2 доказана.

§ 2. Пересечение кривой второго порядка с прямой. Касательные; асимптоты

Пусть дана кривая второго порядка γ своим уравнением

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0 \quad (1)$$

и прямая, заданная двумя своими точками $P = (p_1 : p_2 : p_3)$ и $Q = (q_1, q_2, q_3)$ и имеющая, следовательно, параметрическое уравнение

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= p_1\lambda + q_1\mu, \\ x_2 &= p_2\lambda + q_2\mu, \\ x_3 &= p_3\lambda + q_3\mu \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

(параметры λ, μ принимают всевозможные числовые значения, за исключением случая, когда $\lambda = 0$, $\mu = 0$ одновременно).

Найдем точки пересечения кривой (1) и прямой (2). Для этого подставим значения x_1, x_2, x_3 из (2) в уравнение (1). Получим после приведения подобных членов уравнение

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 = 0. \tag{3}$$

Обозначая через $\Psi(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$ билинейную форму, полярную к квадратичной форме $\Phi(x_1, x_2, x_3)$, имеем, как нетрудно вычислить,

$$A = \Phi(p_1, p_2, p_3), \quad B \equiv \Psi(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3), \quad C = \Phi(q_1, q_2, q_3). \tag{4}$$

Если в уравнении (3) все три коэффициента обращаются в нуль, то это уравнение обращается в тождество, означающее, что при любых значениях λ и μ точка с координатами (2) лежит на кривой (1), т. е. вся прямая (2) входит в состав кривой (1) (которая в этом случае является распадающейся).

За исключением этого случая, из однородного уравнения (3) всегда определяются два — действительные, мнимые или совпадающие — значения для отношения $\lambda : \mu$, которые обозначим через $\lambda_1 : \mu_1$ и $\lambda_2 : \mu_2$. Внося эти значения в равенства (2), получим две точки пересечения кривой (1) с прямой (2).

Посмотрим, при каких условиях эти две точки пересечения сливаются в одну точку, т. е. прямая (2) касается кривой (1). Без ограничения общности можем взять в качестве точки $P = (p_1 : p_2 : p_3)$ именно точку касания прямой (2) и кривой (1). Тогда двойная точка пересечения кривой (1) и прямой (2) должна получиться при значениях $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$; так как точка $P = (p_1 : p_2 : p_3)$ взята на кривой (1), то в уравнении (3) надо положить

$$A = \Phi(p_1, p_2, p_3) = 0;$$

уравнение (3) примет вид

$$2B\lambda\mu + C\mu^2 = 0$$

или

$$\mu(2B\lambda + C\mu) = 0. \tag{5}$$

Это уравнение должно иметь корень $\mu = 0$ своим двойным корнем. А это означает, что и уравнение

$$2B\lambda + C\mu = 0$$

должно иметь корень $\mu = 0$, т. е. что $2B\lambda = 0$. Но так как (при $\mu = 0$) заведомо $\lambda \neq 0$, то условие, чтобы прямая (2) касалась кривой (1) в точке P, есть

$$B = \Psi(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3) = 0$$

или

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3)\,q_1 + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3)\,q_2 + \\ + (a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3)\,q_3 = 0 \qquad (6_q)$$

для любой точки $Q = (q_1 : q_2 : q_3)$ прямой (2). Поэтому уравнение (6_q), в котором теперь естественно однородные координаты произвольной точки Q обозначать через x_1, x_2, x_3 (вместо q_1, q_2, q_3), есть уравнение касательной к кривой (1) в точке $P = (p_1 : p_2 : p_3)$. Это уравнение мы переписываем в виде

$$\Psi(p_1,\ p_2,\ p_3;\quad x_1,\ x_2,\ x_3) = 0 \qquad (6)$$

или, подробнее, в виде

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3)\,x_1 + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3)\,x_2 + \\ + (a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3)\,x_3 = 0. \qquad (7)$$

Итак, касательная к кривой (1) в ее точке $P = (p_1 : p_2 : p_3)$ есть прямая (7), т. е. прямая с координатами

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3, \\ \xi_2 &= a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3, \\ \xi_3 &= a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Не может ли случиться, что всякая прямая, проходящая через точку $P = (p_1 : p_2 : p_3)$ кривой (1), пересекает эту кривую в двух совпадающих точках (или целиком содержится в нашей кривой)? Очевидно, это происходит тогда и только тогда, когда уравнение (6_q) удовлетворяется для любой точки $Q = (q_1 : q_2 : q_3)$, что в свою очередь означает, что все коэффициенты этого уравнения равны нулю, т. е. что

$$\left.\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 &= 0, \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 &= 0, \\ a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6^*)$$

Точка $P = (p_1 : p_2 : p_3)$, удовлетворяющая системе равенств (6*), называется *особой* или *двойной точкой* кривой (1) Если кривая (1) нераспадающаяся, то детерминант системы уравнений (6*) отличен от нуля, система не имеет ни одного ненулевого решения: нераспадающаяся кривая не имеет особых точек. Если кривая (1) распадается на пару различных прямых d_1, d_2, то из геометрических соображений ясно, что она имеет единственную особую точку, а именно точку пересечения P прямых d_1, d_2.

Из доказанного следует, что эта точка P непременно удовлетворяет системе уравнений (6*). Наконец, у кривой, являющейся парой совпадающих прямых, все точки особые. Формально алгебраическое доказательство этих утверждений предоставляется читателю.

Посмотрим, какая прямая является касательной к кривой (1) в ее несобственной точке

$$P=(\alpha:\beta:0). \tag{9}$$

Так как P—несобственная точка кривой (1), то $\{\alpha, \beta\}$ есть вектор асимптотического направления. Подставляя $p_1=\alpha$, $p_2=\beta$, $p_3=0$ в уравнение (7), получаем уравнение искомой касательной:

$$(a_{11}\alpha+a_{12}\beta)x_1+(a_{21}\alpha+a_{22}\beta)x_2+(a_{31}\alpha+a_{32}\beta)x_3=0. \tag{10}$$

Но мы видели в главе XVII (§ 5, стр. 444, формула (4)), что уравнение асимптоты есть

$$(a_{11}\alpha+a_{12}\beta)x+(a_{21}\alpha+a_{22}\beta)y+(a_{31}\alpha+a_{32}\beta)=0 \tag{10'}$$

при условии, что $\{\alpha, \beta\}$ есть вектор асимптотического направления. Переходя в уравнении (10′) от обыкновенных координат к однородным, получаем как раз уравнение (10)—касательной в несобственной точке кривой (1). Итак, *асимптоты кривой второго порядка суть касательные к этой кривой в ее несобственных точках.*

Мы видели, что кривая второго порядка (не содержащая несобственную прямую) имеет две (быть может, совпадающие) несобственные точки, удаленные в бесконечность в асимптотических для данной кривой направлениях. Поэтому кривые эллиптического типа (эллипс и пара мнимых прямых) пересекают несобственную прямую в двух мнимых сопряженных точках; кривые гиперболического типа (гипербола и пара действительных пересекающихся прямых) пересекают несобственную прямую в двух различных действительных точках.

Наконец, парабола (и пара параллельных прямых) имеет с несобственной прямой пару слившихся точек пересечения: *парабола касается несобственной прямой.* В соответствии со сказанным выше естественно считать несобственную прямую асимптотой параболы. Восстанавливается полная гармония:

эллипс имеет две мнимые сопряженные асимптоты,

гипербола—две действительные,

парабола имеет две слившиеся с несобственной прямой асимптоты.

Найдем несобственные точки окружности.

Систему координат oe_1e_2 на плоскости π предполагаем прямоугольной. Тогда уравнение (1) изображает окружность, если

$$a_{11}=a_{22}\neq 0, \quad a_{12}=0.$$

Поэтому несобственные точки окружности суть точки, координаты которых $x_1 : x_2$ удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2=0$$

или, сокращая на $a_{11}=a_{22}$,

$$x_1^2+x_2^2=0,$$

т. е.

$$(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = 0,$$

или

$$x_2 : x_1 = \pm i.$$

Итак, все окружности имеют одни и те же несобственные точки

$$(1 : i : 0) \tag{11}$$

и

$$(1 : -i : 0). \tag{11'}$$

Эти точки называются *круговыми* (или *циклическими*) точками (арифметической комплексной) проективной плоскости $\bar{\pi}$, снабженной однородной системой координат, соответствующей прямоугольной системе координат на плоскости π. Круговые точки удалены в бесконечность *в изотропных направлениях* [1]).

Докажем, что всякая кривая второго порядка, проходящая через две круговые точки, есть окружность (с действительным, мнимым или нулевым радиусом [2])).

В самом деле, подставляя в уравнение (1) координаты

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \pm i, \quad x_3 = 0$$

круговых точек, получим

$$a_{11} \pm 2a_{12}i - a_{22} = 0.$$

Так как a_{11}, a_{12}, a_{22} — действительные числа, то из этого равенства следует $a_{11} - a_{22} = 0$, $a_{12} = 0$, откуда в свою очередь вытекает (см. гл. XVI, § 3), что кривая (1) есть окружность.

Итак:

Теорема 3. *Среди всех кривых второго порядка окружности характеризуются тем, что они проходят через две круговые точки.*

Выведем отсюда следующее очень важное предложение.

Теорема 4. *Среди всех проективных преобразований плоскости* $P = \bar{\pi}$ *преобразования подобия* [3]) *характеризуются тем, что они не только отображают на себя несобственную прямую, но отображают*

---

[1]) При переходе от одной прямоугольной системы координат на плоскости π к другой координатная запись круговых точек не меняется. Читателю предлагается проверить это.

[2]) Напомним, что окружность нулевого радиуса $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$ есть пара изотропных прямых $(x-a) \pm i(y-b) = 0$, проходящих через центр (a, b) окружности.

[3]) Следовало бы сказать: «проективные преобразования, являющиеся преобразованиями подобия, если их рассматривать на обыкновенной плоскости π (состоящей из собственных точек проективной плоскости $\bar{\pi}$)» — см. § 6, п. 4 главы XXI. Упомянув об этом один раз, мы освобождаем себя от дальнейшего повторения аналогичных замечаний.

ее так, что каждая из двух круговых точек отображается на ту же самую или на другую круговую точку.

Доказательство. Если данное проективное преобразование $\mathscr{C}$ есть преобразование подобия, то, будучи аффинным преобразованием, оно отображает несобственную прямую на себя. Так как при преобразовании $\mathscr{C}$ каждая окружность K переходит в некоторую окружность K', то пересечение окружности K с несобственной прямой, состоящее из пары круговых точек, переходит в пересечение окружности K' с несобственной прямой, т. е. снова в пару круговых точек. Итак, при преобразованиях подобия несобственная прямая отображается на себя и каждая круговая точка или остается неподвижной, или переходит в другую круговую точку.

Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение. Если данное проективное преобразование переводит несобственную прямую в несобственную, то оно является аффинным; если оно, кроме того, переводит круговые точки в круговые, то оно переводит всякую кривую второго порядка, проходящую через круговые точки, в кривую второго порядка, также проходящую через круговые точки, т. е. переводит всякую окружность в окружность. А тогда, как было доказано в главе XVII, § 12, теорема 14, преобразование является преобразованием подобия.

Из доказанного вытекает

Следствие. *Если при данном аффинном преобразовании $\mathscr{C}$ плоскости π хотя бы одна окружность K переходит в окружность K', то преобразование $\mathscr{C}$ есть преобразование подобия.*

В самом деле, дополним аффинное преобразование $\mathscr{C}$ до проективного преобразования $\bar{\mathscr{C}}$ проективной плоскости $\bar{\pi}$. При преобразовании $\bar{\mathscr{C}}$ несобственная прямая d_∞ отображается на себя. Пара круговых точек (как пересечение прямой d_∞ с окружностью K) отображается на пересечение прямой d_∞ с окружностью K', т. е. на пару круговых точек. Значит, по теореме 4 преобразование $\mathscr{C}$ есть преобразование подобия.

Определение. Множество, состоящее из двух элементов: несобственной прямой и пары круговых точек на ней, — называется *абсолютом евклидовой геометрии*.

Название это основано на том, что евклидова геометрия по преимуществу является геометрией подобия: все теоремы, касающиеся «формы» тех или иных фигур (а не их размеров), суть теоремы, выражающие те или иные свойства фигур, сохраняющиеся при преобразовании подобия. Мы доказали, что абсолют как бы «управляет» всеми этими свойствами, потому что преобразования подобия — это как раз проективные преобразования, сохраняющие абсолют.

Читатель сейчас достаточно подготовлен, чтобы познакомиться и с простейшими понятиями, касающимися так называемой неевклидовой

геометрии; он может почерпнуть сведения о них, например, из моей небольшой книжки «Что такое неевклидова геометрия» (Москва, 1950, Издательство Академии педагогических наук).

§ 3. Пучок кривых второго порядка. Второе доказательство теоремы единственности. Теорема Паскаля. Теорема Штейнера

Вместо того, чтобы сводить доказательство теоремы единственности для кривых второго порядка на проективной плоскости к доказательству аналогичной теоремы для аффинной плоскости, можно было бы дать прямое доказательство, почти дословно переписывая § 2 главы XVII, с единственным изменением, заключающимся в том, что аффинные координаты x, y заменяются однородными координатами $x_1 : x_2 : x_3$, а общий многочлен $F(x, y)$ второй степени от двух переменных заменяется квадратичной формой $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ от трех переменных. В частности, дословно с точностью до указанных изменений сохраняется доказательство теоремы 4 главы XVII, которая теперь приобретает такой вид:

Теорема 5. *Пусть на проективной плоскости даны пять точек:*

$$M_1 = (p_1 : q_1 : r_1), \quad M_2 = (p_2 : q_2 : r_2), \quad M_3 = (p_3 : q_3 : r_3),$$
$$M_4 = (p_4 : q_4 : r_4), \quad M_5 = (p_5 : q_5 : r_5),$$

никакие четыре из которых не лежат на одной прямой. Тогда однозначно, с точностью до общего числового множителя, определены коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} *в уравнении*

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

кривой второго порядка, проходящей через эти пять точек, откуда следует, что эта кривая существует и единственна. При этом, если данные пять точек действительны, то действительна и проходящая через них кривая.

Без всяких изменений, кроме указанных выше, переносятся на случай проективной плоскости и рассуждения § 2 главы XVII о пучке кривых второго порядка.

Одно замечание! Если среди данных пяти точек одна или две несобственные, то задать их — все равно что задать одно или два асимптотических направления кривой. Итак, нераспадающаяся кривая второго порядка однозначно определена, если известны четыре собственные ее точки и одно асимптотическое направление или три собственные точки и два асимптотических направления.

Из теоремы 5 вытекает и следующее предложение, известное из начального курса геометрии, — теорема об окружности, описанной вокруг данного треугольника:

Через всякие три собственные точки плоскости, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна окружность.

В самом деле, если к данным трем точкам присоединить еще две круговые точки, то получатся пять точек, через которые проходит единственная кривая второго порядка; а так как кривая эта проходит через круговые точки, то она непременно есть окружность.

Раз пять точек однозначно определяют проходящую через них кривую второго порядка, то ясно, что такую кривую нельзя провести через любые шесть точек. И в самом деле, мы сейчас докажем теорему, выражающую необходимое условие для того, чтобы данные шесть точек лежали на некоторой кривой второго порядка [1]).

Теорема эта есть знаменитая *теорема Паскаля* [2]):

Теорема 6. *Пусть на невырождающейся* [3]) *кривой второго порядка даны шесть точек:* M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 (рис. 245). *Эти шесть точек и порядок, в котором они записаны, определяют шесть прямых:*

$$d_1 = M_1M_2, \quad d_2 = M_2M_3, \quad d_3 = M_3M_4,$$
$$g_1 = M_4M_5, \quad g_2 = M_5M_6, \quad g_3 = M_6M_1.$$

Тогда три точки

$$P_1 = (d_1 \cdot g_1), \quad P_2 = (d_2 \cdot g_2), \quad P_3 = (d_3 \cdot g_3)$$

пересечения прямых [4])

$$d_1 \text{ и } g_1, \quad d_2 \text{ и } g_2, \quad d_3 \text{ и } g_3$$

лежат на одной прямой.

Замечание 1. Совокупность шести точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, записанных в определенном порядке, и шести прямых

$$M_1M_2, \ M_2M_3, \ M_3M_4, \ M_4M_5, \ M_5M_6, \ M_6M_1$$

называется в проективной геометрии *шестиугольником* $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$. Точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 называются *вершинами*, а прямые M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_5, M_5M_6, M_6M_1 — *сторонами шестиугольника*

---

[1]) Это условие не только необходимо, но и достаточно, чего мы, однако, доказывать не будем; читатель может найти это доказательство в многократно цитированной книге Б. Н. Делоне и Д. А. Райкова, т. 2, стр. 368.

[2]) Паскаль (Blaise Pascal, 1623—1662) — один из замечательных людей своего времени — выдающийся математик и физик, а также философ. В историю математики он вошел не только как замечательный геометр, но и как один из зачинателей целой новой области науки — теории вероятностей. Теорему, известную под его именем, он доказал в возрасте 16 лет.

[3]) Теорема Паскаля имеет место и для вырождающихся кривых второго порядка (см. теорему 6′ ниже).

[4]) Мы помним, что точка пересечения двух прямых d и g обозначается через $(d \cdot g)$.

$M_1M_2M_3M_4M_5M_6$; при этом стороны

$$d_1 = M_1M_2 \quad \text{и} \quad g_1 = M_4M_5,$$
$$d_2 = M_2M_3 \quad \text{и} \quad g_2 = M_5M_6,$$
$$d_3 = M_3M_4 \quad \text{и} \quad g_3 = M_6M_1$$

называются *противоположными*.

Если все шесть вершин M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 шестиугольника лежат на данной кривой, то шестиугольник называется

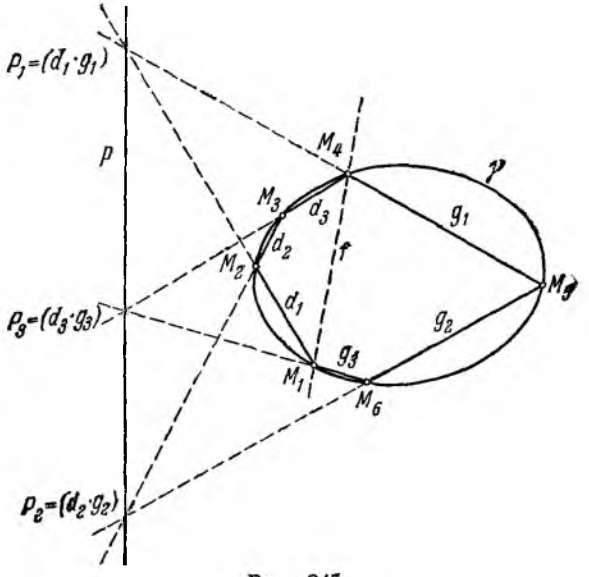


Рис. 245.

вписанным в эту кривую. Имея в виду это словоупотребление, можно теорему Паскаля сформулировать так:

Точки пересечения противоположных сторон всякого шестиугольника, вписанного в какую-нибудь кривую второго порядка γ, лежат на одной прямой. Эта прямая называется паскалевой прямой данного шестиугольника [1]).

Замечание 2. Существенно заметить, что, переставив в каком-нибудь новом порядке данные шесть вершин, мы получим, вообще говоря, новый шестиугольник; например, шестиугольники $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ и $M_2M_1M_3M_4M_5M_6$ различны: сторонами первого

[1]) Например, три точки пересечения противоположных сторон правильного шестиугольника, вписанного в окружность, лежат на одной прямой (на несобственной прямой).

являются прямые M_1M_2, M_2M_3 и т. д., а сторонами второго — прямые $M_2M_1 = M_1M_2$, M_1M_3 и т. д. Таким образом, во втором шестиугольнике имеется сторона M_1M_3, которой нет в первом, и зато нет стороны M_2M_3.

Два шестиугольника *тождественны*, если у них одни и те же вершины и одни и те же стороны. Поэтому циклическая перестановка вершин является допустимой; шестиугольники $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ и $M_2M_3M_4M_5M_6M_1$ тождественны между собой.

Кроме того, если в данном шестиугольнике $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ изменить порядок всех вершин на противоположный: $M_6M_5M_4M_3M_2M_1$, то получится шестиугольник, тождественный с данным [1]).

Доказательство теоремы Паскаля. Как мы уже делали неоднократно, будем и теперь обозначать одной и той же буквой какую-нибудь прямую d, левую часть ее уравнения и тройку ее координат, помня все время, что d и kd при любом $k \neq 0$ есть одна и та же прямая. Обозначим через f прямую, проходящую через точки $M_4 = (d_3 \cdot g_1)$ и $M_1 = (d_1 \cdot g_3)$. Кривая второго порядка, распадающаяся на пару прямых d_1 и d_3, имеет уравнение

$$d_1 d_3 = 0 \tag{1}$$

и принадлежит пучку кривых второго порядка, проходящих через точки M_1, M_2, M_3, M_4 (так как точки M_1 и M_2 лежат на прямой d_1, а точки M_3 и M_4 — на d_3). Тому же пучку кривых второго порядка принадлежит и пара прямых $d_2 = M_2M_3$, $f = M_4M_1$, т. е. кривая второго порядка, имеющая уравнение

$$d_2 f = 0. \tag{2}$$

Исходная кривая γ также принадлежит этому пучку, поэтому ее уравнение может быть записано в виде

$$\lambda_1 d_1 d_3 + \lambda_2 d_2 f = 0. \tag{3}$$

Кривая γ, по предположению, нераспадающаяся; поэтому оба коэффициента λ_1 и λ_2 отличны от нуля, так что, разделив обе части уравнения на один из них, можем переписать уравнение (3) в виде

$$d_1 d_3 + \lambda d_2 f = 0. \tag{4}$$

Но кривая γ принадлежит и пучку кривых, проходящих через точки M_4, M_5, M_6, M_1. Этому же пучку принадлежат и распадающиеся

---

[1]) Группа всех перестановок из шести точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 состоит из $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ элементов; допустимых перестановок при этом имеется 12, значит, число различных шестиугольников с данными вершинами есть $720 : 12 = 60$. Поэтому каждые шесть точек кривой второго порядка определяют шестьдесят паскалевых прямых, на каждой из которых лежат по три паскалевых точки.

кривые

$$g_1g_3=0 \quad \text{и} \quad g_2f=0.$$

Значит, кривая γ является линейной комбинацией и двух последних распадающихся кривых; уравнение кривой γ может быть записано в виде

$$g_1g_3+\mu g_2f=0. \tag{5}$$

Так как уравнения (4) и (5) выражают одну и ту же линию второго порядка, то по теореме единственности одно из этих уравнений получается из другого умножением на некоторый числовой множитель k:

$$g_1g_3+\mu g_2f=k\,(d_1d_3+\lambda d_2f). \tag{6}$$

Заменив многочлены d_1, d_2 через $\frac{1}{k}\,d_1$, $\frac{1}{k}\,d_2$ и обозначив их после этой замены снова через d_1, d_2, можем считать множитель k в правой части тождества (6) равным 1 и переписать это тождество в виде

$$g_1g_3+\mu g_2f=d_1d_3+\lambda d_2f \tag{7}$$

или в виде

$$g_1g_3-d_1d_3=f\,(\lambda d_2-\mu g_2). \tag{8}$$

Прямая p, заданная уравнением

$$\lambda d_2-\mu g_2=0,$$

принадлежит пучку прямых, задаваемому двумя прямыми d_2 и g_2, и проходит, следовательно, через точку пересечения $P_2=(d_2\cdot g_2)$ этих двух прямых.

Ввиду тождества (8) уравнение

$$g_1g_3-d_1d_3=0$$

есть уравнение той же пары прямых, что и уравнение

$$f\,(\lambda d_2-\mu g_2)=0. \tag{9}$$

На этой паре прямых лежат точки $(d_1\cdot g_1)=P_1$, $(d_3\cdot g_3)=P_3$, $M_4=(d_3\cdot g_1)$, $M_1=(d_1\cdot g_3)$. Итак, эти четыре точки лежат на паре прямых, которая может быть задана уравнением (9).

Точки $M_1=(d_1\cdot g_3)$ и $(d_3\cdot g_1)=M_4$ лежат на прямой f, но ни одна из точек $P_1=(d_1\cdot g_1)$ и $P_3=(d_3\cdot g_3)$ на этой прямой не лежит.

В самом деле, если бы точка пересечения P_1 прямых $d_1=M_1M_2$ и $g_1=M_4M_5$ лежала на $f=M_1M_4$, то прямая f имела бы с прямой d_1 общие точки M_1 и P_1, а с прямой g_1 — общие точки M_4 и P_1. Точка P_1 отлична по крайней мере от одной из двух точек M_1, M_4; пусть, например, $P_1\neq M_1$. Тогда прямые d_1 и $f=M_1M_4$, имея две общие точки M_1 и P_1, совпадали бы между собою, и точки M_1, M_2, M_4

лежали бы на одной прямой — вопреки предположению. По аналогичной причине точка $P_3=(d_3\cdot g_3)$ не лежит на прямой f. Итак, ни одна из точек P_1 и P_3 не лежит на прямой f; в то же время каждая из этих точек лежит на кривой, распадающейся на пару прямых f и p; значит, обе точки P_1 и P_3 лежат на прямой p, которой по самому ее определению инцидентна и точка $P_2=(d_2\cdot g_2)$. Следовательно, все три точки $P_1=(d_1\cdot g_1)$, $P_2=(d_2\cdot g_2)$, $P_3=(d_3\cdot g_3)$ лежат на прямой p, и теорема Паскаля доказана.

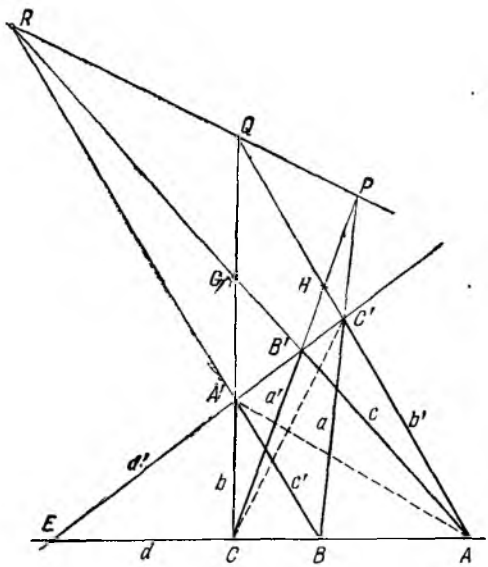


Рис. 246.

Если кривая γ распадающаяся, то от вписанного в нее шестиугольника естественно требовать, чтобы никакая его сторона не совпадала ни с одной из двух прямых, на которые распадается кривая γ. В соответствии с этим требованием теорема Паскаля для распадающейся кривой получает следующую формулировку:

Теорема 6′. *Пусть даны две прямые d и d' и на них шесть точек*:

A, B, C; A', B', C',

из которых точки A, B, C лежат на прямой d, а A', B', C' — на прямой d' (рис. 246). *Кроме того, предполагается, что ни одна из этих точек не совпадает с точкой пересечения $E=(d\cdot d')$ прямых d и d'.*

Обозначим прямые BC' и $B'C$, CA' и $C'A$, AB' и $A'B$ соответственно через $a=BC'$, $a'=B'C$; $b=CA'$, $b'=C'A$; $c=AB'$, $c'=A'B$. Тогда точки $P=(a\cdot a')$, $Q=(b\cdot b')$, $R=(c\cdot c')$ лежат на одной прямой — «паскалевой» прямой шестиугольника.

Дадим краткое доказательство этой теоремы [1]).

Точку пересечения прямых AB' и CA' обозначим через G, а точку пересечения прямых AC' и CB' через H. Требуется доказать, что точка P совпадает с точкой P_1 пересечения прямых CB' и RQ, для

[1]) Оно заимствовано из «Аналитической геометрии» Б. Н. Делоне и Д. А. Райкова.

чего в свою очередь достаточно доказать равенство двойных отношений

$$(CHB'P_1) = (CHB'P).$$

Имеем следующие тройки коллинеарных точек:

$$Q,\ C,\ G;\quad Q,\ H,\ A;\quad Q,\ P_1,\ R,$$

так что четверки точек

$$C,\ H,\ B',\ P_1 \quad \text{и} \quad G,\ A,\ B',\ R$$

находятся между собою в перспективном соответствии с центром перспективы Q, откуда следует, что

$$(CHB'P_1) = (GAB'R).$$

Аналогично убеждаемся в том, что четверки точек

$$G,\ A,\ B',\ R \quad \text{и} \quad C,\ A,\ E,\ B$$

перспективны между собою (при центре перспективы A'), так что

$$(GAB'R) = (CAEB).$$

Наконец,

$$C,\ A,\ E,\ B \quad \text{и} \quad C,\ H,\ B',\ P$$

находятся в перспективном соответствии при центре перспективы C', так что

$$(CAEB) = (CHB'P)$$

и, значит,

$$(CHB'P_1) = (CHB'P), \quad \text{т. е. } P_1 = P,$$

что и требовалось доказать.

Только что доказанная теорема 6′ была известна еще греческому геометру Паппу Александрийскому, жившему во второй половине III века н. э. Поэтому ее следует называть *теоремой Паппа*, как это обычно и делается. Можно ей дать и другое доказательство, не пользующееся двойным отношением и похожее на приведенное в предыдущей главе доказательство теоремы Дезарга (но более сложное); заинтересовавшийся читатель может попытаться провести такое доказательство.

В заключение этого параграфа докажем следующую очень известную теорему, установленную швейцарским геометром Я. Штейнером (Jakob Steiner, 1796—1863).

Теорема 7 (об образовании кривых второго порядка посредством проективного отображения одного пучка прямых на другой). *Пусть на плоскости даны два пучка прямых с центрами O и O' и проективное отображение $\mathfrak{C}$ одного пучка на другой, ставящее в соответствие каждому*

лучу m пучка O луч m' пучка O'. Если отображение $\mathscr{C}$ не является перспективным, то точки пересечения

$$M=(m\cdot m')$$

лучей, соответствующих друг другу, при этом отображении лежат на некоторой кривой второго порядка, проходящей через точки O и O'. Обратно, если на какой-нибудь кривой второго порядка γ взяты две точки O и O' и каждому лучу m пучка O ставится в соответствие луч m' пучка O', идущий в точку пересечения M луча m' с кривой γ, то полученное отображение $\mathscr{C}$ есть проективное отображение пучка O на пучок O' (очевидно, не являющееся перспективным).

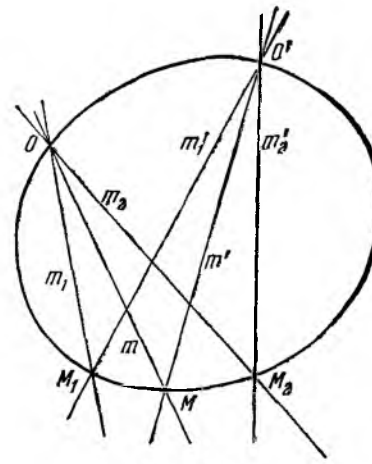


Рис. 247.

Предположим, что на плоскости дана система однородных координат x_1, x_2, x_3; левые части уравнений всех рассматриваемых далее прямых и кривых второго порядка суть многочлены первой, соответственно второй, степени относительно переменных x_1, x_2, x_3.

Докажем сначала второе утверждение теоремы 7. Возьмем какие-нибудь два луча m_1, m_2 пучка O и соответствующие им лучи m'_1, m'_2 пучка O' (рис. 247). Точки O и O' лежат на данной кривой γ второго порядка. Пара прямых m_1, m'_2 есть распадающаяся кривая второго порядка, уравнение которой может быть записано в виде [1])

$$m_1m'_2=0. \tag{10}$$

Точно так же пара прямых m'_1, m_2 есть распадающаяся кривая второго порядка, уравнение которой может быть записано в виде

$$m'_1m_2=0. \tag{11}$$

Кривая γ проходит через четыре точки $M_1=(m_1\cdot m'_1)$, $M_2=(m_2\cdot m'_2)$, $O=(m_1\cdot m_2)$ и $O'=(m'_1\cdot m'_2)$, каждая из которых принадлежит обеим кривым (10) и (11); поэтому кривая γ принадлежит пучку кривых, определенному кривыми (10) и (11).

---

[1]) Как и раньше, мы обозначаем левую часть уравнения прямой той же буквой, что и саму прямую (так что m и km при любом числовом множителе $k\neq 0$ — одна и та же прямая).

Следовательно, уравнение кривой γ можно записать в виде

$$km_1m_2' - k'm_2m_1' = 0$$

или (помня о возможности заменить m_1 через km_1, а m_1' через $k'm_1'$) в виде

$$m_1m_2' - m_2m_1' = 0,$$

т. е. в виде

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_1'}{m_2'}. \tag{12}$$

Возьмем теперь в каждом из пучков O и O' по проективной системе координат, имеющей лучи m_1 и m_2, соответственно m_1' и m_2', своими фундаментальными лучами. Каждая прямая m пучка O имеет уравнение вида

$$\lambda_1m_1 + \lambda_2m_2 = 0, \tag{13}$$

а каждая прямая m' пучка O' — уравнение вида

$$\lambda_1'm_1' + \lambda_2'm_2' = 0, \tag{13'}$$

причем λ_1, λ_2, соответственно λ_1' и λ_2', суть координаты лучей m и m' в соответствующих координатных системах (m_1, m_2, e) и (m_1', m_2', e'). Если прямые m и m' соответствуют друг другу в рассматриваемом отображении, то их точка пересечения M принадлежит кривой γ, значит, координаты этой точки удовлетворяют уравнению (12). Но эти координаты удовлетворяют и уравнениям (13) и (13').

Подставляя координаты точки M в эти уравнения, получаем равенства

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{m_2}{m_1}, \qquad \frac{\lambda_1'}{\lambda_2'} = -\frac{m_2'}{m_1'},$$

правые части $-\frac{m_2}{m_1}$ и $-\frac{m_2'}{m_1'}$ которых суть определенные числа, равные между собою в силу (12), так что $\lambda_1:\lambda_2 = \lambda_1':\lambda_2'$. Итак, при нашем отображении $\mathscr{C}$ пучка O на пучок O' лучу, имеющему в выбранной в этом пучке координатной системе координаты $\lambda_1:\lambda_2$, соответствует в другом пучке луч, имеющий в соответствующей координатной системе координаты $\lambda_1':\lambda_2' = \lambda_1:\lambda_2$. Проективность отображения $\mathscr{C}$ этим доказана.

Доказываем первое утверждение теоремы Штейнера.

Пусть между пучками O и O' установлено проективное соответствие. Тогда при надлежаще выбранных в каждом пучке проективных координатных системах соответствующие друг другу лучи m и m' обоих пучков имеют пропорциональные пары координат: $\lambda_1:\lambda_2 = \lambda_1':\lambda_2'$, и, следовательно, выражаются через координатные лучи m_1, m_2, соответственно m_1', m_2', одинаковым образом:

$$m = \lambda_1m_1 + \lambda_2m_2, \qquad m' = \lambda_1m_1' + \lambda_2m_2'.$$

Координаты точки пересечения M лучей m и m' удовлетворяют обоим уравнениям $m=0$ и $m'=0$, т. е.

$$\lambda_1 m_1+\lambda_2 m_2=0, \qquad \lambda_1 m_1'+\lambda_2 m_2'=0. \tag{14}$$

Определяя из второго из этих уравнений $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=-\frac{m_2'}{m_1'}$ и подставляя результат в первое уравнение (14), получаем

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{m_2'}{m_1'},$$

т. е. уравнение

$$m_1 m_2'-m_1' m_2=0 \tag{15}$$

степени не выше второй (относительно x_1, x_2, x_3). Пусть уравнение (15) — первой степени, тогда оно является уравнением прямой $\overline{OO'}$, которая оказалась бы осью перспективы для проективного отображения $\mathscr{C}$ — вопреки нашим предположениям.

Итак, уравнение (15) — второй степени и определяет кривую второго порядка, проходящую через точки O и O'. Теорема Штейнера доказана.

§ 4. Поляры и полюсы

Мы доказали в § 2, что если точка $P=(p_1:p_2:p_3)$ есть точка (нераспадающейся) кривой γ, определенной уравнением

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)=0, \tag{1}$$

то прямая

$$(a_{11}p_1+a_{12}p_2+a_{13}p_3)\,x_1+(a_{21}p_1+a_{22}p_2+a_{23}p_3)\,x_2+ \\ +(a_{31}p_1+a_{32}p_2+a_{33}p_3)\,x_3=0, \tag{2}$$

т. е. прямая с координатами

$$\left.\begin{aligned}\xi_1&=a_{11}p_1+a_{12}p_2+a_{13}p_3,\\ \xi_2&=a_{21}p_1+a_{22}p_2+a_{23}p_3,\\ \xi_3&=a_{31}p_1+a_{32}p_2+a_{33}p_3,\end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

есть касательная к кривой (1) в ее точке $P=(p_1:p_2:p_3)$. Но прямую с координатами (2′) можно рассматривать для любой точки $P=(p_1:p_2:p_3)$, независимо от того, лежит ли точка P на кривой (1) или нет. Эта прямая (2) называется *полярой* точки $P=(p_1:p_2:p_3)$ относительно кривой (1). Поляра точки P, лежащей на кривой, есть касательная к кривой в точке P.

Замечание 1. Это определение поляры годится как для нераспадающейся кривой второго порядка, так и для распадающейся на пару пересекающихся прямых.

Одиако во втором случае не будет определена поляра точки $P=(p_1:p_2:p_3)$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}p_1+a_{12}p_2+a_{13}p_3&=0,\\ a_{21}p_1+a_{22}p_2+a_{23}p_3&=0,\\ a_{31}p_1+a_{32}p_2+a_{33}p_3&=0. \end{aligned}$$

Единственной такой точкой P является точка пересечения обеих прямых, на которые распалась данная кривая. В этом и двух следующих параграфах мы не будем рассматривать кривые, распадающиеся на пару слившихся прямых.

Будем теперь предполагать (если не оговорено противное), что кривая γ нераспадающаяся. Тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

и уравнения (2′) однозначно разрешаются относительно p_1, p_2, p_3:

$$\left.\begin{aligned} p_1&=A_{11}\xi_1+A_{12}\xi_2+A_{13}\xi_3,\\ p_2&=A_{21}\xi_1+A_{22}\xi_2+A_{23}\xi_3,\\ p_3&=A_{31}\xi_1+A_{32}\xi_2+A_{33}\xi_3. \end{aligned}\right\} \qquad (2'')$$

Другими словами, если дана произвольная прямая, координаты которой обозначим через ξ_1, ξ_2, ξ_3, то существует единственная точка $(p_1:p_2:p_3)$, имеющая прямую $\{\xi_1:\xi_2:\xi_3\}$ своей полярой. Эта точка $(p_1:p_2:p_3)$ называется *полюсом* прямой $\{\xi_1:\xi_2:\xi_3\}$.

Пусть $(x_1:x_2:x_3)=X$ — какая-нибудь точка плоскости. Тогда уравнение (2), которое можно записать в виде

$$\Psi(p_1,\ p_2,\ p_3;\ x_1,\ x_2,\ x_3)=0, \qquad (3)$$

представляет собою условие для того, чтобы точка $X=(x_1:x_2:x_3)$ лежала на поляре точки P. Но выражение $\Psi(p_1,\ p_2,\ p_3;\ x_1,\ x_2,\ x_3)$ симметрично относительно троек чисел x_1, x_2, x_3 и p_1, p_2, p_3; поэтому равенство (3) выражает также условие того, что точка $P=(p_1:p_2:p_3)$ лежит на поляре точки X. Итак, имеем следующий основной результат.

Теорема 8 (теорема взаимности). *Если точка X лежит на поляре точки P, то и точка P лежит на поляре точки X.*

Пусть прямая q с координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 есть поляра точки P. Обозначим через Q_1, Q_2 точки пересечения прямой q с кривой (1)

(эти точки могут быть различными или совпадающими, действительными или мнимыми) (рис. 248).

Точка Q_1 лежит на поляре точки P; значит, по теореме взаимности точка P лежит на поляре точки Q_1, т. е. на касательной к кривой (1) в точке Q_1.

Другими словами, точка Q_1 есть точка прикосновения касательной, проведенной из точки P.

Итак, всякая точка пересечения поляры точки P с кривой (1) есть точка прикосновения касательной, проведенной из точки P. Так как имеется две точки пересечения Q_1, Q_2 поляры точки P с кривой (1), то из точки P можно провести к кривой (1) две касательные — одна будет касаться нашей кривой в точке Q_1, другая — в Q_2. Доказана

Теорема 9. *Из каждой точки P плоскости можно провести к кривой* (1) *две касательные, совпадающие между собою, если точка P лежит на кривой, и только в этом случае. Поляра точки P есть прямая, соединяющая точки прикосновения обеих касательных, проведенных к кривой* (1) *из точки P.*

Тот же факт можно высказать и так:

Полюс прямой q есть точка пересечения двух касательных, проведенных к кривой (1) *в точках пересечения прямой q с кривой* (1).

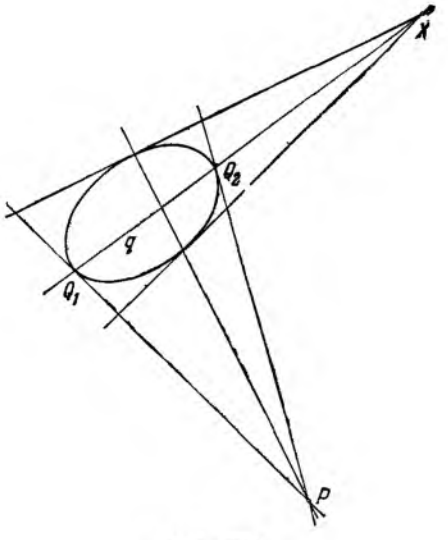


Рис. 248.

Это определение поляры и полюса не зависит от того, каким именно уравнением и в какой системе координат мы определим данную кривую второго порядка.

Приведенное определение годится независимо от того, будут ли касательные, проведенные из точки P, действительными или мнимыми. Однако рисунок осуществим, конечно, лишь если касательные из точки P действительные. В этом случае говорим, что точка P лежит *вне* кривой (1).

Если же касательные к кривой (1), проведенные из точки P, мнимые, то мы говорим, что точка P лежит внутри кривой (1); в этом случае рисунок уже не имеет реального смысла. Спрашивается: как в этом случае свести построение поляры точки P

к построению касательных? Для этого проведем через точку P две какие-нибудь прямые AB и $A'B'$ (рис. 249), точки пересечения этих прямых с кривой (1) обозначим через A, B, соответственно A', B'. Касательные в точках A, B, A', B' к нашей кривой обозначим соответственно через a, b, a', b'. Точку пересечения прямых a и b обозначим через C, точку пересечения прямых a' и b' обозначим через C'. Прямая CC' и есть поляра точки P.

В самом деле, прямая AB есть поляра точки C, и P лежит на этой поляре; так как P лежит на поляре точки C, то точка C лежит на поляре точки P; точно так же точка P лежит на поляре точки C', значит, точка C' лежит на поляре точки P. Поляра точки P, таким образом, проходит через обе точки C и C', а значит, эта поляра есть прямая CC'.

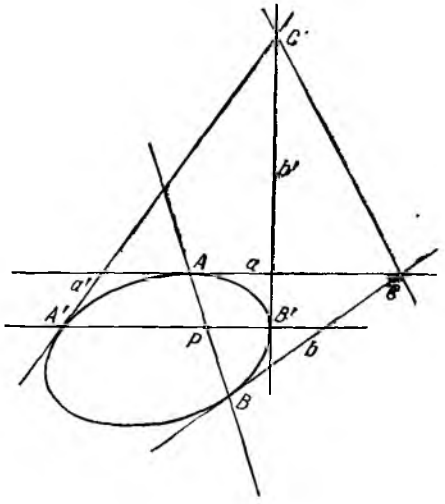


Рис. 249.

Это построение применимо не только к случаю, когда P — внутренняя точка кривой (1) (см. рис. 249), а к любому случаю. На рис. 250 наше построение сделано для точки P, внешней к кривой (1).

Определение поляры точки и полюса прямой относительно данной нераспадающейся кривой второго порядка (1) устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми точками и всеми прямыми проективной плоскости: каждой точке X плоскости соответствует вполне определенная прямая этой плоскости, а именно поляра точки X; каждая прямая является полярой лишь одной точки (своего полюса). Если точка X дана своими однородными координатами

$$X=(x_1:x_2:x_3),$$

то координаты $\{\xi_1:\xi_2:\xi_3\}$ ее поляры находятся по формулам:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ \xi_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\ \xi_3&=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Обратно, если дана прямая своими координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3, то

координаты ее полюса находятся по формулам:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3, \\ x_2 &= A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3, \\ x_3 &= A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где коэффициенты A_{ik} получаются, если решить уравнения (4) относительно x_1, x_2, x_3 (что возможно, так как $\det A \neq 0$); матрица (A_{ik}) есть матрица, обратная к матрице (a_{ik}).

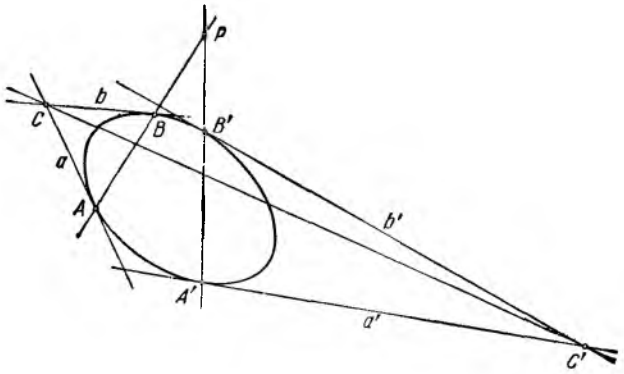


Рис. 250.

Только что описанное соответствие между точками и прямыми плоскости называется *полярным соответствием*, порожденным данной нераспадающейся кривой второго порядка (1). При полярном соответствии сохраняется отношение инцидентности между точками и прямыми, именно в этом заключается содержание теоремы 8. Эта теорема может быть сформулирована и так:

Теорема 8′. *Если данная точка X пробегает некоторую прямую d, то ее поляра пробегает весь пучок прямых с центром в полюсе D прямой d.*

Обратно, если прямая ξ пробегает весь пучок прямых с центром в данной точке D, то ее полюс X пробегает прямую d, а именно поляру точки D.

В самом деле, если точка X пробегает поляру d точки D, то точка D лежит на поляре каждой из точек X, т. е. поляры всех точек X пробегают весь пучок прямых с центром D.

Другое определение поляры. Пусть снова

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

есть уравнение кривой γ второго порядка.

Назовем две точки $M=(\xi_1:\xi_2:\xi_3)$ и $N=(\eta_1:\eta_2:\eta_3)$ *сопряженными* относительно кривой γ, если точки M и N образуют пару точек, гармонически сопряженную к паре точек пересечения $P=(p_1:p_2:p_3)$, $Q=(q_1:q_2:q_3)$ прямой MN с кривой γ, т. е. если

$$(MNPQ)=-1.$$

Параметрическое уравнение прямой MN может быть записано в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\xi_1\lambda+\eta_1\mu,\\ x_2&=\xi_2\lambda+\eta_2\mu,\\ x_3&=\xi_3\lambda+\eta_3\mu, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

а координаты точек пересечения P и Q определяются подстановкой в эти уравнения значений λ и μ, отношение которых $k=\frac{\lambda}{\mu}$ определяется из квадратного уравнения

$$Ak^2+2Bk+C=0, \tag{7}$$

где

$$A=\Phi(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3),\quad B=\Psi(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3;\ \eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3),\quad C=\Phi(\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3).$$

Корни уравнения (7) обозначаем через k' и k'', так что теперь

$$\begin{aligned} p_1&=k'\xi_1+\eta_1, & q_1&=k''\xi_1+\eta_1,\\ p_2&=k'\xi_2+\eta_2, & q_2&=k''\xi_2+\eta_2,\\ p_3&=k'\xi_3+\eta_3, & q_3&=k''\xi_3+\eta_3. \end{aligned}$$

Из формулы (10) § 8 главы XXI нам известно, что четверка точек M, N, P, Q тогда и только тогда будет гармонической, когда

$$k'+k''=0,$$

т. е. если в квадратном уравнении (7) коэффициент $B=0$. А это значит, что

$$\Psi(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3;\ \eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)=0.$$

Если теперь точка $M=(\xi_1:\xi_2:\xi_3)$ дана, а точка N определена требованием быть гармонически сопряженной точке M относительно кривой γ, то координаты точки N, которые мы теперь будем обозначать через x_1, x_2, x_3, должны удовлетворять уравнению

$$\Psi(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3;\ x_1,\ x_2,\ x_3)=0.$$

Но это уравнение есть не что иное, как уравнение поляры точки M относительно кривой γ.

Итак:

Теорема 10. *Поляра точки M относительно данной кривой второго порядка есть геометрическое место точек, гармонически сопряженных с точкой M относительно этой кривой γ.*

Теорема 10 может рассматриваться как новое определение поляры. Это определение может быть перенесено и на случай распадающейся кривой второго порядка. Существенно при этом, что уравнение поляры точки $M=(\xi_1:\xi_2:\xi_3)$ есть

$$\Psi(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3;\ x_1,\ x_2,\ x_3)=0,$$

что тоже может быть принято за определение поляры. Однако при обращении в нуль дискриминанта Δ формы $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3)$ соответствие между полярой и полюсом перестает быть однозначным.

Замечание 2. Если кривая γ распалась на пару различных прямых d и d', пересекающихся в некоторой точке O, то, как мы знаем, определенное этой кривой полярное соответствие между точками и прямыми плоскости перестает быть взаимно однозначным. Тем не менее для каждой точки M, отличной от точки O, имеется единственная поляра, и эта поляра проходит через точку O. Для самой точки O поляра перестает быть определенной (если угодно, можно считать любую прямую, проходящую через точку O, касательной, а следовательно, и полярой этой точки).

§ 5. Коррелятивное, в частности полярное, соответствие. Тангенциальное уравнение кривой

Пусть дана какая-нибудь невырождающаяся, в остальном совершенно произвольная матрица

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Напишем формулы:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= c_{11}x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3, \\ \xi_2 &= c_{21}x_1+c_{22}x_2+c_{23}x_3, \\ \xi_3 &= c_{31}x_1+c_{32}x_2+c_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Здесь каждая тройка $x_1,\ x_2,\ x_3$ есть тройка однородных координат некоторой точки X проективной плоскости. Если мы под соответствующей тройкой $\xi_1:\xi_2:\xi_3$ будем понимать также тройку координат точки плоскости, то формулы (I) дадут нам некоторое проективное преобразование (коллинеацию) плоскости.

Но мы можем под $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$ понимать координаты некоторой прямой; тогда формулы (I) дадут нам некоторое взаимно однозначное соответствие между точками и прямыми плоскости; взаимная однозначность этого соответствия следует из того, что матрица C невырождающаяся; поэтому, решая уравнения (I) относительно

x_1, x_2, x_3, мы по данным ξ_1, ξ_2, ξ_3 получим x_1, x_2, x_3 по формулам:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= C_{11}\xi_1 + C_{12}\xi_2 + C_{13}\xi_3, \\ x_2 &= C_{21}\xi_1 + C_{22}\xi_2 + C_{23}\xi_3, \\ x_3 &= C_{31}\xi_1 + C_{32}\xi_2 + C_{33}\xi_3, \end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

где (C_{ik}) есть матрица, обратная к матрице (c_{ik}).

Взаимно однозначные соответствия между точками и прямыми проективной плоскости, даваемые формулами типа (I) и (II), в которых данной точке (данной прямой) ставится в соответствие прямая (точка), координаты которой линейно и однородно выражаются через координаты данной точки (данной прямой), называются *корреляти́вными соответствиями* или *корреляциями* на проективной плоскости. При этом сама плоскость понимается как множество всех лежащих в ней точек и прямых, и речь идет, следовательно, о таком взаимно однозначном отображении этого множества на себя, при котором его разноименные элементы, точки и прямые, переходят друг в друга.

Полярные соответствия составляют частный случай корреляций; полярное соответствие — это такая корреляция, матрица C которой есть симметрическая матрица. Каждая симметрическая матрица есть матрица некоторой квадратичной формы; приравнивая эту форму нулю, получим уравнение кривой второго порядка; полярное соответствие, определенное этой кривой, и есть, очевидно, данная симметрическая корреляция.

Когда при данном полярном соответствии точка переходит в инцидентную ей прямую? Другими словами, когда данная точка $X = (x_1 : x_2 : x_3)$ лежит на своей поляре $\{\xi_1 : \xi_2 : \xi_3\}$?

Пишем условие инцидентности:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$

т. е.

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\,x_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\,x_2 + \\ + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\,x_3 = 0,$$

т. е.

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 0. \qquad (1)$$

Итак, точка $(x_1 : x_2 : x_3)$ инцидентна своей поляре тогда и только тогда, когда она лежит на кривой (1). Но тогда поляра данной точки есть касательная в этой точке.

Тот же вопрос можно, естественно, поставить и для прямой: когда данная прямая ξ инцидентна своему полюсу X? Если прямая ξ инцидентна своему полюсу X, то этот полюс инцидентен своей *поляре*, т. е. точка X лежит на кривой (1), а прямая ξ является касательной к кривой (1) в этой точке.

Скажем, что точка инцидентна данной кривой, если она лежит на ней, и что прямая инцидентна кривой, когда является ее касательной.

Мы имеем следующее предложение.

Теорема 11. *Два элемента — точка и прямая, соответствующие друг другу при полярном соответствии, определенном данной невырождающейся кривой второго порядка, тогда и только тогда инцидентны между собою, когда сами эти элементы инцидентны данной кривой.*

Теперь легко ответить и на такой вопрос: какому условию удовлетворяют координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 всех прямых, инцидентных данной кривой $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$?

Прямые, инцидентные кривой (1), — это прямые $\{\xi_1 : \xi_2 : \xi_3\}$, инцидентные своим полюсам, где

$$\begin{aligned} x_1 &= A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3, \\ x_2 &= A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3, \\ x_3 &= A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3. \end{aligned}$$

Условие инцидентности $x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0$ дает в данном случае

$$(A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3)\xi_1 + (A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3)\xi_2 + \\ + (A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3)\xi_3 = 0,$$

т. е.

$$\overline{\Phi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = A_{11}\xi_1^2 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + A_{22}\xi_2^2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 + \\ + A_{33}\xi_3^2 = 0. \quad (2)$$

Этому уравнению и удовлетворяют координаты всех прямых, инцидентных данной кривой (т. е. всех касательных к этой кривой).

Ввиду равноправия точек и прямых на проективной плоскости всякую алгебраическую кривую на плоскости естественно рассматривать не только как множество инцидентных ей точек, но и как множество инцидентных ей прямых. Уравнение (1) есть уравнение, которому удовлетворяют координаты всех точек, инцидентных данной кривой второго порядка; это обычное, или «точечное», уравнение данной кривой. Уравнение (2) есть уравнение, которому удовлетворяют координаты всех прямых, инцидентных данной кривой второго порядка; это уравнение называется *«тангенциальным»* (т. е. «касательным») уравнением данной кривой или уравнением ее в *«тангенциальных» координатах* (под тангенциальными координатами понимаются координаты прямой). Тангенциальное уравнение кривой второго порядка есть также уравнение второй степени. Для кривых высших порядков это уже не так.

Имеет место следующий факт, являющийся усилением принципа двойственности, сформулированного в § 4 предыдущей главы.

Пусть доказано какое-нибудь предложение, касающееся точек, прямых и кривых второго порядка и отношений инцидентности между ними. Тогда имеет место и двойственное предложение, получающееся из первоначального заменою слов «прямая» и «точка» друг на друга. Эта же замена, систематически осуществляемая во всех рассуждениях, образующих доказательство одного из двух двойственных между собою предложений, превращает их в доказательство второго предложения.

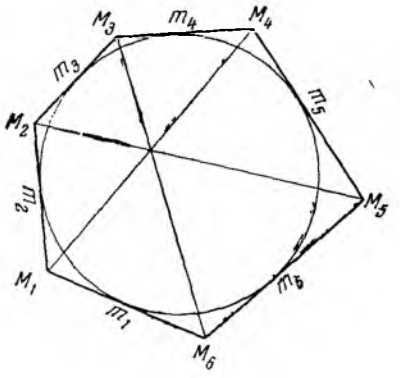


Рис. 251.

Классическим примером может служить теорема, двойственная в этом смысле к теореме Паскаля, а именно следующая *теорема Брианшона*:

Теорема 6. *Пусть даны шесть прямых*:

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ m_5,\ m_6,$$

инцидентных данной невырождающейся кривой второго порядка (рис. 251). *Эти шесть прямых в том порядке, в котором они даны, определяют шесть точек:*

$$M_1 = (m_1 \cdot m_2),\quad M_2 = (m_2 \cdot m_3),\quad M_3 = (m_3 \cdot m_4),$$
$$M_4 = (m_4 \cdot m_5),\quad M_5 = (m_5 \cdot m_6),\quad M_6 = (m_6 \cdot m_1).$$

Тогда три прямые

$$M_1M_4,\quad M_2M_5,\quad M_3M_6$$

проходят через одну точку («*три прямые, соединяющие пары противоположных вершин шестиугольника, описанного вокруг кривой второго порядка, проходят через одну точку*»).

Теоремой, двойственной к теореме 5, является

Теорема 5. *Всякие пять прямых, из которых никакие четыре не проходят через одну точку, определяют единственную кривую второго порядка, этим прямым инцидентную, т. е. касающуюся каждой из них.*

Наконец, следует отметить и двойственное предложение к теореме 7.

Теорема 7. *Пусть даны кривая второго порядка γ и две касательные d и d' к ней. Каждой точке M прямой d поставим в соответствие ту точку M' прямой d', в которой эту прямую пересечет касательная, проведенная к кривой γ из точки M. Полученное ото-*

бражение прямой d на прямую d' является проективным (но не перспективным). Обратно, если дано проективное отображение прямой d на прямую d', не являющееся перспективным, то множество всех прямых вида MM', где M и M' суть какие-нибудь соответствующие друг другу при данном проективном соответствии точки прямых d и d', есть множество всех касательных к некоторой кривой второго порядка.

Доказательство всех этих теорем, состоящее из рассуждений, двойственных к доказательствам теорем 6, 5, 7, было бы для читателя полезным упражнением.

§ 6. Диаметры как поляры несобственных точек

Диаметры центральной кривой второго порядка были определены как прямые, проходящие через ее единственный центр. Диаметры параболы суть прямые асимптотического направления, т. е. прямые, проходящие через единственную точку параболы. Если назвать несобственную точку параболы ее центром, то *диаметры любой нераспадающейся кривой второго порядка суть не что иное, как прямые, проходящие через центр этой кривой.*

Уравнение диаметра кривой

$$\Phi(x_1 : x_2 : x_3) = 0, \tag{1}$$

сопряженного данному направлению $\{\alpha : \beta\}$, есть (гл. XVII, § 7), в однородных координатах,

$$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)\,x_1 + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)\,x_2 + (a_{31}\alpha + a_{32}\beta)\,x_3 = 0\ ^{1}). \tag{2}$$

Это же уравнение является, как показывает непосредственная проверка, и уравнением поляры несобственной точки $(\alpha : \beta : 0)$. Итак доказана

Теорема 12. *Диаметр нераспадающейся кривой второго порядка, сопряженный данному направлению $\{\alpha : \beta\}$, есть поляра несобственной точки $(\alpha : \beta : 0)$, удаленной в бесконечность в этом направлении.*

Из доказанного следует, что поляра любой несобственной точки проходит через центр кривой; значит, поляра центра проходит через все несобственные точки, т. е. является несобственной прямой.

Полюс несобственной прямой относительно данной нераспадающейся кривой второго порядка есть центр этой кривой.

---

[1]) Чтобы получить это уравнение, надо в уравнение § 7 главы XVII $(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)\,x + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)\,y + a_1\alpha + a_2\beta = 0$ подставить $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ и изменить обозначения коэффициентов, положив $a_1 = a_{13} = a_{31}$, $a_2 = a_{23} = a_{32}$.

§ 7. Автополярный треугольник

Пусть γ — нераспадающаяся кривая второго порядка. Треугольник ABC называется *автополярным* относительно кривой γ, если каждая его вершина есть полюс противолежащей ей стороны треугольника (т. е. точка A есть полюс прямой $a=BC$, точка B — полюс прямой $b=CA$, точка C — полюс прямой $c=AB$).

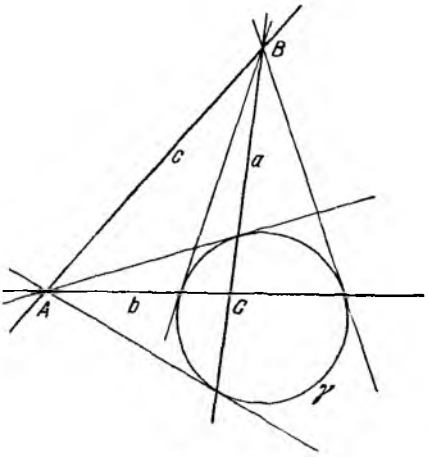


Рис. 252.

Докажем, что имеется бесконечное множество треугольников, автополярных относительно кривой γ.

В самом деле, возьмем произвольную точку A, не лежащую на кривой γ. Обозначим через a поляру точки A относительно кривой γ (рис. 252). На прямой a возьмем произвольную точку B; ее поляру обозначим через b. Точка A, не принадлежащая кривой γ, не инцидентна своей поляре a и поэтому заведомо отлична от точки B, которая взята на прямой a. Поэтому прямые a и b не совпадают между собою и, следовательно, пересекаются в некоторой точке $C=(a\cdot b)$, так что $a=BC$. Поляру точки C обозначим через c. Так как точка C инцидентна обеим прямым a и b, то поляра c этой точки инцидентна полюсам прямых a и b, т. е. $c=AB$. Аналогично точка A, как полюс прямой a (инцидентной точкам B и C), инцидентна полярам b и c точек B и C, т. е. $A=(b\cdot c)$.

Пусть теперь за координатный треугольник проективной системы координат X_1, X_2, X_3 взят какой-нибудь треугольник ABC, автополярный относительно данной кривой второго порядка

$$\Phi(x_1, x_2, x_3)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+ \\ +2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0. \quad (1)$$

Мы сейчас докажем, что при таком выборе системы координат форма $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ непременно имеет канонический вид, т. е. что

$$a_{12}=a_{13}=a_{23}=0.$$

Будем считать, например, что $X_1=A$, $X_2=B$, $X_3=C$, так что координатная запись точек A, B, C и прямых a, b, c есть

соответственно

$$A=(1:0:0), \qquad B=(0:1:0), \qquad C=(0:0:1),$$
$$a=X_2X_3=\{1:0:0\}, \qquad b=X_1X_3=\{0:1:0\}, \qquad c=X_1X_2=\{0:0:1\}.$$

Прямая a есть поляра точки A, значит,

$$a=\{(a_{11}\cdot 1+a_{12}\cdot 0+a_{13}\cdot 0):(a_{21}\cdot 1+a_{22}\cdot 0+a_{23}\cdot 0):$$
$$:(a_{31}\cdot 1+a_{32}\cdot 0+a_{33}\cdot 0)\}=\{a_{11}:a_{21}:a_{31}\}.$$

Но a есть прямая $\{1:0:0\}$, так что $a_{11}\neq 0$, $a_{21}=0$, $a_{31}=0$. Из того, что прямая $b=\{0:1:0\}$ есть поляра точки $B=(0:1:0)$, мы таким же точно образом выведем, что и $a_{23}=0$; поэтому уравнение (1) действительно имеет вид

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0.$$

Итак, по крайней мере для форм $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ ранга 3 мы доказали, что приведение их к каноническому виду означает выбор любой такой системы проективных координат, координатный треугольник которой является автополярным по отношению к кривой

$$\Phi(x_1, x_2, x_3)=0.$$

Вернемся с этой новой точки зрения к ранее доказанному факту, что в аффинной системе координат, начало которой есть центр центральной кривой второго порядка, а оси являются сопряженными диаметрами, уравнение кривой имеет вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}=0$$

или, в однородных координатах, соответствующих данным аффинным,

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0.$$

Координатный треугольник этой системы координат есть треугольник ABC, где

$$A=(1:0:0), \quad B=(0:1:0), \quad C=(0:0:1).$$

Нетрудно видеть, что этот треугольник является автополярным. В самом деле, его стороны суть несобственная прямая и оси координат соответствующей аффинной системы. Но несобственная прямая $c=AB$ есть поляра центра кривой, т. е. начало координат $C=(0:0:1)$, тогда как ось абсцисс $b=CA$ (будучи диаметром, сопряженным к оси ординат $a=CB$) есть поляра несобственной точки этой последней, т. е. точки B, а ось ординат a есть поляра несобственной точки A оси абсцисс.

§ 8. Проективная классификация кривых второго порядка

Пусть дана кривая второго порядка

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0 \quad (1)$$

на проективной плоскости $\bar{\pi}$.

Предположим сначала, что квадратичная форма $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ имеет ранг 3, т. е. что кривая (1) нераспадающаяся. Тогда невырожденным линейным однородным преобразованием

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + c_{13}x_3', \\ x_2 &= c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + c_{23}x_3', \\ x_3 &= c_{31}x_1' + c_{32}x_2' + c_{33}x_3' \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

форма $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ может быть приведена к форме $\Phi'(x_1', x_2', x_3')$, имеющей один из следующих видов:

$$\begin{gathered} x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2, \\ x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2, \\ -x_1'^2 - x_2'^2 + x_3'^2, \\ -x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2. \end{gathered}$$

Здесь третья и четвертая строчки получаются соответственно из второй и первой умножением на -1. Так как нас интересуют не сами формы $\Phi(x_1, x_2, x_3)$, а уравнения, полученные приравниванием этих форм нулю, и так как формулы (2) суть формулы перехода от однородных координат $x_1 : x_2 : x_3$ к проективным координатам $x_1' : x_2' : x_3'$, то мы можем высказать следующее предложение:

Всякая нераспадающаяся кривая второго порядка в надлежаще выбранной системе проективных координат получает одно из следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 &= 0, \\ x_1'^2 + x'^2 - x_3'^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Разрешая уравнения (2) относительно x_1', x_2', x_3' (что возможно, так как $\det C \neq 0$), получаем:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + d_{13}x_3, \\ x_2' &= d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + d_{23}x_3, \\ x_3' &= d_{31}x_1 + d_{32}x_2 + d_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \quad D = (d_{ik}) = C^{-1}. \quad (4)$$

Эти формулы мы можем рассматривать как формулы проективного преобразования плоскости: каждой точке X с однородными координатами $x_1 : x_2 : x_3$, в силу формул (4), соответствует точка X' с однородными координатами $x_1' : x_2' : x_3'$. При этом, если x_1, x_2, x_3

удовлетворяют уравнению

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

то x_1', x_2', x_3' удовлетворяют уравнению

$$\Phi'(x_1', x_2', x_3') = 0. \tag{1'}$$

Другими словами, при проективном преобразовании, определяемом формулами (4), кривая (1) переходит в кривую

$$\Phi'(x_1', x_2', x_3') = 0.$$

Следовательно, полученный результат может быть сформулирован и так:

Надлежаще подобранным проективным преобразованием всякая нераспадающаяся кривая второго порядка γ может быть преобразована в кривую γ' одного из двух следующих видов:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{5}$$

или

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \tag{6}$$

При этом уравнения всех кривых рассматриваются в одной и той же системе проективных координат; мы будем ее считать системой однородных координат на проективной плоскости $\bar{\pi}$, а именно системой, соответствующей данной аффинной системе координат на плоскости π.

Кривая вида (5) не содержит действительных точек; она называется *мнимым овалом*.

Кривая вида (6) при переходе к неоднородным координатам в системе oe_1e_2 получает уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{7}$$

Если система координат oe_1e_2 прямоугольная, то кривая (7) — просто окружность.

Итак, всякая действительная нераспадающаяся кривая второго порядка проективным преобразованием может быть преобразована в окружность. Следовательно, любые две действительные нераспадающиеся кривые второго порядка могут быть переведены друг в друга; все такие кривые образуют один и тот же проективный класс — класс действительных овальных кривых.

Как следует из результатов, установленных в § 1, действительная овальная кривая является эллипсом, гиперболой или параболой в зависимости от того, как она расположена относительно несобственной прямой: эллипсы пересекают несобственную прямую в двух различных мнимых точках, гиперболы — в двух различных действительных точках, параболы касаются несобственной прямой. Найдем

проективное преобразование, переводящее гиперболу

$$x^2 - y^2 = 1 \tag{8}$$

в окружность

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{7}$$

(система координат oe_1e_2 прямоугольная).

Для этого перепишем уравнение (8) в **однородных** координатах:

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0, \tag{9}$$

и сделаем проективное преобразование:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_3, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_1. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Гипербола (8) переходит при этом преобразовании в кривую, состоящую из всех точек $M' = (x_1' : x_2' : x_3')$, удовлетворяющих уравнению

$$x_3'^2 - x_2'^2 - x_1'^2 = 0. \tag{11}$$

Так как в уравнении (11) через x_1', x_2', x_3' обозначены координаты переменной точки в тех же однородных координатах, то нет надобности обозначать эти координаты штрихованными буквами: просто при проективном преобразовании (10) кривая (9) переходит в кривую

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

или, в неоднородных координатах, в окружность

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Полученный результат естественно вытекает из того, что при преобразовании (10) несобственная прямая

$$x_3 = 0$$

перешла в прямую $x_1 = 0$, а в несобственную прямую $x_3 = 0$ перешла прямая $x_1 = 0$, т. е. ось ординат, с которой гипербола (8) не имела общих действительных точек. Поэтому преобразованная кривая не будет пересекать в действительных точках образ оси ординат, т. е. несобственную прямую; она будет вся расположена в конечной части плоскости.

Возьмем параболу

$$y^2 = 2x \tag{12}$$

или, в однородных координатах,

$$x_2^2 - 2x_1x_3 = 0. \tag{13}$$

При проективном преобразовании

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 - \frac{1}{2}x_3, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_1 + \frac{1}{2}x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

$\left(\text{при котором } x_1 = \frac{1}{2}x_1' + \frac{1}{2}x_3',\ x_2 = x_2',\ x_3 = -x_1' + x_3'\right)$ кривая (13) переходит в кривую с уравнением

$$x_2'^2 - (x_3'^2 - x_1'^2) = 0,$$

т. е.

$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0,$$

или, в прямоугольных координатах, в кривую с уравнением

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Кривая эта представляет собою окружность. Итак, проективное преобразование (14) переводит параболу $y^2 = 2x$ в окружность (7).

Переходим к случаю, когда форма $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ имеет ранг 2. Тогда эта форма преобразованием (2) приводится к одному из двух видов:

$$x_1'^2 + x_2'^2,$$
$$x_1'^2 - x_2'^2.$$

Кривая (1) проективным преобразованием (4) переводится либо в кривую

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = 0, \qquad (15)$$

либо в кривую

$$x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0. \qquad (16)$$

Кривая (15) есть пара мнимых прямых; их уравнение в неоднородных координатах есть

$$x + iy = 0, \quad x - iy = 0.$$

Кривая (16) есть пара действительных прямых

$$x + y = 0, \quad x - y = 0.$$

Наконец, если ранг формы $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ равен 1, то эта форма преобразованием вида (2) приводится к виду

$$x_1'^2.$$

Это значит, что некоторым проективным преобразованием (4) кривая (1) переводится в кривую

$$x_1^2 = 0$$

— в пару совпадающих прямых.

Итак, имеет место следующая

Теорема 13. *Невырождающаяся кривая второго порядка γ есть овал (действительный или мнимый); некоторым проективным преобразованием она переводится соответственно в действительную окружность*

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

т. е.

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

или в мнимую окружность

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

т. е.

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

Вырождающаяся кривая второго порядка есть пара прямых, действительных (быть может, совпадающих) или мнимых сопряженных.

В то же время все перечисленные пять типов кривых проективно различны: очевидно, ни одна из них не может быть переведена в другую посредством проективного преобразования.

Замечание. Последнее утверждение, очевидное геометрически, вытекает также из следующего предложения, являющегося в свою очередь следствием теоремы единственности, с одной стороны, и теоремы об инвариантности ранга и индекса квадратичной формы, с другой.

Теорема 14. *Если*

$$\Phi_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{и} \quad \Phi_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

суть уравнения в данной проективной системе координат I двух проективно эквивалентных кривых второго порядка γ_1 и γ_2, то формы $\Phi_1(x_1, x_2, x_3)$ и $\Phi_2(x_1, x_2, x_3)$ имеют один и тот же ранг, а сигнатуры их имеют одну и ту же абсолютную величину (могут отличаться только знаком).

В самом деле, пусть при проективном преобразовании, переводящем кривую γ_1 в кривую γ_2, проективная система координат I переходит в проективную систему координат I'. Тогда кривая γ_2 имеет в системе координат I' то же уравнение, которое кривая γ_1 имела в системе I, т. е. уравнение $\Phi_1(x_1', x_2', x_3') = 0$.

Но при переходе от системы координат I к системе I' уравнение $\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = 0$ кривой тождественно преобразуется в какое-то уравнение $\Phi'_2(x'_1, x'_2, x'_3) = 0$ той же кривой γ_2. Итак, кривая γ_2 имеет в одной и той же системе координат I' два уравнения: $\Phi_1(x'_1, x'_2, x'_3) = 0$ и $\Phi'_2(x'_1, x'_2, x'_3) = 0$. Значит, формы $\Phi_1(x'_1, x'_2, x'_3)$ и $\Phi'_2(x'_1, x'_2, x'_3)$, как левые части уравнений одной и той же кривой γ_2 в одной и той же системе координат I', могут отличаться лишь постоянным множителем, так что их сигнатуры совпадают, а индексы могут отличаться лишь знаком. В то же время форма $\Phi'_2(x'_1, x'_2, x'_3)$ получилась из формы $\Phi_2(x_1, x_2, x_3)$ тождественным преобразованием (переходом от переменных x_1, x_2, x_3 к переменным x'_1, x'_2, x'_3), значит, ранг и индекс форм Φ_2 и Φ'_2 одни и те же; поэтому ранги форм Φ_1 и Φ_2 совпадают, а сигнатуры могут отличаться лишь знаком.

Теорема доказана.

ГЛАВА XXIII

НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Проективное пространство; его плоскости и прямые

Начнем с того, что вкратце повторим для четырехмерного пространства то, что в начале главы XXI было сказано для трехмерного.

Возьмем в четырехмерном аффинном пространстве R^4 какую-нибудь точку O и рассмотрим множество всех проходящих через точку O прямых, плоскостей и гиперплоскостей (т. е. трехмерных подпространств) пространства R^4. Это множество называется *связкой с центром* O в пространстве R^4, мы будем его обозначать одной буквой O. Между различными элементами связки — ее прямыми, плоскостями и гиперплоскостями — установлено отношение инцидентности: прямая инцидентна плоскости или гиперплоскости, если она содержится в ней, и т. д.

Отношение инцидентности симметрично: если прямая d инцидентна плоскости π, то говорим, что и плоскость π инцидентна прямой d, и т. д. Прямые связки называются, когда это удобно, ее *лучами*.

Мы можем переименовать связку O четырехмерного пространства в трехмерное проективное пространство P^3, соответственно переименовывая лучи, плоскости, гиперплоскости связки в точки, прямые, плоскости проективного пространства P^3, — совершенно аналогично тому, что мы делали в случае проективной плоскости и связки трехмерного пространства [1]).

---

[1]) При аксиоматическом построении проективной геометрии точки, прямые и плоскости проективного пространства рассматриваются как не подлежащие определению самостоятельные элементы, связанные между собою отношением инцидентности так, что выполнены определенные условия, составляющие содержание аксиом проективной геометрии (аксиоматическое построение проективной геометрии читатель может найти, например, в пятой главе книги Н. В. Ефимова «Высшая геометрия»).

Мы на эту точку зрения становиться не будем (хотя и коснемся ее на мгновение, когда будем говорить о двойственности между точками и плоско-

Всякая аффинная система координат $Oe_1e_2e_3e_4$ пространства R^4, начало которой есть центр O данной связки, называется *аффинной координатной системой в связке* O.

Любая четверка чисел x_1, x_2, x_3, x_4, являющаяся четверкой координат какого-нибудь направляющего вектора $\mathbf{u}$ данного луча m связки O, называется *четверкой координат луча* m (в аффинной системе координат $Oe_1e_2e_3e_4$). Очевидно, все четверки координат луча m образуют класс пропорциональных между собою четверок и, обратно, всякий класс пропорциональных между собою числовых четверок x_1, x_2, x_3, x_4 является классом четверок координат (относительно данной системы координат $Oe_1e_2e_3e_4$) некоторого луча связки O. Если при этом предполагать, что исходное четырехмерное аффинное пространство является комплексным, то в нем рассматривается и связка, состоящая из всех комплексных прямых, плоскостей и гиперплоскостей, проходящих через данную действительную точку O. Так получается *комплексная связка* O, или, после соответствующего переименования ее элементов, *комплексное проективное пространство*.

В предположении, что в комплексной связке выбрана система координат $Oe_1e_2e_3e_4$ (начало и единичные векторы которой всегда предполагаются действительными), мы получим, как и выше, взаимно однозначное соответствие между всеми лучами комплексной связки O и всеми классами пропорциональных четверок $(x_1:x_2:x_3:x_4)$, состоящих теперь уже из произвольных комплексных чисел x_1, x_2, x_3, x_4. Лишь четверка, состоящая из одних нулей, как всегда, оказывается запрещенной.

Отождествляя каждый луч связки с классом четверок его координат относительно данной, раз навсегда выбранной аффинной координатной системы $Oe_1e_2e_3e_4$, мы приходим к понятию *арифметического проективного пространства*, точками которого являются всевозможные классы пропорциональных между собою четверок чисел — действительных в случае действительного, комплексных в случае комплексного проективного пространства. *Плоскостью* арифметического проективного пространства называется множество всех его точек $(x_1:x_2:x_3:x_4)$, удовлетворяющих однородному уравнению первой степени

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0. \qquad (1)$$

Два уравнения вида (1) тогда и только тогда имеют одно и то же множество решений, когда их коэффициенты пропорциональны;

стями проективного пространства); для нас основными элементами связки являются ее лучи; плоскости и гиперплоскости связки мы будем воспринимать как множества составляющих их лучей. Другими словами, прямые и плоскости проективного пространства будут для нас множествами точек; отношение инцидентности сводится к отношению включения одного множества в другое.

пропорциональность коэффициентов в двух уравнениях вида (1) является необходимым и достаточным условием, чтобы эти два уравнения определяли одну и ту же плоскость в арифметическом проективном пространстве.

Итак, множество всех плоскостей арифметического проективного пространства, так же как и множество всех его точек, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех классов, состоящих из пропорциональных между собою четверок чисел. Поэтому — во временное изменение только что принятого определения[1]) и в полной аналогии с тем, что было сказано в главе XXI, § 3, о проективной плоскости, — мы можем рассматривать и проективное пространство как содержащее элементы двух родов — точки и плоскости. И те и другие суть классы пропорциональных между собою числовых четверок, снабженных опознавательным знаком, указывающим, идет ли речь о точке или о плоскости проективного пространства. Каждая из четверок, составляющих данный класс, будет называться *четверкой* «*однородных координат*» соответствующего элемента (точки или плоскости) проективного пространства, именно мы будем говорить о точках $(x_1:x_2:x_3:x_4)$ и плоскостях $\{u_1:u_2:u_3:u_4\}$.

При этом точка $(x_1:x_2:x_3:x_4)$ и плоскость $\{u_1:u_2:u_3:u_4\}$ арифметического проективного пространства называются *инцидентными* между собою, если они связаны равенством (1), являющимся в этом случае числовым тождеством.

На проективной плоскости мы имели равноправие между точками и прямыми. Теперь имеет место аналогичное равноправие между точками и плоскостями проективного пространства, выражающееся в следующем «*принципе двойственности*». Если верно какое-нибудь предложение, касающееся точек и плоскостей проективного пространства и тех или иных соотношений инцидентности между ними, то, заменяя в данном предложении (и его доказательстве) слово «точка» словом «плоскость» и сохраняя «инцидентность», мы получим формулировку (и доказательство) двойственного предложения.

Мы рассматривали сначала равенство (1) как уравнение, которому удовлетворяют все точки $(x_1:x_2:x_3:x_4)$, инцидентные плоскости $\{u_1:u_2:u_3:u_4\}$, координаты которой, т. е. коэффициенты u_1, u_2, u_3, u_4 в уравнении (1), считались данными. Считая, наоборот, данной точку $M=(x_1:x_2:x_3:x_4)$, мы можем рассматривать равенство (1) как уравнение, которому удовлетворяют координаты всех плоскостей $\{u_1:u_2:u_3:u_4\}$, инцидентных данной точке $M=(x_1:x_2:x_3:x_4)$, т. е. как уравнение связки плоскостей с центром $(x_1:x_2:x_3:x_4)$ в трехмерном проективном пространстве.

Мы давно привыкли к понятию линейной комбинации двух прямых на плоскости, двух плоскостей в пространстве. Если две плоскости

[1]) См. сноску на стр. 668—669.

α и β заданы в проективном пространстве какими-нибудь четверками их координат a_1, a_2, a_3, a_4 и b_1, b_2, b_3, b_4, то всякая плоскость, четверка координат u_1, u_2, u_3, u_4 которой является линейной комбинацией двух четверок a_1, a_2, a_3, a_4 и b_1, b_2, b_3, b_4, называется *линейной комбинацией двух плоскостей* α *и* β [1]).

Аналогично, если две точки P и Q заданы в проективном пространстве какими-нибудь четверками своих координат $P=(p_1:p_2:p_3:p_4)$ и $Q=(q_1:q_2:q_3:q_4)$, то всякая точка M, четверка координат которой является линейной комбинацией четверок p_1, p_2, p_3, p_4 и q_1, q_2, q_3, q_4, называется *линейной комбинацией точек* P *и* Q.

В арифметическом проективном пространстве прямую линию, рассматриваемую как множество ее точек, можно определить двумя способами, эквивалентность которых мы сейчас докажем: во-первых, *прямая* есть пересечение двух различных плоскостей, во-вторых, *прямая* есть множество точек $X=(x_1:x_2:x_3:x_4)$, являющихся линейными комбинациями двух заданных точек $P=(p_1:p_2:p_3:p_4)$ и $Q=(q_1:q_2:q_3:q_4)$.

Если считать, что арифметическое проективное пространство P поставлено в естественное взаимно однозначное соответствие со связкой O четырехмерного аффинного пространства, то первое определение выражает тот факт, что пересечение любых двух различных гиперплоскостей связки есть плоскость той же связки, тогда как второе определение означает, что любая плоскость связки состоит из лучей связки, являющихся линейными комбинациями двух каких-нибудь определенных лучей, лежащих в данной плоскости. Отсюда и следует эквивалентность двух данных определений прямой в проективном пространстве. Однако легко доказать эту эквивалентность и непосредственным простым вычислением, что мы сейчас и сделаем.

Пусть прямая d дана как пересечение двух плоскостей $\{a_1:a_2:a_3:a_4\}$ и $\{b_1:b_2:b_3:b_4\}$, т. е. как множество всех точек $(x_1:x_2:x_3:x_4)$, где x_1, x_2, x_3, x_4 есть решение системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0,\\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=0.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Так как плоскости $\{a_1:a_2:a_3:a_4\}$ и $\{b_1:b_2:b_3:b_4\}$ различны, то ранг системы (2) равен двум, следовательно, все ее решения x_1, x_2, x_3, x_4 суть линейные комбинации двух каких-нибудь независимых решений p_1, p_2, p_3, p_4 и q_1, q_2, q_3, q_4 — все точки прямой d суть линейные комбинации двух точек $P=(p_1:p_2:p_3:p_4)$ и $Q=(q_1:q_2:q_3:q_4)$. Обратно, рассмотрим множество всех точек $(x_1:x_2:x_3:x_4)$, являющихся

[1]) Нам давно известно, что в обыкновенном аффинном трехмерном пространстве любые две пересекающиеся плоскости α и β определяют собственный пучок плоскостей, состоящий из всех плоскостей, являющихся линейными комбинациями плоскостей α и β.

линейными комбинациями двух каких-нибудь данных точек $P=(p_1:p_2:p_3:p_4)$ и $Q=(q_1:q_2:q_3:q_4)$. Тогда для всех этих точек $(x_1:x_2:x_3:x_4)$ имеем параметрическое представление

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= p_1\lambda + q_1\mu, \\ x_2 &= p_2\lambda + q_2\mu, \\ x_3 &= p_3\lambda + q_3\mu, \\ x_4 &= p_4\lambda + q_4\mu, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

причем λ и μ пробегают всевозможные числовые значения, кроме запрещенной пары значений $\lambda=\mu=0$. Точки P и Q различны, значит, четверки их координат не пропорциональны между собою и без ограничения общности можно предположить, что, например,

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда из первых двух равенств (3) мы можем λ и μ однозначно выразить через x_1 и x_2; подставляя полученные выражения λ и μ в третье и четвертое равенства, получаем (очевидно, независимую) систему уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 - x_3 &= 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 - x_4 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

которой удовлетворяет то же множество четверок x_1, x_2, x_3, x_4, что и системе (3).

Эквивалентность двух данных определений прямой в проективном пространстве доказана.

Систему уравнений (3) естественно назвать *параметрическим представлением* или *параметрическим уравнением прямой* в проективном пространстве.

Замечание 1. Из сказанного следует, что в проективном пространстве всякие две различные плоскости пересекаются по прямой. Так как всякая плоскость, лежащая в проективном пространстве (и совпадающая, с точностью до переименования, со связкой некоторого трехмерного подпространства пространства R^4), есть проективная плоскость, то всякие две различные прямые, лежащие в одной плоскости проективного пространства, пересекаются в одной точке.

Наконец, прямая (2) и любая не содержащая ее плоскость

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 = 0 \tag{5}$$

пересекаются в одной точке. В самом деле, так как плоскость (5), по предположению, не содержит прямой (2), т. е. не принадлежит пучку, определенному двумя плоскостями, уравнения которых составляют систему (2), то три уравнения — (2) и (5) — линейно независимы:

из них однозначно определяется отношение $x_1:x_2:x_3:x_4$, т. е. единственная точка пересечения прямой (2) и плоскости (5).

Итак, проективная геометрия не знает понятия параллельности.

Замечание 2. Из только что доказанного вытекает, что для расположения трех различных плоскостей в проективном пространстве имеются лишь две возможности: три различные плоскости или принадлежат одному пучку (и тогда имеется единственная прямая, им всем инцидентная, — ось пучка), или же три плоскости независимы между собою (тогда имеется единственная точка, инцидентная этим трем плоскостям). Двойственная теорема гласит: всякие три различные точки проективной плоскости либо инцидентны одной прямой (т. е. коллинеарны между собою), либо определяют единственную плоскость, им всем инцидентную.

Проведение доказательства может быть предоставлено читателю.

Замечание 3. Мы считаем точку основным элементом проективной геометрии пространства, а плоскость и прямую определяем как множества точек, удовлетворяющих тем или иным уравнениям. Но можно было бы считать основным элементом плоскость; тогда точка определится как множество всех плоскостей $\{u_1:u_2:u_3:u_4\}$, удовлетворяющих данному уравнению

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

(где x_1, x_2, x_3, x_4 — данная четверка чисел), т. е. как множество плоскостей некоторой связки; прямую мы в этом случае определили бы как множество плоскостей, являющихся линейными комбинациями двух данных плоскостей, т. е. как пучок плоскостей, определенный двумя данными плоскостями.

§ 2. Проективные координаты[1]). Проективные преобразования.

1. Проективные координаты. Две аффинные системы координат $Oe_1e_2e_3e_4$ и $Oe'_1e'_2e'_3e'_4$ в связке O четырехмерного пространства называются *эквивалентными* между собою, если имеется такое $\lambda \neq 0$, что

$$e'_1 = \lambda e_1,\ e'_2 = \lambda e_2,\ e'_3 = \lambda e_3,\ e'_4 = \lambda e_4.$$

Относительно двух эквивалентных координатных систем всякий луч связки (всякая точка проективного пространства) имеет одни и те же четверки координат.

Как и в случае связки в трехмерном пространстве, класс эквивалентных между собою аффинных координатных систем в связке O

[1]) Этот параграф, по существу, является сокращенным пересказом § 5 главы XXI с незначительными и очевидными изменениями (вызванными изменением числа измерений рассматриваемых пространств).

пространства R^4 называется *системой проективных координат* в связке O.

Четверками координат любого луча m (любой гиперплоскости α) в связке относительно данной системы проективных координат являются, по определению, четверки координат этого луча (этой гиперплоскости) относительно любой аффинной системы координат (в связке O), определяющей данную проективную координатную систему. Переименовав связку в проективное пространство и повторяя рассуждения § 5 главы XXI, убеждаемся в том, что каждая проективная координатная система в проективном пространстве P^3 задается пятью точками, из которых никакие четыре не лежат в одной плоскости: четырьмя вершинами

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4$$

координатного тетраэдра и пятой «единичной» точкой E. Эти пять точек называются *фундаментальными точками* данной координатной системы.

В арифметическом проективном пространстве имеется привилегированная система координат, определенная точками

$$X_1=(1:0:0:0),\ X_2=(0:1:0:0),\ X_3=(0:0:1:0),\ X_4=(0:0:0:1),$$
$$E=(1:1:1:1).$$

Относительно этой «привилегированной», или «однородной», системы координат четверками координат любой точки арифметического проективного пространства как раз и служат те числовые четверки, классом которых и является, по определению, данная точка $M=(x_1:x_2:x_3:x_4)$.

Если наряду с исходной «привилегированной», или «однородной», системой координат в арифметическом пространстве дана («новая») проективная система координат $X_1'X_2'X_3'X_4'E'$ какими-нибудь четверками однородных координат своих фундаментальных точек:

$$\left.\begin{aligned} X_1' &= (c_{11}:c_{21}:c_{31}:c_{41}),\\ X_2' &= (c_{12}:c_{22}:c_{32}:c_{42}),\\ X_3' &= (c_{13}:c_{23}:c_{33}:c_{43}),\\ X_4' &= (c_{14}:c_{24}:c_{34}:c_{44}),\\ E' &= (\varepsilon_1:\varepsilon_2:\varepsilon_3:\varepsilon_4), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

то, предварительно умножив, если нужно, каждую из четверок

$$\begin{matrix} c_{11}, & c_{21}, & c_{31}, & c_{41},\\ c_{12}, & c_{22}, & c_{32}, & c_{42},\\ c_{13}, & c_{23}, & c_{33}, & c_{43},\\ c_{14}, & c_{24}, & c_{34}, & c_{44} \end{matrix}$$

на надлежаще подобранные числовые множители λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, всегда можно предположить, что пять четверок (1) являются согласованными между собою в смысле векторного равенства

$$\{c_{11}, c_{21}, c_{31}, c_{41}\} + \{c_{12}, c_{22}, c_{32}, c_{42}\} + \{c_{13}, c_{23}, c_{33}, c_{43}\} + \{c_{14}, c_{24}, c_{34}, c_{44}\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$$

(см. об этом гл. XXI, § 5).

В этом предположении однородные координаты x_1, x_2, x_3, x_4 произвольной точки M связаны с проективными координатами той же точки относительно системы координат $X_1'X_2'X_3'X_4'E'$ формулами преобразования координат:

$$\left.\begin{aligned} \lambda x_1 &= c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + c_{13}x_3' + c_{14}x_4', \\ \lambda x_2 &= c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + c_{23}x_3' + c_{24}x_4', \\ \lambda x_3 &= c_{31}x_1' + c_{32}x_2' + c_{33}x_3' + c_{34}x_4', \\ \lambda x_4 &= c_{41}x_1' + c_{42}x_2' + c_{43}x_3' + c_{44}x_4' \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

($\lambda \neq 0$ — произвольный числовой множитель[1])). Матрица коэффициентов c_{ik} в этих формулах невырождающаяся.

Как и в случае плоскости, мы можем сказать: переход от исходной («однородной») системы координат к новой системе проективных координат $X_1'X_2'X_3'X_4'E'$ задается невырождающейся матрицей порядка 4 (а не 3, как было в случае плоскости, — в этом единственная разница). Самый переход от старых координат к новым осуществляется формулами (2).

2. Проективно-аффинное пространство. До сих пор у нас не было оснований к выделению среди точек, плоскостей или прямых проективного пространства несобственных, или бесконечно удаленных. Проективное пространство, в котором одна какая-нибудь плоскость выделена и названа *«несобственной»*, называется *проективно-аффинным пространством*; точки и прямые, лежащие в несобственной плоскости, тоже называются *несобственными*. Так как каждая собственная плоскость (т. е. плоскость, отличная от несобственной) пересекается с несобственной плоскостью по прямой, а каждая собственная прямая (т. е. прямая, не лежащая в несобственной плоскости) пересекается с несобственной плоскостью по одной точке, то на каждой собственной плоскости проективно-аффинного пространства имеется одна несобственная прямая, а на каждой собственной прямой имеется одна несобственная точка. Повод для выделения в проективном пространстве его несобственных элементов тот же, как и в случае проективной плоскости. Мы вкратце повторим относящиеся сюда рассуждения.

[1]) Он поставлен для того, чтобы, имея одну какую-нибудь четверку координат точки M в одной из двух координатных систем, иметь возможность написать все координатные четверки этой точки в другой системе координат. Очевидно, λ можно перенести из левой части уравнений (2) в правую.

Пусть в четырехмерном аффинном пространстве R^4 дано трехмерное подпространство R^3 и в нем — аффинная система координат $oe_1e_2e_3$. Назовем аффинную систему координат $Oe_1e_2e_3e_4$ пространства R^4 *естественно связанной* с координатной системой $oe_1e_2e_3$ трехмерного подпространства R^3, если начало O системы $Oe_1e_2e_3e_4$ не лежит в подпространстве R^3. Первые три единичных вектора e_1, e_2, e_3 в системе $Oe_1e_2e_3e_4$ те же, что и в системе $oe_1e_2e_3$, а четвертый вектор e_4 есть вектор $e_4 = \overrightarrow{Oo}$. Очевидно, в системе координат $Oe_1e_2e_3e_4$ уравнение подпространства R^3 пространства R^4 есть

$$x_4 = 1.$$

Возьмем теперь в пространстве R^4 связку O с центром O. Если M — произвольная точка гиперплоскости R^3, координаты которой в системе $oe_1e_2e_3$ суть x, y, z, то координаты этой точки в системе $Oe_1e_2e_3e_4$ суть

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = 1.$$

Поэтому четверками координат луча $m = \overline{OM}$ связки O являются все четверки x_1, x_2, x_3, x_4, пропорциональные четверке x, y, z, 1. Все такие четверки x_1, x_2, x_3, x_4 называются *четверками однородных координат* точки M «в системе однородных координат, соответствующей аффинной координатной системе $oe_1e_2e_3$». Таким образом, однородные координаты x_1, x_2, x_3, x_4 точки M связаны с ее аффинными координатами x, y, z в системе $oe_1e_2e_3$ пропорцией

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x : y : z : 1,$$

так что аффинные координаты x, y, z выражаются через однородные по формулам:

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}. \tag{3}$$

Соответствие между точками M гиперплоскости и лучами $m = OM$ связки O называется *перспективным соответствием*. При этом соответствии каждой точке M гиперплоскости R^3, имеющей однородные координаты x_1, x_2, x_3, x_4, соответствует луч связки, имеющий те же координаты в системе $Oe_1e_2e_3e_4$.

Обратно, каждому лучу $m = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ связки, у которого четвертая координата $x_4 \neq 0$, соответствует точка M гиперплоскости R^3 с теми же координатами $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$. Однако лучам связки $m = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$, у которых $x_4 = 0$, не соответствует никакая точка M гиперплоскости R^3. Чтобы перспективное соответствие между связкой O и гиперплоскостью R^3 сделать взаимно однозначным, нужно дополнить гиперплоскость несобственными точками, которым и приписать четверки однородных координат x_1, x_2, x_3, 0. Пополненная таким образом гиперплоскость превращается в проективное пространство $P^3 = \overline{R^3}$, которое, естественно, делается ариф-

метическим, если отождествить каждую его точку M с классом четверок ее однородных координат. Таким образом, арифметическое проективное пространство естественно рассматривать как проективное пространство, происшедшее от пополнения несобственными элементами обыкновенного трехмерного аффинного пространства с заданной в нем системой аффинных координат $Oe_1e_2e_3e_4$. Несобственные точки этого пространства суть точки $(x_1:x_2:x_3:x_4)$, у которых $x_4=0$. Эти точки образуют несобственную плоскость, уравнение которой есть

$$x_4=0.$$

Каждая несобственная точка $M=(\alpha:\beta:\gamma:0)$ однозначно определяет класс коллинеарных векторов трехмерного пространства R^3, а именно всех векторов, тройка координат которых (в данной аффинной координатной системе $Oe_1e_2e_3$) суть тройка α, β, γ первых трех однородных координат точки M. Другими словами, как и на плоскости, так и в пространстве несобственные точки взаимно однозначно соответствуют различным направлениям; это «бесконечно удаленные» точки пространства, удаленные в данном направлении (точка $M=(\alpha:\beta:\gamma:0)$ удалена в бесконечность в направлении, общем всем прямым, имеющим направляющий вектор $\{\alpha, \beta, \gamma\}$).

3. Проективные преобразования. *Проективные преобразования* проективного пространства определяются совершенно так же, как проективные преобразования проективной плоскости. Задать в проективном пространстве проективное преобразование — значит задать, наряду с исходной координатной системой (например, однородной системой координат арифметического пространства), некоторую новую систему проективных координат; определяемое этим преобразование состоит в том, что каждой точке M пространства ставится в соответствие точка, имеющая в новой координатной системе те самые координаты, которые точка M имела в исходной системе координат.

Замечание 1. Совершенно так же определяются и проективные отображения одного проективного пространства на другое.

Из определения проективного преобразования следует (так же как в случае плоскости), что проективное преобразование можно определить как такое преобразование, которое ставит в соответствие каждой точке $M=(x_1:x_2:x_3:x_4)$ арифметического проективного пространства точку M', однородные координаты которой суть [1])

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \lambda\,(c_{11}x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3+c_{14}x_4),\\ x_2' &= \lambda\,(c_{21}x_1+c_{22}x_2+c_{23}x_3+c_{24}x_4),\\ x_3' &= \lambda\,(c_{31}x_1+c_{32}x_2+c_{33}x_3+c_{34}x_4),\\ x_4' &= \lambda\,(c_{41}x_1+c_{42}x_2+c_{43}x_3+c_{44}x_4). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

[1]) Множитель λ позволяет (как и в случае формул преобразования координат (2)) по одной какой-нибудь четверке координат x_1, x_2, x_3, x_4 точки M найти все четверки координат точки M'.

При этом матрица коэффициентов C есть невырождающаяся матрица. Поэтому задать проективное преобразование проективного пространства — значит задать невырождающуюся матрицу четвертого порядка [1]).

Совершенно так же, как теорему 4 главы XXI, мы теперь доказываем основную теорему о проективных преобразованиях пространства, а именно следующее предложение.

Теорема 1. *Пусть* Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, E *и* $Y_1', Y_2', Y_3', Y_4', E'$ *— две пятерки точек проективного пространства, удовлетворяющие тому условию, что никакие четыре точки, принадлежащие одной из этих двух пятерок, не компланарны, т. е. не лежат в одной и той же плоскости. Тогда существует одно-единственное проективное преобразование пространства* P^3, *переводящее первую пятерку точек во вторую, т. е. переводящее точки* Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, E *соответственно в* $Y_1', Y_2', Y_3', Y_4', E'$; *это преобразование ставит в соответствие каждой точке* M *пространства* P^3 *ту точку* M', *которая в проективной системе координат* $Y_1'Y_2'Y_3'Y_4'E'$ *имеет те самые координаты, которые точка* M *имела в системе* $Y_1Y_2Y_3Y_4E$.

Из этой теоремы вытекают следствия, аналогичные следствиям теоремы 4 главы XXI (см. в главе XXI замечание 3 на стр. 604), в частности утверждение, что посредством проективного преобразования пространства можно (и притом бесконечным числом способов) перевести любую данную плоскость π в любую другую π'. При этом преобразовании плоскость π проективно отображается на плоскость π'. Можно, в частности, легко написать и формулы, аналогичные формулам, данным на стр. 604, по которым любую координатную плоскость можно перевести в любую другую.

Из определения проективного преобразования следует, что произведение двух проективных преобразований пространства снова является проективным преобразованием. Так как преобразование, обратное к проективному, очевидно, также является проективным, то из сказанного вытекает основной факт.

Теорема 2. *Проективные преобразования проективного пространства образуют группу* (*подгруппу в группе всех преобразований пространства*).

Впрочем, теорема 2 легко выводится непосредственно из определения проективных преобразований посредством матриц: если проективное преобразование $\mathscr{C}$ задается матрицей C, то обратное преобразование $\mathscr{C}^{-1}$ задается матрицей C^{-1}; если преобразования

[1]) Заменяя в (4) четверку x_1, x_2, x_3, x_4 любой пропорциональной ей четверкой kx_1, kx_2, kx_3, kx_4, видим, что x_1', x_2', x_3', x_4' также умножатся на k. Поэтому точка M', координаты которой определяются формулами (4), зависит действительно лишь от точки M и матрицы C, определяющей само преобразование, и не зависит от выбора той или иной четверки координат x_1, x_2, x_3, x_4 точки M.

$\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ задаются соответственно матрицами C_1 и C_2, то произведение этих преобразований задается произведением их матриц.

Непосредственно переносится на пространство и все сказанное в главе XXI, § 6, п. 4, о проективно-аффинных преобразованиях; с оговорками, аналогичными тем, которые были сделаны на стр. 608 по поводу теоремы 6 главы XXI, мы можем теперь сказать:

Аффинные преобразования суть проективные преобразования, при которых несобственная плоскость отображается на себя.

Наконец, и для пространства имеют силу формулы, аналогичные формулам (8) на стр. 608, дающие запись (в аффинных координатах) образов собственных точек пространства при проективном преобразовании его, а именно:

$$x' = \frac{c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + c_{14}}{c_{41}x + c_{42}y + c_{43}z + c_{44}},$$

$$y' = \frac{c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + c_{24}}{c_{41}x + c_{42}y + c_{43}z + c_{44}},$$

$$z' = \frac{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + c_{34}}{c_{41}x + c_{42}y + c_{43}z + c_{44}}.$$

§ 3. Понятие об n-мерием проективном пространстве

Определение n-мерного проективного пространства P^n для любого n совершенно аналогично определению пространства P^3; по существу, n-мерное проективное пространство есть связка в $(n+1)$-мерном аффинном пространстве R^{n+1}, т. е. совокупность всех прямых («лучей»), а также плоскостей всевозможных размерностей $k \leqslant n$ пространства R^{n+1}, проходящих через данную точку O, причем лучи связки переименовываются в точки пространства P^n, двумерные плоскости связки — в прямые пространства P^n, вообще, k-мерные плоскости связки, $k \leqslant n$, переименовываются в $(k-1)$-мерные плоскости проективного пространства P^n. Система аффинных, а затем и проективных координат в связке O пространства R^{n+1} определяется, как выше при $n = 3$. Введение в связке аффинной системы координат позволяет установить взаимно однозначное соответствие между лучами связки и классами пропорциональных между собою последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ из $n+1$ чисел, что автоматически приводит к понятию n-мерного арифметического проективного пространства, точками которого являются сами эти числовые классы $(x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1})$. Гиперплоскости (т. е. $(n-1)$-мерные плоскости) в n-мерном проективном пространстве определяются каким-либо линейным однородным уравнением

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \ldots + u_{n+1}x_{n+1} = 0 \qquad (1)$$

относительно однородных координат $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$; множество точек $M = (x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1})$, этому уравнению удовлетворяющих, и

образует гиперплоскость, определенную данным уравнением (1). Коэффициенты $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ произвольного уравнения (1) данной плоскости определены с точностью до общего числового множителя, эти коэффициенты называются *координатами данной гиперплоскости*. Системы, состоящие из r линейно независимых однородных уравнений вида (1), определяют $(n-r)$-мерные плоскости пространства P^n. Общая теория линейных однородных уравнений, изложенная в главе XII, § 8 без труда приводит и к параметрическому представлению k-мерной плоскости любого числа измерений $k=1, 2, \ldots, n-1$ в n-мерном проективном пространстве P^n.

Определение систем проективных координат и проективных преобразований n-мерного проективного пространства совершенно аналогично соответствующим определениям в частном случае $n=3$ и может быть предоставлено читателю.

Плоскость $x_{n+1}=0$ в арифметическом проективном пространстве P^{n+1} выделяется в качестве *несобственной;* ее точки называются *несобственными точками* соответствующего «проективно-аффинного» пространства.

Выделение несобственных точек и несобственной гиперплоскости имеет и в общем случае тот же смысл, как и при $n=3$: оно позволяет рассматривать проективное пространство $P^n=\overline{R}^n$ как результат пополнения аффинного пространства R^n несобственными точками.

Полное перенесение со строгими доказательствами всего материала, изложенного в §§ 1 и 2 настоящей главы, на общий случай n-мерного проективного пространства может быть рекомендовано читателю как весьма полезное упражнение.

§ 4. Поверхности второго порядка в проективном пространстве. Теорема единственности

Алгебраической поверхностью в проективном пространстве называется множество точек, задаваемое в какой-либо проективной системе координат уравнением

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)=0, \tag{I}$$

где $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — однородный многочлен (форма) от переменных x_1, x_2, x_3, x_4.

При переходе к другой системе проективных координат x_1', x_2', x_3', x_4' координаты x_1, x_2, x_3, x_4 испытывают однородное линейное преобразование с невырождающейся матрицей C, тождественно преобразующее форму $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ в форму $\Phi'(x_1', x_2', x_3', x_4')$ той же степени, что и форма $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$; степень уравнения (I), задающего данную поверхность, не меняется при переходе к другой системе координат, она называется *порядком* данной *поверхности*.

Мы будем рассматривать лишь поверхности второго порядка и в соответствии с этим будем предполагать, что левая часть уравнения (I) есть квадратичная форма, и уравнение поверхности будет иметь вид

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 = 0. \quad (1)$$

Как всегда, билинейную форму, полярную к форме $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, обозначаем через $\Psi(x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2, y_3, y_4)$ или, сокращенно, через $\Psi(x, y) \equiv \sum_{i,k=1}^{4} a_{ik}x_iy_k$.

Мы будем предполагать, что проективное пространство P^3 есть результат пополнения несобственными точками аффинного трехмерного пространства R^3 с выбранной в нем аффинной системой координат $o\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, порождающей раз навсегда заданную систему однородных координат. В соответствии с этим будем писать $P^3 = \bar{R}^3$. Если не оговорено противное, будем предполагать, что уравнения рассматриваемых поверхностей заданы именно в этой однородной системе координат. Это не помешает нам, разумеется, считая эту систему координат исходной, привлекать произвольные другие проективные системы координат.

Дальнейшие рассуждения идут по пути, аналогичному тому, по которому мы шли в § 1 предыдущей главы.

Множество X собственных точек поверхности (1) совпадает с множеством точек аффинного пространства R^3, координаты которых в системе $o\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ удовлетворяют уравнению

$$F(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \quad (2)$$

Множество X пусто в том и только в том случае, когда $a_{44} \neq 0$, а все остальные коэффициенты a_{ik} равны нулю. В этом случае уравнение (1) превращается в уравнение

$$a_{44}x_4^2 = 0 \qquad (1_\infty)$$

дважды взятой несобственной плоскости.

Итак:

Теорема 3_1. *Если поверхность* (1) *состоит из одних несобственных точек, то уравнение* (1) *необходимо имеет вид* (1_∞) *и определяемая этим уравнением поверхность есть дважды взятая несобственная плоскость.*

Переходим ко второму случаю: пусть все несобственные точки пространства принадлежат поверхности (1), и пусть эта поверхность, кроме того, содержит по крайней мере одну собственную точку. Тогда по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13},

a_{23}, a_{33}, a_{14}, a_{24}, a_{34} отличен от нуля. По предположению, всякая несобственная точка $(x_1:x_2:x_3:0)$ удовлетворяет уравнению (1), так что равенство

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ 0) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

является при любых x_1, x_2, x_3 числовым тождеством. Поэтому в рассматриваемом случае

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$$

и уравнение (1) имеет вид

$$x_4(2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44}x_4) = 0; \qquad (1'_\infty)$$

наша поверхность распадается на пару плоскостей, из которых одна есть несобственная плоскость $x_4 = 0$, а другая имеет уравнение

$$2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44}x_4 = 0,$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов a_{14}, a_{24}, a_{34} отличен от нуля и которое поэтому определяет некоторую собственную плоскость.

Итак:

Теорема 3_2. *Если поверхность* (1) *содержит всю несобственную плоскость, но не совпадает с нею, то она распадается на пару плоскостей, из которых одна есть несобственная, а другая — собственная плоскость. Уравнение* (1) *в этом случае имеет вид* $(1'_\infty)$.

Наконец, если поверхность (1) не содержит несобственной плоскости, то в ее уравнении по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} отличен от нуля. Тогда уравнение (2) определяет в аффинном пространстве R^3 поверхность второго порядка, совпадающую с множеством X всех собственных точек поверхности (1).

Эта последняя получается пополнением поверхности (2) всеми несобственными точками $(x_1:x_2:x_3:0)$, удовлетворяющими уравнению (1), переходящему при $x_4 = 0$ в уравнение

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0. \quad (3)$$

Поэтому несобственные точки поверхности (1) суть не что иное, как несобственные точки, удаленные в бесконечность в направлениях, асимптотических для поверхности (2). На плоскости $x_4 = 0$ эти точки образуют кривую второго порядка, определяемую уравнением (3) и являющуюся пересечением несобственной плоскости с конусом асимптотических направлений поверхности (1). Мы вернемся к этому в § 8.

Совершенно так же, как в случае кривых, мы выведем из доказанных результатов следующую теорему единственности для поверхностей второго порядка.

Теорема 4 (теорема единственности). *Если два уравнения*

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 = 0 \quad (1)$$

и

$$\Phi'(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv a'_{11}x_1^2 + 2a'_{12}x_1x_2 + a'_{22}x_2^2 + 2a'_{13}x_1x_3 + 2a'_{23}x_2x_3 + a'_{33}x_3^2 + 2a'_{14}x_1x_4 + 2a'_{24}x_2x_4 + 2a'_{34}x_3x_4 + a'_{44}x_4^2 = 0 \quad (1')$$

определяют одну и ту же поверхность $\overline{\Gamma}$ *второго порядка в проективном пространстве* $P^3 = \overline{R}^3$, *то коэффициенты в обоих уравнениях* (1) *и* (1′) *соответственно пропорциональны между собою.*

Доказательство, как и доказательство аналогичной теоремы для кривых, данное в § 1 предыдущей главы, состоит в разборе трех возможных случаев.

1° Все точки поверхности $\overline{\Gamma}$ несобственные. Тогда уравнения (1) и (1′) имеют вид $a_{44}x_4^2 = 0$, соответственно $a'_{44}x_4^2 = 0$, и утверждение доказано.

2° Поверхность $\overline{\Gamma}$ содержит несобственную плоскость, но не совпадает с нею.

Тогда уравнения (1) и (1′) имеют вид

$$x_4(2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44}x_4) = 0,$$

соответственно

$$x_4(2a'_{14}x_1 + 2a'_{24}x_2 + 2a'_{34}x_3 + a'_{44}x_4) = 0.$$

Тогда поверхность $\overline{\Gamma}$ распадается на пару плоскостей, из которых одна — несобственная плоскость $x_4 = 0$, а другая — собственная плоскость, определяемая любым из двух уравнений

$$2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44}x_4 = 0,$$
$$2a'_{14}x_1 + 2a'_{24}x_2 + 2a'_{34}x_3 + a'_{44}x_4 = 0.$$

Поэтому соответствующие коэффициенты в этих двух уравнениях пропорциональны; так как остальные коэффициенты в уравнениях (1) и (1′) равны нулю, то утверждение теоремы единственности доказано и в рассматриваемом случае.

3° Остается последний случай: поверхность $\overline{\Gamma}$ не содержит несобственной плоскости. Тогда множество X собственных точек поверхности $\overline{\Gamma}$ определяется в аффинной координатной системе $oe_1e_2e_3$ из

уравнений

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+ \\ +2a_{34}z+a_{44}=0 \quad (2)$$

и

$$a'_{11}x^2+2a'_{12}xy+a'_{22}y^2+2a'_{13}xz+2a'_{23}yz+a'_{33}z^2+2a'_{14}x+2a'_{24}y+ \\ +2a'_{34}z+a'_{44}=0. \quad (2')$$

Каждое из этих уравнений определяет в пространстве R^3 одну и ту же поверхность второго порядка. Поэтому по теореме 2 главы XX соответственные коэффициенты в уравнениях (2) и (2′), а значит, и в уравнениях (1) и (1′) пропорциональны.

§ 5. Пересечение поверхности второго порядка с плоскостью и с прямой. Касательные прямые. Касательная плоскость. Прямолинейные образующие

Мы видели в предыдущем параграфе, что поверхность второго порядка

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0 \quad (1)$$

или содержит несобственную плоскость, или пересекается с нею по некоторой кривой второго порядка.

Это частный случай следующего общего предложения.

Теорема 5. *В проективном пространстве произвольно данная плоскость либо пересекается с данной поверхностью второго порядка по кривой второго порядка (действительной, мнимой, быть может, распадающейся), либо целиком содержится в данной поверхности.*

Доказательство. Сделаем предварительно такое проективное преобразование $\mathscr{C}$, при котором данная плоскость α перейдет в какую-нибудь координатную плоскость α', например в плоскость[1])

$$x_3=0.$$

Данная поверхность Γ при этом перейдет в некоторую поверхность Γ'.

Пусть уравнение поверхности Γ' есть

$$\Phi'(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=a'_{11}x_1^2+2a'_{12}x_1x_2+a'_{22}x_2^2+2a'_{13}x_1x_3+2a'_{23}x_2x_3+ \\ +2a'_{14}x_1x_4+2a'_{24}x_2x_4+2a'_{34}x_3x_4+a'_{44}x_4^2=0. \quad (1')$$

Решаем его совместно с уравнением $x_3=0$ плоскости α'. Получаем в координатной плоскости $x_3=0$ (т. е. в плоскости $o\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$) уравнение

$$a'_{11}x_1^2+2a'_{12}x_1x_2+a'_{22}x_2^2+2a'_{14}x_1x_4+2a'_{24}x_2x_4+a'_{44}x_4^2=0. \quad (1'_0)$$

---

[1]) Можно было бы взять, конечно, и плоскость $x_4=0$ и тогда применить рассуждения предыдущего параграфа.

Если не все коэффициенты в этом уравнении равны нулю, то мы имеем уравнение кривой второго порядка, которая и является пересечением поверхности $\overline{\Gamma'}$ с плоскостью α'. При проективном преобразовании $\mathscr{C}^{-1}$, обратном к сделанному преобразованию $\mathscr{C}$, поверхность $\overline{\Gamma'}$ перейдет в $\overline{\Gamma}$, плоскость α' — в плоскость α, а кривая их пересечения $\overline{\Gamma'_0}$ — в некоторую кривую второго порядка $\overline{\Gamma_0}$, являющуюся пересечением поверхности $\overline{\Gamma}$ с плоскостью α. Пусть теперь все коэффициенты a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_{14}, a'_{24}, a'_{44} в уравнении $(1'_0)$ равны нулю. Тогда

$$\Phi'(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2a'_{13}x_1x_3 + 2a'_{23}x_2x_3 + a'_{33}x_3^2 + 2a'_{34}x_3x_4 = \\ = x_3(2a'_{13}x_1 + 2a'_{23}x_2 + a'_{33}x_3 + 2a'_{34}x_4)$$

и поверхность $\overline{\Gamma'}$ есть пара плоскостей $x_3 = 0$ и $2a'_{13}x_1 + 2a'_{23}x_2 + a'_{33}x_3 + 2a'_{34}x_4 = 0$, одной из которых является плоскость $x_3 = 0$, т. е. наша плоскость α'. Тогда плоскость α входит в состав поверхности (1). Теорема доказана.

Теорема 6. *В проективном пространстве P^3 произвольная данная прямая d либо пересекается с данной поверхностью $\overline{\Gamma}$ второго порядка в двух точках — различных (действительных или мнимых) или совпадающих (действительных) — или же целиком содержится в данной поверхности.*

Доказательство. Пусть уравнение поверхности $\overline{\Gamma}$ есть

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \tag{1}$$

а параметрическое уравнение нашей прямой есть

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= p_1\lambda + q_1\mu, \\ x_2 &= p_2\lambda + q_2\mu, \\ x_3 &= p_3\lambda + q_3\mu, \\ x_4 &= p_4\lambda + q_4\mu. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Решаем совместно (2) и (1), т. е. подставляем (2) в (1). Получаем уравнение второй степени относительно λ, μ, а именно:

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 = 0, \tag{3}$$

где, как легко видеть,

$$A = \Phi(p_1, p_2, p_3, p_4),$$
$$B = \Psi(p_1, p_2, p_3, p_4; q_1, q_2, q_3, q_4),$$
$$C = \Phi(q_1, q_2, q_3, q_4).$$

Если хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля, то уравненне (3) есть уравнение второй степени; из него получается

два значения (действительных, мнимых или совпадающих) для отношения $\mu:\lambda$, которые и определяют, будучи подставлены в (2), две точки пересечения нашей прямой с поверхностью (1). Если все три коэффициента уравнения (3) суть нули, то условие для того, чтобы точка данной прямой содержалась в поверхности (1), оказывается выполненным тождественно, и вся прямая содержится в данной поверхности. Такая прямая называется *прямолинейной образующей поверхности.*

Замечание 1. Каждый из случаев расположения прямой d относительно поверхности Γ сохраняется при проективном преобразовании. Это значит следующее. Пусть при проективном преобразовании $\mathcal{A}$ поверхность Γ и прямая d переходят соответственно в поверхность Γ' и прямую d'.

Если прямая d пересекается с поверхностью Γ в двух различных (действительных или мнимых), либо в двух совпадающих точках, либо целиком содержится в поверхности Γ, то таково же расположение прямой d' относительно поверхности Γ'. Доказательство можно предоставить читателю.

Посмотрим, когда прямая (2) пересекается с поверхностью (1) в двух совпадающих точках; такая прямая называется *касательной прямой*; обе совпавшие точки пересечения образуют точку касания прямой и поверхности.

Без ограничения общности можем предположить, что точка $P=(p_1:p_2:p_3:p_4)$ нашей прямой лежит на поверхности и, следовательно, является точкой касания, а точка $Q=(q_1:q_2:q_3:q_4)$ не лежит на поверхности. Тогда

$$A=\Phi(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4)=0;$$

уравнение (3) превращается в

$$(2B\lambda+C\mu)\,\mu=0.$$

Одним из корней этого уравнения является $\mu=0$, т. е. отношение $\mu:\lambda=0:1$, а второй корень есть $\mu:\lambda=-2B:C$, где $C\neq 0$. Чтобы и второй корень был нулевой, надо, чтобы было $B=0$, т. е.

$$\Psi(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4;\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4)=0. \tag{4}$$

Всякая прямая (2), удовлетворяющая условию (4), есть касательная к поверхности (1) в точке P; за Q может быть принята любая точка любой такой прямой. Обозначаем ее через $Q=(x_1:x_2:x_3:x_4)$ вместо $Q=(q_1:q_2:q_3:q_4)$; мы видим, что все точки всех касательных к поверхности (1) в точке P этой поверхности удовлетворяют уравнению

$$\Psi(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4;\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0$$

или, в развернутом виде,

$$(a_{11}p_1+a_{12}p_2+a_{13}p_3+a_{14}p_4)x_1+(a_{21}p_1+a_{22}p_2+a_{23}p_3+a_{24}p_4)x_2+$$
$$+(a_{31}p_1+a_{32}p_2+a_{33}p_3+a_{34}p_4)x_3+(a_{41}p_1+a_{42}p_2+a_{43}p_3+a_{44}p_4)x_4=0, \tag{4'}$$

т. е. заполняют плоскость, уравнением которой и является уравнение (4′). Эта плоскость называется *касательной плоскостью к поверхности* (1) в ее точке $P=(p_1:p_2:p_3:p_4)$.

Замечание 2. Из замечания 1 вытекает следующее: пусть плоскость τ есть касательная плоскость к поверхности второго порядка Γ в ее точке P. Пусть при данном проективном преобразовании пространства P^3 поверхность Γ, ее точка P и плоскость τ переходят соответственно в поверхность Γ', ее точку P' и плоскость τ'. Тогда плоскость τ' есть касательная к поверхности Γ' в точке P'.

Как и для кривых (см. гл. XXII, § 2), возникает вопрос: не может ли случиться, что всякая прямая, проходящая через точку $P=(p_1:p_2:p_3:p_4)$ поверхности (1), либо пересекает эту поверхность в двух совпадающих точках, либо целиком содержится в поверхности (1) (т. е. является ее образующей)? Очевидно, это происходит тогда и только тогда, когда уравнение (4′) удовлетворяется координатами любой точки $Q=(x_1:x_2:x_3:x_4)$ пространства, т. е. при любых значениях x_1, x_2, x_3, x_4. А это в свою очередь имеет место тогда и только тогда, когда все коэффициенты уравнения (4′) равны нулю, т. е. одновременно выполнены тождества:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}p_1+a_{12}p_2+a_{13}p_3+a_{14}p_4&=0,\\ a_{21}p_1+a_{22}p_2+a_{23}p_3+a_{24}p_4&=0,\\ a_{31}p_1+a_{32}p_2+a_{33}p_3+a_{34}p_4&=0,\\ a_{41}p_1+a_{42}p_2+a_{43}p_3+a_{44}p_4&=0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Всякая точка $P=(p_1:p_2:p_3:p_4)$, удовлетворяющая системе равенств (5), называется *особой* или *двойной точкой поверхности* (1).

Если ранг R поверхности (1) наивысший, т. е. равен 4, то детерминант системы (5) отличен от нуля, система уравнений (5) не имеет ни одного ненулевого решения. Другими словами, невырождающиеся поверхности второго порядка особых точек не имеют.

Если ранг R поверхности равен 3, то система (5) имеет (с точностью до постоянного множителя) единственное решение p_1, p_2, p_3, p_4, т. е. поверхность (1) имеет единственную особую точку P; такой точкой является вершина конической поверхности; мы к этому вернемся в § 7.

Если $R=2$, то система (5) имеет два независимых решения: p_1', p_2', p_3', p_4' и p_1'', p_2'', p_3'', p_4''; все остальные решения являются

линейными комбинациями этих двух. Все точки прямой $P'P''$, где $P'=(p_1':p_2':p_3':p_4')$ и $P''=(p_1'':p_2'':p_3'':p_4'')$, и только точки этой прямой являются особыми. Это случай поверхности, распадающейся на пару различных плоскостей; прямая пересечения этих плоскостей и является множеством особых точек поверхности.

Наконец, при $R=1$ поверхность (1) есть пара слившихся плоскостей, все ее точки особые.

Заметим, что, как и следовало ожидать, касательная плоскость к поверхности (1) в точке P этой поверхности тогда и только тогда перестает быть определенной, когда эта точка особая. В самом деле, в этом и только в этом случае все коэффициенты в уравнении (4′) касательной плоскости обращаются в нуль.

В частности, невырождающаяся поверхность во всякой своей точке имеет (единственную) касательную плоскость.

Посмотрим, какие прямые, проходящие через данную неособую точку $P=(p_1:p_2:p_3:p_4)$ поверхности (1), являются прямолинейными образующими нашей поверхности. Это те прямые, для которых все три коэффициента A, B, C в уравнении (3) равны нулю. Равенство $A=0$ не означает ничего большего, как то, что точка P лежит на поверхности (1). Равенство $B=0$ означает, как мы видели, что прямая (2) лежит в касательной плоскости в точке P к поверхности (1). Таким образом, прямолинейные образующие поверхности (1) лежат в касательной плоскости к поверхности (1). Кроме того, по самому своему определению прямолинейные образующие содержатся в поверхности (1). Другими словами, прямолинейные образующие поверхности (1), проходящие через точку P поверхности, содержатся в пересечении поверхности с касательной плоскостью к ней в точке P. Но пересечение нераспадающейся поверхности второго порядка с плоскостью есть кривая второго порядка; если эта кривая содержит прямые линии, то она сама есть пара прямых.

Итак, пересечение поверхности второго порядка с касательной плоскостью к ней в неособой точке P есть пара прямых, а именно пара прямолинейных образующих поверхности. Можно убедиться в этом и другим способом. Пусть пересечение поверхности (1) с касательной плоскостью τ в точке P есть кривая второго порядка γ. Тогда всякая прямая d, проходящая через точку P и лежащая в плоскости τ, будучи касательной к поверхности (1), пересекает эту последнюю в паре совпадающих точек, а именно точек, совпадающих с точкой P. Но эта пара совпадающих точек есть вместе с тем и пара точек пересечения прямой d с кривой γ. Таким образом, точка P есть особая точка кривой γ, и кривая γ есть распадающаяся кривая.

Обратно, если какая-нибудь плоскость θ, проходящая через неособую точку P поверхности (1), пересекается с этой поверхностью по паре прямых γ (быть может, сливающихся между собою,

но имеющих точку P своею общей точкой), то плоскость θ есть касательная плоскость к поверхности (1) в точке P. В самом деле, всякая прямая d, проходящая через точку P и лежащая в плоскости θ, пересекает распадающуюся линию γ, а значит, и поверхность (1) по паре слившихся точек, т. е. является касательной прямой к поверхности (1) в точке P.

Возьмем какие-нибудь две различные прямые d и d', лежащие в плоскости θ и проходящие через точку P. Обе эти прямые, будучи касательными к поверхности (1), лежат в касательной плоскости τ к ней в точке P; значит, плоскости τ и θ, содержа одну и ту же пару пересекающихся прямых, совпадают между собою; θ есть касательная плоскость. Итак:

Теорема 7[1]). *Касательная плоскость к поверхности второго порядка* (1) *в данной ее неособой точке P может быть определена как единственная плоскость, проходящая через точку P и пересекающаяся с поверхностью* (1) *по паре прямых d, d', содержащих точку P.*

Так как каждая прямолинейная образующая поверхности, проходящая через данную ее (неособую) точку P, лежит в касательной плоскости в точке P, то прямые d и d' и являются (единственными) проходящими через точку P прямолинейными образующими поверхности (1). Может случиться, что эти прямые сливаются между собою; это имеет место, если поверхность (1) коническая, а P — ее неособая точка.

Докажем следующее предложение.

Теорема 8. *Касательная плоскость τ к невырождающейся поверхности второго порядка $\overline{\Gamma}$ пересекает ее по паре действительных или мнимых (но всегда различных) прямых*[2]).

Доказательство. Произведем проективное преобразование, переводящее плоскость τ в плоскость $x_3=0$, а точку P — в точку $P'=(0:0:0:1)$ этой плоскости. При этом преобразовании поверхность $\overline{\Gamma}$ перейдет в некоторую поверхность $\overline{\Gamma}'$, уравнение поверхности $\overline{\Gamma}'$ пусть будет

$$\Phi'(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)\equiv a'_{11}x_1^2+2a'_{12}x_1x_2+a'_{22}x_2^2+2a'_{13}x_1x_3+$$
$$+2a'_{23}x_2x_3+a'_{33}x_3^2+2a'_{14}x_1x_4+2a'_{24}x_2x_4+2a'_{34}x_3x_4+a'_{44}x_4^2=0,$$

а касательная плоскость в точке P к поверхности $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$

[1]) Из этой теоремы следует второе доказательство приведенного в замечании 2 утверждения о том, что свойство плоскости быть касательной плоскостью к данной поверхности второго порядка s сохраняется при проективных преобразованиях пространства.

[2]) Из теоремы 8 следует, что прямолинейные образующие невырождающейся поверхности второго порядка, проходящие через данную ее точку, суть всегда две различные (действительные или мнимые) прямые.

В §§ 7, 8 мы разберем, когда эти прямые являются действительными, когда — мнимыми.

перейдет в касательную плоскость к поверхности $\bar{\Gamma}'$ в точке $P'=(0:0:0:1)$. Уравнение плоскости τ' будет

$$\Psi(0,\ 0,\ 0,\ 1;\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0,$$

т. е.

$$a'_{14}x_1+a'_{24}x_2+a'_{34}x_3+a'_{44}x_4=0. \tag{6}$$

Но эта плоскость есть плоскость $x_3=0$; следовательно, в уравнении (6) коэффициенты a'_{14}, a'_{24}, a'_{44} при x_1, x_2, x_4 суть нули, а $a'_{34}\neq 0$. Значит, уравнение $\Phi'(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0$ имеет вид

$$a'_{11}x_1^2+2a'_{12}x_1x_2+a'_{22}x_2^2+2a'_{13}x_1x_3+2a'_{23}x_2x_3+a'_{33}x_3^2+2a'_{34}x_3x_4=0.$$

Решая его совместно с уравнением $x_3=0$ касательной плоскости, получаем уравнение кривой пересечения $\bar{\Gamma}'_0$ в виде

$$x_3=0,\quad a'_{11}x_1^2+2a'_{12}x_1x_2+a'_{22}x_2^2=0,$$

а это есть уравнение кривой второго порядка ранга 2, т. е. распадающейся кривой [1]).

Если бы эта кривая была парой совпадающих прямых, то дискриминант

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}$$

был бы равен нулю. Но тогда дискриминант формы $\Phi'(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ был бы

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & 0 & a'_{43} & 0 \end{vmatrix} = -a'^{2}_{34}\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}=0,$$

т. е. поверхность $\bar{\Gamma}'$, а значит и $\bar{\Gamma}$, была бы вырождающейся, вопреки предположению.

§ 6. Полюсы и полярные плоскости

Полярная плоскость точки и полюс плоскости относительно невырождающейся поверхности второго порядка определяются в полной аналогии с определением поляры точки и полюса прямой относительно невырождающейся кривой второго порядка: мы определяем для данной точки $X=(x_1:x_2:x_3:x_4)$, принадлежащей или нет

[1]) В аффинных координатах $ce_1e_2e_3$ уравнение кривой $\bar{\Gamma}'_0$ есть $a'_{11}x^2+2a'_{12}xy+a'_{22}y^2=0$, $z=0$.

поверхности второго порядка

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0, \tag{1}$$

полярную плоскость как плоскость ξ с координатами

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4,\\
\xi_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4,\\
\xi_3&=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4,\\
\xi_4&=a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Если дана плоскость $\xi=\{\xi_1:\xi_2:\xi_3:\xi_4\}$, то из уравнений (2) однозначно определяется точка $X=(x_1:x_2:x_3:x_4)$, *полярной плоскостью* которой и является плоскость ξ. Единственная точка X, полярной плоскостью которой является данная плоскость, называется *полюсом* этой плоскости относительно невырождающейся поверхности (1).

Очевидно, уравнением полярной плоскости точки $P=(p_1:p_2:p_3:p_4)$ относительно поверхности (1) является уравнение

$$\Psi(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4;\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0,$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 — текущие координаты.

Аналогично теореме 8 главы XXII доказывается

Теорема 9 (теорема взаимности). *Если точка X лежит на полярной плоскости точки P, то точка P лежит на полярной плоскости точки X.*

Точка P тогда и только тогда инцидентна своей полярной плоскости, когда она лежит на поверхности (1); тогда ее полярная плоскость касается поверхности (1) в точке P.

Формулы (2), рассматриваемые сами по себе с единственным условием, чтобы матрица коэффициентов $A=(a_{ik})$ была невырождающейся (но, может быть, и несимметричной), определяют взаимно однозначное соответствие между точками $X=(x_1:x_2:x_3:x_4)$ и плоскостями $\xi=\{\xi_1:\xi_2:\xi_3:\xi_4\}$ проективного пространства. Такое соответствие называется *корреляти́вным соответствием*, определенным матрицей A. Если невырождающаяся матрица A является симметричной, то она есть матрица коэффициентов некоторой квадратичной формы $\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$, определяющей невырождающуюся поверхность второго порядка

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=0. \tag{1}$$

Тогда корреляти́вное соответствие (2) называется *полярным соответствием*, порожденным поверхностью (1): оно сопоставляет с каждой точкой X полярную плоскость ξ этой точки относительно поверхности (1).

Аналогично случаю кривых, можно всякую невырождающуюся поверхность второго порядка рассматривать не только как множество

лежащих на ней точек, но и как множество касательных к ней плоскостей. Как и в § 5 главы XXII, убеждаемся, что координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 плоскостей, касательных к данной поверхности второго порядка, удовлетворяют некоторому однородному уравнению второй степени, которое называется *тангенциальным уравнением данной поверхности*. Понятие *сопряженности двух точек* относительно поверхности второго порядка определяется так же, как аналогичное понятие для кривых; доказывается, что полярная плоскость данной точки P есть геометрическое место точек, сопряженных данной точке P относительно поверхности (1).

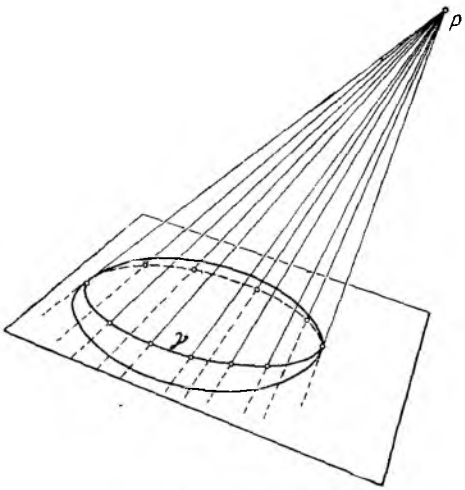


Рис. 253.

Рассуждениями, аналогичными рассуждениям § 6 главы XXII, доказывается, что диаметральная плоскость, сопряженная данному направлению $\{\alpha:\beta:\gamma\}$, есть полярная плоскость несобственной точки $(\alpha:\beta:\gamma:0)$, удаленной в бесконечность в данном направлении; центр есть полюс несобственной плоскости.

Замечание. На плоскости поляры точки P относительно кривой второго порядка есть прямая, соединяющая точки касания двух касательных, проведенных к данной кривой из точки P. Это предложение обобщается на случай поверхностей следующим образом: все касательные прямые, проведенные к данной поверхности (1) второго порядка из данной точки P (не лежащей на этой поверхности), образуют конус второго порядка (действительный или мнимый), общие точки которого с поверхностью (1) образуют кривую второго порядка γ, по которой этот конус как бы «касается» поверхности (1) (рис. 253)[1]; плоскость, в которой лежит кривая γ, и есть полярная плоскость точки P. Доказательство этого факта, равно как обобщение теории полярных плоскостей на случай вырождающихся поверхностей второго порядка, читатель может найти в «Аналитической геометрии» Б. Н. Делоне и Д. А. Райкова, том 2, § 216.

---

[1]) Если точка P лежит на поверхности (1), то конус этот сплющивается в касательную плоскость, а кривая γ стягивается в точку P.

§ 7. Проективная классификация поверхностей второго порядка

Посредством линейного преобразования переменных

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + c_{13}x_3' + c_{14}x_4', \\ x_2 &= c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + c_{23}x_3' + c_{24}x_4', \\ x_3 &= c_{31}x_1' + c_{32}x_2' + c_{33}x_3' + c_{34}x_4', \\ x_4 &= c_{41}x_1' + c_{42}x_2' + c_{43}x_3' + c_{44}x_4' \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

квадратичная форма $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ может быть, как известно (гл. XIII, § 5), тождественно преобразована к каноническому виду, т. е. к виду

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 x_1'^2 + \varepsilon_2 x_2'^2 + \varepsilon_3 x_3'^2 + \varepsilon_4 x_4'^2 && \text{для форм ранга } R=4, \\ &\varepsilon_1 x_1'^2 + \varepsilon_2 x_2'^2 + \varepsilon_3 x_3'^2 && \text{для форм ранга } R=3, \\ &\varepsilon_1 x_1'^2 + \varepsilon_2 x_2'^2 && \text{для форм ранга } R=2, \\ &\varepsilon_1 x_1'^2 && \text{для форм ранга } R=1, \end{aligned}$$

где все коэффициенты ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 равны ± 1. При этом число положительных коэффициентов в любом каноническом представлении данной формы $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ одно и то же [1]); оно называется *индексом формы* [2]) Φ.

Для форм ранга 4 индекс может принимать значения 4, 3, 2, 1, 0. Однако при умножении формы на -1 форма ранга 4 и индекса 0 превращается в форму индекса 4, форма индекса 1 превращается в форму индекса 3. Поэтому поверхность второго порядка γ, заданная в однородных координатах уравнением

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad (1)$$

где форма Φ имеет ранг 4, может быть в некоторой новой проективной системе координат задана уравнением вида

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 + \varepsilon_4 x_4^2 = 0 \qquad (2)$$

(мы опускаем штрихи у переменных), где все ε_i равны ± 1 и число положительных среди них равно или 4, или 3, или 2.

Формулы линейного преобразования $\mathscr{C}$ мы можем понимать по нашему желанию или как формулы перехода от одной проективной координатной системы к другой, или как формулы, определяющие

---

[1]) То есть не зависит от того, каким преобразованием (c) мы привели форму Φ и к какому именно каноническому виду.

[2]) Обычно — положительным индексом, что представляется, впрочем, излишним удлинением.

проективное преобразование пространства. Поэтому полученный результат мы можем сформулировать и так: всякая поверхность $\overline{\Gamma}$ второго порядка и ранга 4 может быть превращена проективным преобразованием в поверхность $\overline{\Gamma}'$, уравнение которой имеет вид (2) в первоначальной однородной координатной системе.

Так как посредством дополнительного проективного преобразования всегда можно любую из координатных плоскостей $x_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) перевести в любую другую, то без ограничения общности мы можем предположить, что в каноническом уравнении (2) поверхности $\overline{\Gamma}$ ранга 4 члены с положительными коэффициентами предшествуют членам с отрицательными. Поэтому мы имеем следующий результат:

Всякая поверхность второго порядка $\overline{\Gamma}$, имеющая ранг 4, может быть посредством проективного преобразования пространства $P^3 = \overline{R}^3$ переведена в поверхность $\overline{\Gamma}'$, уравнение которой в той же исходной системе координат имеет один из следующих видов:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0, \tag{K1}$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0, \tag{K2}$$
$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0. \tag{K3}$$

Другая формулировка того же результата: *для каждой поверхности $\overline{\Gamma}$ ранга 4 существует «каноническая» система проективных координат, в которой уравнение этой поверхности $\overline{\Gamma}$ имеет канонический вид, т. е. один из видов* (K1), (K2), (K3).

Перенося на «проективный случай» терминологию, к которой мы привыкли еще в аффинной геометрии, мы скажем, что две поверхности *проективно эквивалентны*, если посредством проективного преобразования пространства одна из этих поверхностей может быть переведена в другую. То же определение может быть, очевидно, сформулировано и так: две поверхности $\overline{\Gamma}_1$ и $\overline{\Gamma}_2$ проективно эквивалентны, если существуют две проективные системы координат I и II такие, что уравнение поверхности $\overline{\Gamma}_1$ в системе I таково же, как уравнение поверхности $\overline{\Gamma}_2$ в системе II.

Повторяя те же рассуждения для поверхностей ранга 3, мы получаем следующий результат:

Всякая поверхность второго порядка $\overline{\Gamma}$, имеющая ранг 3, может быть проективным преобразованием переведена в поверхность $\overline{\Gamma}'$, имеющую (в исходной системе координат) уравнение одного из двух следующих видов:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \tag{K4}$$
$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \tag{K5}$$

или: *каждая поверхность* Γ *ранга* 3 *в некоторой проективной системе координат имеет «каноническое» уравнение вида* (К4) *или* (К5).

Далее: *всякая поверхность ранга* 2 *проективным преобразованием может быть переведена в поверхность, имеющую уравнение одного из видов*:

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \tag{К6}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0. \tag{К7}$$

И наконец:

Всякая поверхность ранга 1 *может быть проективным преобразованием переведена в поверхность*

$$x_1^2 = 0. \tag{К8}$$

Итак, *каждая поверхность второго порядка попадает в один из восьми классов поверхностей* К1—К8, *каждый из которых определен соответствующим уравнением* (*т. е. состоит из поверхностей, проективно эквивалентных поверхности, задаваемой в исходной системе координат этим уравнением*). Из самого этого определения классов К1—К8 следует, что все поверхности, принадлежащие к одному из этих классов, *проективно эквивалентны* между собою.

Поэтому для того, чтобы показать, что полученные восемь классов образуют полную проективную классификацию вещественных поверхностей второго порядка, надо лишь убедиться в том, что всякие две поверхности, принадлежащие к разным классам, проективно различны (т. е. проективно не эквивалентны) между собою.

Совершенно так же, как в заключительном замечании предыдущей главы (стр. 666), доказывается

Теорема 10. *Если* $\Phi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ *и* $\Phi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ *суть уравнения в проективной системе координат* I *двух проективно эквивалентных поверхностей второго порядка, то формы* Φ_1 *и* Φ_2 *имеют один и тот же ранг и одну и ту же абсолютную величину сигнатуры.*

Из этой теоремы, прежде всего, следует, что две поверхности различных рангов заведомо не могут быть проективно эквивалентны. Далее, если невырождающаяся поверхность Γ принадлежит к классу К1, то ее индекс, т. е. индекс квадратичной формы $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, образующей левую часть уравнения поверхности Γ, равен или 4, или 0; в этом же смысле индекс поверхности, принадлежащей к классу К2, равен 3 или 1, а индекс поверхности класса К3 всегда равен 2. Мы видим, что квадратичные формы, являющиеся левыми частями уравнений поверхностей, принадлежащих к двум различным среди классов К1—К3, всегда имеют различный индекс; поэтому никаким линейным преобразованием уравнение одной из этих

поверхностей не может быть переведено в уравнение другой — поверхности проективно различны [1]).

Из аналогичных соображений следует, что поверхности классов К4 и К5, а также классов К6 и К7 проективно различны; однако эти утверждения очевидны без всякого доказательства: поверхность класса К4 содержит единственную действительную точку, тогда как поверхность класса К5 содержит бесконечно много действительных точек. Точно так же класс К7 состоит из поверхностей, распадающихся на пару действительных различных плоскостей, а класс К6 — из поверхностей, распадающихся на пару мнимых сопряженных плоскостей. Итак, всякие две поверхности, принадлежащие к различным классам, проективно различны между собою. Посмотрим, что за поверхности содержатся в каждом из перечисленных классов. Мы только что ответили на этот вопрос в применении к классам К6, К7.

Класс К8 состоит, очевидно, из поверхностей, каждая из которых есть пара слившихся плоскостей.

Переходим к остальным классам. Для определенности и удобства предположим до конца предпринятого нами исследования, что система однородных координат, являющаяся исходной в пространстве $P^3 = \overline{R^3}$, соответствует прямоугольной системе координат $o\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ пространства R^3.

Класс К5 состоит из поверхностей, называемых *вещественными коническими поверхностями*; все поверхности этого класса проективно эквивалентны поверхности, определяемой в однородных координатах уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \qquad \text{(К5)}$$

Собственные точки этой поверхности в системе координат $o\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Это уравнение обыкновенного *вещественного круглого конуса* [2]). Поверхность

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \qquad \text{(К4)}$$

которой проективно эквивалентны все поверхности класса К4, содержит единственную действительную точку (0:0:0:1). При переходе

---

[1]) В дополнение к этому алгебраическому доказательству мы несколькими строками ниже дадим и простое, чисто геометрическое доказательство проективной неэквивалентности поверхностей классов К2 и К3; что касается поверхностей класса К1, то они состоят из одних мнимых точек и поэтому не могут быть проективно эквивалентны поверхностям классов К2 или К3.

[2]) Круглого, так как по предположению $o\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ есть прямоугольная система координат.

к неоднородным координатам в системе $oe_1e_2e_3$ уравнение (К4) переходит в уравнение мнимого конуса $x^2+y^2+z^2=0$. Поэтому все поверхности класса К4 называются *мнимыми коническими поверхностями*.

Переходим к поверхностям классов К1, К2, К3. Класс К1 состоит из поверхностей, проективно эквивалентных поверхности, задаваемой уравнением

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0 \qquad (К1)$$

или, в неоднородных координатах,

$$x^2+y^2+z^2+1=0. \qquad (I)$$

Это уравнение *мнимого эллипсоида*, в прямоугольной системе $oe_1e_2e_3$ — даже *мнимой сферы*. Поверхности класса К1 не содержат ни одной вещественной точки. Они называются *мнимыми овальными поверхностями*.

Поверхности, образующие класс К2, называются *действительными овальными поверхностями*; это поверхности, проективно эквивалентные поверхности

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0 \qquad (К2)$$

или, в неоднородных координатах, поверхности

$$x^2+y^2+z^2-1=0. \qquad (II)$$

В прямоугольной системе координат $oe_1e_2e_3$ уравнение (II) определяет обыкновенную *действительную сферу*. Итак, все поверхности класса К2 суть поверхности, проективно эквивалентные шаровой поверхности. Так как все прямолинейные образующие поверхности шара мнимые, то действительные овальные поверхности (и тем более мнимые овальные поверхности) не имеют действительных прямолинейных образующих.

Класс К3 состоит из поверхностей, проективно эквивалентных поверхности

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$$

или, в неоднородных координатах,

$$x^2+y^2-z^2-1=0. \qquad (III)$$

Это *однополостный гиперболоид*.

Так как однополостный гиперболоид имеет два семейства действительных прямолинейных образующих, то тем же свойством обладают и все поверхности, проективно эквивалентные ему, т. е. все поверхности класса К3. Отсюда следует, что поверхность класса К2 не может быть проективно эквивалентной поверхности класса

К3. Мы получили обещанное чисто геометрическое доказательство этого факта.

Замечание 1. Так как каждая действительная прямая пересекается со всякой действительной плоскостью в действительной точке, то из существования на поверхностях К3 действительных прямолинейных образующих вытекает, что каждая поверхность $\overline{\Gamma}$ этого класса имеет по крайней мере одну общую действительную точку M со всякой действительной плоскостью α. Поэтому кривая второго порядка γ, являющаяся пересечением поверхности $\overline{\Gamma}$ с плоскостью α, не может быть мнимой овальной кривой. Не может она быть и парой мнимых сопряженных прямых, так как тогда эти прямые были бы парой мнимых прямолинейных образующих поверхности $\overline{\Gamma}$, проходящих через действительную точку M, между тем как прямолинейные образующие этой поверхности, проходящей через действительную точку, суть вещественные прямые. Следовательно, поверхность $\overline{\Gamma}$ пересекается с плоскостью по действительной кривой второго порядка.

Итак: любая поверхность класса К3 пересекается со всякой действительной плоскостью по действительной кривой второго порядка, распадающейся на пару действительных прямых, лишь когда эта плоскость является касательной плоскостью к данной поверхности.

С другой стороны, легко доказать, что *для всякой овальной поверхности* $\overline{\Gamma}$ *имеется действительная плоскость* α, *пересекающаяся с поверхностью* $\overline{\Gamma}$ *по невырождающейся мнимой кривой второго порядка*. В самом деле, по такой кривой поверхность

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \pm x_4^2 = 0 \qquad (К1,2)$$

пересекается с несобственной плоскостью τ. Берем проективное преобразование $\mathcal{A}$, переводящее поверхность $\overline{\Gamma}$ в поверхность (К1,2). Это преобразование переводит несобственную плоскость τ в некоторую действительную плоскость α, с которой поверхность $\overline{\Gamma}$ пересекается по мнимой овальной кривой.

Поверхности класса К3 называются *кольцевидными*. Название объясняется тем, что всякая поверхность класса К3, будучи проективно эквивалентной однополостному гиперболоиду, целиком покрыта, как и этот последний, каждым из двух семейств своих прямолинейных образующих. Но прямая в проективном пространстве есть замкнутая линия, поэтому прямолинейные образующие однополостного гиперболоида (и всякой проективно эквивалентной ему поверхности), будучи замкнутыми линиями, и придают всей покрытой ими поверхности кольцеобразную форму — однополостный гиперболоид, пересекаясь с бесконечно удаленной плоскостью по действительному овалу, смыкается в бесконечности в кольцо.

Замечание 2. Вспомним, что ни одна точка невырождающейся (т. е. овальной или кольцевидной) поверхности не является особой точкой, тогда как на конусе имеется единственная особая точка. Если уравнение конуса записано в каноническом виде

$$x_1^2 + x_2^2 \pm x_3^2 = 0 \qquad \text{(К4,5)}$$

или, если перейти к аффинным координатам, в виде

$$x^2 + y^2 \pm z^2 = 0, \qquad \text{(АК4,5)}$$

то особой точкой является вершина конуса (К4,5), т. е. точка $(0:0:0:1)$,— ее координаты $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ [1]), очевидно, удовлетворяют уравнениям (5) из § 5.

Как мы уже упоминали, прямая пересечения пары различных плоскостей и все точки поверхности, состоящей из пары слившихся плоскостей, являются особыми; это очевидно геометрически и легко доказывается посредством проверки условий (5) § 5 в применении к каноническому уравнению распадающейся поверхности.

Замечание 3. Две образующие, проходящие через каждую отличную от вершины точку действительной конической поверхности, сливаются в одну образующую. Это вытекает из того, что именно так обстоит дело с круглым конусом $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, которому проективно эквивалентны все действительные конические поверхности. Наконец, через каждую точку распадающейся поверхности проходит бесконечное множество лежащих на этой поверхности прямых.

Замечание 4. Если через данную точку P поверхности проходят две мнимые прямолинейные образующие, что имеет место для всех точек вещественной овальной поверхности, то точка P является единственной вещественной общей точкой поверхности и ее касательной плоскости — точка P является точкой, в которой — в элементарном и наглядном смысле слова — происходит касание поверхности с ее касательной плоскостью в этой точке. Если же через точку P проходят две различные действительные прямолинейные образующие, как это имеет место в любой точке кольцевидной поверхности, то поверхность пересекает свою касательную плоскость по двум вещественным прямым — вблизи точки P поверхность имеет седловидную форму, никакой кусок кольцевидной поверхности нельзя так положить на стол, как мы кладем мячик или арбуз.

В заключение этого параграфа приведем простой алгебраический критерий, позволяющий судить, будет ли данная невырождающаяся поверхность овальной или кольцевидной. Если поверхность ранга 4

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \qquad (1)$$

[1]) Это начало координат аффинной координатной системы $ce_1e_2e_3$, в которой конус имеет уравнение (АК4,5).

есть действительная овальная поверхность, то дискриминант Δ формы $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ отрицателен.

Для кольцевидных и мнимых овальных поверхностей этот дискриминант положителен.

В самом деле, дискриминант квадратичной формы Φ при линейном преобразовании (с) переменных умножается на квадрат детерминанта преобразования и, значит, сохраняет свой знак. Так как в данном случае число переменных равно 4, т. е. четному числу, то знак дискриминанта Δ не меняется и при умножении формы Φ на любой числовой множитель. Поэтому достаточно проверить сформулированный выше критерий после приведения уравнения (1) к каноническому виду (К1), (К2) или (К3), что не представляет затруднений.

§ 8. Распределение по проективным классам поверхностей различных аффинных классов. Проективно-аффинная классификация поверхностей второго порядка

Очевидно, все мнимые эллипсоиды принадлежат классу К1 мнимых овальных поверхностей, а все действительные эллипсоиды — классу К2 действительных овальных поверхностей. Однополостные гиперболоиды, как мы только что видели, являются поверхностями класса К3; каждая поверхность второго порядка должна попасть в один из классов К1 — К8, в частности, это относится к двуполостным гиперболоидам и параболоидам. Но и (двуполостные) гиперболоиды, и параболоиды суть действительные поверхности ранга $R=4$, поэтому каждая из этих поверхностей находится в одном из классов К2 или К3.

Гиперболические параболоиды, имея действительные прямолинейные образующие, не могут находиться в классе К2, значит, они содержатся в классе К3.

Наоборот, эллиптические параболоиды и двуполостные гиперболоиды лишены действительных прямолинейных образующих, им нет места в классе К3, и они попадают в класс К2.

Итак, среди поверхностей пространства $P^3=\overline{R^3}$ все действительные эллипсоиды, все двуполостные гиперболоиды и все эллиптические параболоиды после пополнения их несобственными точками оказываются действительными овальными поверхностями, т. е. образуют класс К2.

Однополостные гиперболоиды и гиперболические параболоиды являются кольцевидными поверхностями, они заполняют собою класс К3.

Переходим к поверхностям ранга 3. В пространстве R^3 это конусы, действительные и мнимые, а также всевозможные цилиндры второго порядка. В проективном пространстве $P^3=\overline{R^3}$ все эти по-

верхности попадают в классы К4 и К5. При этом цилиндры над невырождающимися действительными кривыми второго порядка попадают в класс К5, цилиндры над мнимыми эллипсами содержатся в классе К4. Итак, в проективном пространстве все цилиндрические поверхности становятся конусами; так как все образующие цилиндра параллельны между собою, то в проективном пространстве все образующие данного цилиндра проходят через одну и ту же несобственную точку — вершину той конической поверхности, в которую, по пополнении несобственными точками, превратится наш цилиндр.

Наконец, поверхности, распадающиеся на пару плоскостей, находят в P^3 свое естественное место в классах К6, К7, К8. Однако в классах К6 и К8 содержатся, кроме того, поверхности, не представленные поверхностями второго порядка в R^3 (т. е. не получающиеся из них посредством пополнения их несобственными точками). Именно, в классе К6 имеется поверхность, распадающаяся на пару плоскостей, из которых одна собственная, а другая несобственная, в классе К8 имеется дважды взятая несобственная плоскость.

За исключением этих двух случаев, каждой поверхности второго порядка $\overline{\Gamma}$ в проективном пространстве $P^3 = \overline{R^3}$ соответствует в R^3 вполне определенная поверхность второго порядка Γ, а именно поверхность, состоящая из всех собственных точек поверхности $\overline{\Gamma}$. Для краткости мы часто будем называть поверхность Γ «аффинной поверхностью» соответствующей поверхности $\overline{\Gamma}$.

Замечание 1. Результаты, изложенные в этом параграфе, могут быть получены и простым вычислением.

Покажем, что двуполостные гиперболоиды и эллиптические параболоиды принадлежат к классу К2, а гиперболические параболоиды — к классу К3.

Для этого перейдем в уравнении двуполостного гиперболоида

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1$$

к однородным координатам; получим

$$x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 - x_3^2 = 0.$$

Проективное преобразование

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= \quad x_2, \\ x_3' &= \qquad\quad x_4, \\ x_4' &= \qquad x_3 \end{aligned}$$

переводит эту поверхность в поверхность

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0,$$

т. е. в шаровую поверхность $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Переходим к параболоидам. Их уравнения

$$2z = x^2 \pm y^2$$

при переходе к однородным координатам превращаются в

$$2x_3x_4 = x_1^2 \pm x_2^2.$$

Проективное преобразование

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3 + \frac{1}{2}x_4, \\ x_4' &= x_3 - \frac{1}{2}x_4, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1', \\ x_2 &= x_2', \\ x_3 &= \frac{1}{2}x_3' + \frac{1}{2}x_4', \\ x_4 &= x_3' - x_4', \end{aligned}$$

переводит эти поверхности в поверхности

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 = 0$ (в случае эллиптического параболоида);

$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 = 0$ (в случае гиперболического параболоида).

Первая из них — овальная, вторая — кольцевидная поверхность.

Покажем теперь непосредственным вычислением, что все цилиндры относятся к проективному классу конических поверхностей. Для гиперболического и эллиптического цилиндров

$$x^2 \pm y^2 = 1$$

это сразу следует из того, что их уравнение после перехода к однородным координатам превращается в

$$x_1^2 + x_2^2 - x_4^2 = 0, \tag{1}$$

соответственно в

$$x_1^2 - x_2^2 - x_4^2 = 0. \tag{2}$$

Проективное преобразование

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_4, \\ x_4' &= x_3, \end{aligned}$$

соответственно

$$\begin{aligned} x_1' &= x_4, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_1, \\ x_4' &= x_3, \end{aligned}$$

переводит поверхности (1), (2) соответственно в

$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0 \quad \text{и} \quad x_3'^2 - x_2'^2 - x_1'^2 = 0,$$

т. е. (отбрасывая штрихи и умножая второе уравнение на -1) в

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Случай цилиндра над мнимым эллипсом читатель разберет сам.

Наконец, параболический цилиндр $y^2 = 2x$ в однородных координатах получает уравнение $x_2^2 - 2x_1x_4 = 0$ или после преобразования координат

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}x_1' \quad + \frac{1}{2}x_3', \\ x_2 &= \quad x_2', \\ x_3 &= \qquad\qquad x_4', \\ x_4 &= -x_1' \quad + x_3', \end{aligned}$$

уравнение $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0$. Это уравнение конической поверхности.

Переходим к проективно-аффинной классификации, т. е. к разбиению совокупности поверхностей второго порядка в проективном пространстве $P^3 = \overline{R^3}$ на классы поверхностей, эквивалентных между собою по отношению к проективно-аффинным преобразованиям (см. § 2).

По существу [1]), проективно-аффинная классификация поверхностей второго порядка $\overline{\Gamma}$ в $\overline{R^3}$ совпадает с аффинной классификацией соответствующих аффинных поверхностей Γ в R^3. Если $\overline{\Gamma_1}$ и $\overline{\Gamma_2}$ — две поверхности, принадлежащие к одному и тому же проективно-аффинному классу в $\overline{R^3}$, то соответствующие им поверхности Γ_1 и Γ_2 в R^3, очевидно, аффинно эквивалентны. Однако если существует аффинное отображение $\mathcal{A}$ пространства R^3, переводящее поверхность Γ_1 в поверхность Γ_2, то при этом отображении направления, асимптотические для поверхности Γ_1, перейдут в направления, асимптотические для поверхности Γ_2; поэтому проективно-аффинное преобразование $\overline{\mathcal{A}}$, являющееся продолжением аффинного преобразования $\mathcal{A}$ на все пространство $\overline{R^3}$, переводит несобственные точки поверхности $\overline{\Gamma_1}$ в несобственные точки поверхности $\overline{\Gamma_2}$ и отображает первую из этих двух поверхностей на вторую. Итак, две поверхности $\overline{\Gamma_1}$ и $\overline{\Gamma_2}$ проективного пространства $\overline{R^3}$ тогда и только тогда принадлежат к одному и тому же проективно-аффинному классу, когда соответствующие аффинные поверхности Γ_1 и Γ_2 принадлежат к одному и тому же аффинному классу.

Мы покажем, что *проективно-аффинный класс поверхности второго порядка* $\overline{\Gamma}$ *в проективном пространстве* $\overline{R^3}$ *или* (*что то же*) *аффинный класс поверхности* Γ *в* R^3 *полностью определяется*

[1]) То есть за исключением случая, когда поверхность содержит несобственную плоскость.

проективным классом данной поверхности и проективным классом той кривой второго порядка, которая является пересечением данной поверхности с несобственной плоскостью.

Итак, посмотрим, по каким кривым поверхности различных проективно-аффинных классов пересекаются с несобственной плоскостью. Заметим, прежде всего, следующее: мы видели, что если при данном проективном преобразовании пространства какая-нибудь плоскость π отображается на некоторую плоскость π', то это отображение плоскости π на плоскость π' есть отображение проективное. В частности, производимое проективно-аффинным преобразованием преобразование несобственной плоскости является проективным преобразованием. Отсюда следует, что всякие две поверхности, принадлежащие к одному и тому же проективно-аффинному классу, пересекают несобственную плоскость по проективно эквивалентным кривым второго порядка. Поэтому для определения проективного класса кривых, по которым несобственную плоскость пересекают кривые данного проективно-аффинного класса, достаточно взять какую-нибудь поверхность этого класса, например поверхность, задаваемую простейшим каноническим уравнением поверхностей данного класса. Этим уравнением будет для действительных конусов уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ или, в однородных координатах,

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0; \qquad (K5)$$

для мнимых конусов $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ или, в однородных координатах,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0; \qquad (K4)$$

для эллипсоидов $x^2 + y^2 + z^2 = \pm 1$ или, в однородных координатах,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \mp x_4^2 = 0 \qquad (K2,1)$$

и т. д.

Заметим, во-вторых, что, по сказанному в § 4, несобственные точки данной поверхности второго порядка совпадают с несобственными точками ее асимптотического конуса.

Как следует из простейших канонических уравнений (K5) и (K4) конических поверхностей, действительный, соответственно мнимый, конус пересекается с несобственной плоскостью по действительному, соответственно по мнимому, овалу. В главе XIX, § 4, мы выяснили, каков конус асимптотических направлений поверхностей любого аффинного типа.

Конус асимптотических направлений эллипсоида является мнимым, а конус асимптотических направлений как двуполостного, так и однополостного гиперболоида — действительным конусом; конус асимптотических направлений параболоида вырождается в пару различных плоскостей: действительных для гиперболического и мнимых сопряженных для эллиптического параболоида.

Итак, эллипсоид, как действительный, так и мнимый, пересекается с несобственной плоскостью по мнимому овалу. Гиперболоиды, как однополостный, так и двуполостный, пересекаются с несобственной плоскостью по действительному овалу. Параболоиды касаются несобственной плоскости по паре различных прямых: действительных в случае гиперболического, мнимых и сопряженных в случае эллиптического параболоида [1]). Таким образом, в применении к невырождающимся поверхностям мы уже доказали наше основное утверждение: проективно-аффинный тип такой поверхности полностью определен ее проективным классом и проективным классом ее пересечения с несобственной плоскостью.

Переходим к поверхностям ранга 3. Мы уже видели, что действительный конус пересекается с несобственной плоскостью по действительному овалу, а мнимый — по мнимому.

Остаются цилиндры. Как мы видели в § 4 главы XIX, конус асимптотических направлений всякого цилиндра вырождается в пару плоскостей: действительных и различных для гиперболического цилиндра, мнимых и сопряженных для эллиптического. Конус асимптотических направлений параболического цилиндра вырождается в пару совпадающих плоскостей. В соответствии с этим все цилиндры дают в пересечении с несобственной плоскостью кривую, распадающуюся на пару прямых, другими словами, все цилиндры касаются несобственной плоскости; при этом гиперболические цилиндры касаются несобственной плоскости по паре различных действительных прямых, эллиптические — по паре мнимых сопряженных прямых, параболические цилиндры касаются несобственной плоскости по паре совпадающих прямых.

Чтобы наглядно представить себе всю картину, возьмем самый обыкновенный круглый конус и три плоскости α, α', α'', проходящие через его вершину и расположенные следующим образом. Плоскость α пересекает конус по паре его образующих. На рис. 254, *а* плоскость α есть плоскость рисунка. Единственной действительной точкой конуса, лежащей в плоскости α', пусть является его вершина (рис. 254, *б*), так что плоскость α' пересекает конус по паре мнимых сопряженных прямых. Наконец, плоскость α'' возьмем так, чтобы

[1]) Таким образом, гиперболоиды могут быть определены как невырождающиеся поверхности второго порядка, пересекающиеся с несобственной плоскостью по действительному овалу; среди этих поверхностей однополостные гиперболоиды являются кольцевидными, а двуполостные — овальными. Параболоиды могут быть определены как невырождающиеся поверхности, касающиеся несобственной плоскости; при этом гиперболические параболоиды являются кольцевидными, а эллиптические — овальными поверхностями, в соответствии с чем касание первых происходит по паре действительных, а касание вторых — по паре мнимых сопряженных прямых. Наконец, эллипсоиды суть невырождающиеся поверхности (содержащие или нет действительные точки), пересечение которых с несобственной плоскостью происходит по мнимому овалу.

она касалась конуса по его образующей, которая, дважды взятая, и является пересечением плоскости α'' с нашим конусом (рис. 254, в). Представим себе теперь три проективных преобразования $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$

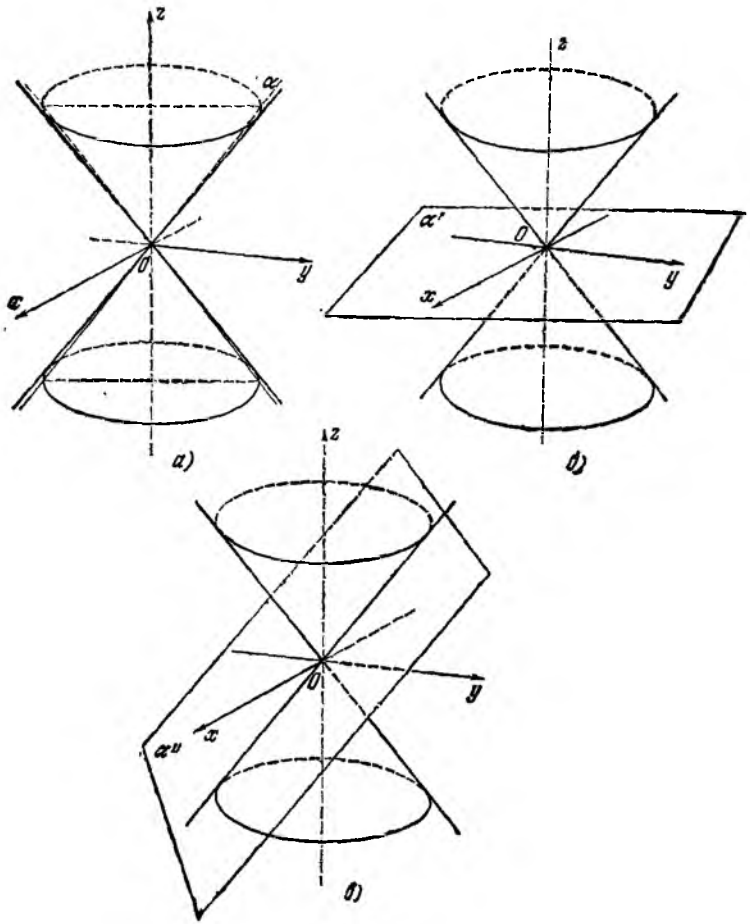


Рис. 254.

пространства P^3, переводящих соответственно плоскости α, α', α'' в несобственную плоскость. Каждое из этих преобразований превратит наш конус в цилиндрическую поверхность: преобразование $\mathcal{A}$ — в гиперболический, преобразование $\mathcal{A}'$ — в эллиптический, преобразование $\mathcal{A}''$ — в параболический цилиндр.

Переходим к поверхностям, распадающимся на пару плоскостей [1]).

Пара различных действительных плоскостей $x^2 - y^2 = 0$, соответственно $x^2 - 1 = 0$, записывается в однородных координатах в виде $x_1^2 - x_2^2 = 0$, соответственно $x_1^2 - x_4^2 = 0$. Пересечение с несобственной плоскостью есть в первом случае пара различных прямых

$$x_1 \pm x_2 = 0, \quad x_4 = 0,$$

во втором — пара совпадающих прямых

$$x_1^2 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Точно так же пара мнимых сопряженных плоскостей $x_1^2 + x_2^2 = 0$, соответственно $x_1^2 + x_4^2 = 0$, в пересечении с несобственной плоскостью дает в первом случае пару мнимых сопряженных прямых

$$x_1 \pm ix_2 = 0, \quad x_4 = 0,$$

во втором — пару совпадающих (действительных) прямых

$$x_1^2 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Итак, выяснение вопроса о характере расположения поверхностей различных аффинных классов относительно несобственной плоскости закончено. Закончена и проективно-аффинная классификация поверхностей, так как из сделанного разбора всех представляющихся случаев вытекает, что аффинный класс каждой поверхности взаимно однозначно соответствует паре, состоящей из проективного типа данной поверхности и из проективного типа ее пересечения с несобственной плоскостью.

Заметим, что проективный класс пересечения поверхности данного аффинного класса с несобственной плоскостью легко установить и непосредственно, не обращаясь к конусу асимптотических направлений: достаточно взять простейшее уравнение поверхности данного аффинного класса для эллипсоида $x^2 + y^2 + z^2 = \pm 1$, для однополостного, соответственно двуполостного, гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = \pm 1$, для параболоидов $2z = x^2 \pm y^2$, перейти затем в этих уравнениях к однородным координатам и, наконец, положить $x_4 = 0$.

Таким образом, получаются следующие кривые пересечения с несобственной плоскостью $x_4 = 0$:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, $x_4 = 0$ для эллипсоида (действительного и мнимого),

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, $x_4 = 0$ для однополостного и двуполостного гиперболоидов,

$x_1^2 \pm x_2^2 = 0$, $x_4 = 0$ для параболоидов.

[1]) Относящимися сюда очевидными соображениями мы уже воспользовались, когда устанавливали расположение цилиндров относительно несобственной прямой. Сейчас повторяем сказанное для полноты картины.

Уравнения цилиндров в однородных координатах записываются в виде

$$x_1^2 \pm x_2^2 \mp x_4^2 = 0 \quad \text{для эллиптического цилиндра (действительного и мнимого),}$$

$$x_1^2 - x_2^2 - x_4^2 = 0 \quad \text{для гиперболического цилиндра,}$$

$$x_2^2 - 2x_1x_4 = 0 \quad \text{для параболического цилиндра,}$$

из уравнений видно, что пересечения с несобственной плоскостью дают: пару действительных прямых

$$x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad x_4 = 0 \quad \text{для гиперболического цилиндра,}$$

пару мнимых прямых

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad x_4 = 0 \quad \text{для эллиптического цилиндра,}$$

пару совпадающих прямых

$$x_2^2 = 0, \quad x_4 = 0 \quad \text{для параболического цилиндра.}$$

Итогом всего исследования является следующая таблица:

Таблица поверхностей второго порядка

А. Невырождающиеся поверхности (поверхности ранга 4)

Аффинный класс и его представитель	Проективный класс поверхности	Проективный класс пересечения поверхности с несобственной плоскостью
1) Действительные эллипсоиды	Действительная овальная поверхность	Мнимый овал
2) Мнимый эллипсоид	Мнимая овальная поверхность	Мнимый овал
3) Двуполостные гиперболоиды	Действительная овальная поверхность	Действительный овал
4) Однополостные гиперболоиды	Кольцевидная поверхность	Действительный овал
5) Эллиптические параболоиды	Действительная овальная поверхность	Пара мнимых сопряженных прямых (одна действительная точка пересечения)
6) Гиперболические параболоиды	Кольцевидная поверхность	Пара различных действительных прямых
7) Действительный конус	Действительная коническая поверхность	Действительный овал

Продолжение

Б. Поверхности ранга 3 (конические и цилиндрические)

Аффинный класс и его представитель	Проективный класс поверхности	Проективный класс пересечения поверхности с несобственной плоскостью
8) Мнимый конус (одна действительная точка)	Мнимая коническая поверхность (одна действительная точка)	Мнимый овал
9) Действительный эллиптический цилиндр	Действительная коническая поверхность	Пара мнимых сопряженных прямых (одна действительная точка пересечения)
10) Мнимый эллиптический цилиндр	Мнимая коническая поверхность (единственная действительная точка — несобственная)	Пара мнимых сопряженных прямых (одна действительная точка пересечения)
11) Гиперболический цилиндр	Действительная коническая поверхность	Пара действительных различных прямых
12) Параболический цилиндр	Действительная коническая поверхность	Пара совпадающих (действительных) прямых

В. Поверхности проективного ранга 2 и 1 (пары плоскостей)

13) Пара действительных пересекающихся плоскостей	Пара действительных различных плоскостей	Пара различных действительных прямых
14) Пара мнимых пересекающихся плоскостей	Пара мнимых различных плоскостей	Пара различных мнимых прямых с действительной точкой пересечения
15) Пара действительных параллельных плоскостей	Пара действительных различных плоскостей	Пара (действительных) совпадающих прямых
16) Пара мнимых параллельных плоскостей	Пара мнимых различных плоскостей	Пара (действительных) совпадающих прямых
17) Пара (действительных) совпадающих плоскостей	Пара (действительных) совпадающих плоскостей	Пара (действительных) совпадающих прямых

ГЛАВА XXIV

ЕВКЛИДОВО n-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

§ 1. Введение. Ортогональные матрицы

В n-мерном векторном пространстве L^n мы можем говорить о линейной зависимости и независимости векторов, в n-мерном аффинном («точечно-векторном») пространстве R^n мы, кроме того, можем говорить о параллельности подпространств; но ни о длине векторов, ни об углах между ними мы говорить не можем: у нас для этого нет нужных определений, да и сама геометрия аффинного пространства направлена на другое, даже если мы ограничимся пространством двух или трех измерений: в ней изучаются лишь так называемые аффинные свойства фигур, т. е. свойства, которые, принадлежа одной какой-нибудь фигуре, принадлежат всем фигурам, аффинно эквивалентным данной. Такими свойствами являются, например, свойство кривой или поверхности второго порядка быть (или не быть) центральной, или иметь прямую центров, или не иметь ни одного центра; свойство иметь (или не иметь) вещественные асимптотические направления, вещественные прямолинейные образующие и многие другие. Свойство кривой (или поверхности) второго порядка иметь данный малый ранг r (или большой ранг R) также является аффинным.

С точки зрения аффинной геометрии все аффинные координатные системы равноправны: ведь переход от одной аффинной координатной системы к другой равносилен аффинному преобразованию пространства, а при таком преобразовании аффинные свойства лежащих в нем фигур остаются неизменными.

Ни длины векторов (т. е. расстояния между точками), ни углы между векторами не являются аффинными свойствами: пара взаимно перпендикулярных прямых при аффинном преобразовании может, как мы знаем, перейти в любую другую пару пересекающихся прямых (но не может перейти в пару параллельных).

Но при ортогональных преобразованиях, являющихся частным случаем аффинных, длины векторов и углы между ними остаются неизменными. По отношению к ортогональным преобразованиям пря-

моугольные координатные системы исполняют ту же роль, какую любые аффинные системы координат исполняют по отношению к аффинным преобразованиям вообще; поэтому длины векторов и углы между ними удобно рассматривать, именно пользуясь прямоугольными системами координат.

Создать в данном n-мерном векторном (или точечно-векторном) аффинном пространстве возможность измерять длины векторов и углы между ними по образцу того, как это делается в обыкновенном трехмерном пространстве, — это и значит, как говорят, ввести в это пространство евклидову метрику, сделать его евклидовым пространством. Этим мы и будем сейчас заниматься.

Мы знаем, что квадратная матрица

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *ортогональной*, если транспонированная матрица C^* совпадает с обратной C^{-1}, т. е. если

$$CC^*=E \text{ или, что то же, } C^*C=E \tag{1}$$

(где, как всегда, E — единичная матрица). Расписывая каждое из этих равенств согласно правилу умножения матриц, получаем два условия [1]):

условие ортогональности по строкам

$$c_{i1}c_{j1}+c_{i2}c_{j2}+\dots+c_{in}c_{jn}=\delta_{ij} \tag{2}$$

и *условие ортогональности по столбцам*

$$c_{1i}c_{1j}+c_{2i}c_{2j}+\dots+c_{ni}c_{nj}=\delta_{ij}, \tag{3}$$

причем и то и другое условие предполагается выполненным для всех i и j.

Каждое из этих условий эквивалентно условию ортогональности (1). Из определения (1) ортогональности сразу следует, что детерминант ортогональной матрицы равен ± 1. В самом деле, из (1) вытекает, что

$$\det C \det C^* = (\det C)^2 = 1,$$

откуда утверждение и следует. Далее, обратная матрица C^{-1} к ортогональной матрице ортогональна. В самом деле, требуется доказать, что

$$(C^{-1})^{-1}=(C^*)^*.$$

---

[1]) Через δ_{ij} обозначается, как известно, число, равное 1, если $i=j$, и равное нулю, если $i\neq j$.

Но это равенство верно, так как и правая, и левая часть его есть C. Наконец, произведение двух ортогональных матриц C_1 и C_2 есть ортогональная матрица. В самом деле,

$$(C_1C_2)^{-1} = C_2^{-1}C_1^{-1} = C_2^*C_1^* = (C_1C_2)^*.$$

Так как единичная матрица E, очевидно, ортогональна, то ортогональные матрицы данного порядка n образуют (по умножению) группу — подгруппу группы всех невырождающихся матриц порядка n.

Определение 1. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}'_1 \ldots, \mathbf{e}'_n$ — два базиса в линейном пространстве L^n. Скажем, что эти базисы *ортогонально эквивалентны*, если матрица перехода от одного из них к другому есть ортогональная матрица.

Из только что доказанного следует, что отношение ортогональной эквивалентности удовлетворяет условиям рефлексивности, симметрии и транзитивности, так что все базисы пространства L^n распадаются на непересекающиеся классы K_α ортогонально эквивалентных между собою базисов.

§ 2. Положительно определенные симметричные билинейные функции в векторном пространстве

Предположим, что в n-мерном векторном пространстве L^n дана положительно определенная симметричная билинейная функция $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Значит, для любого вектора $\mathbf{u} \neq 0$ имеем $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$. Как известно (из § 5 гл. XIII), существует базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ пространства L^n, относительно которого $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ записывается в виде канонической билинейной формы:

$$\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ при } \left.\begin{array}{l} \mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Мы сейчас дадим новое доказательство этой теоремы, не опирающееся на теорию квадратичных форм.

Замечание 1. Во всей главе мы под $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ всегда будем понимать положительно определенную симметричную билинейную функцию.

Лемма 1. *Для того чтобы относительно данного базиса* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *функция* $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *записывалась в виде* (1), *необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\Psi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \delta_{ik} \text{ для любых } i, k = 1, 2, \ldots, n. \quad (2)$$

В самом деле, пусть базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ удовлетворяет условию (2). Тогда, вследствие билинейности функции $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, имеем

$$\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Psi(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n) =$$
$$= \sum_{ij} x_i y_j \Psi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j} x_i y_j \delta_{ij} = \sum x_i y_i.$$

Обратно, пусть относительно базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ функция $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ записывается в виде (1). Подставив в (1) векторы $\mathbf{u}=\mathbf{e}_i$, $\mathbf{v}=\mathbf{e}_k$ и помня, что относительно базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ вектор $\mathbf{e}_i$ имеет координату $x_i=1$, а координаты $x_j=0$ при $j\neq i$, а вектор $\mathbf{e}_k$ — координату $y_k=1$ и $y_j=0$ при $j\neq k$, видим, что формула (1) переходит в $\Psi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)=\delta_{ik}$, т. е. в формулу (2).

Назовем теперь векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *ортогональными между собою* (относительно функции Ψ), если $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})=0$; совокупность векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s$ назовем *ортогональной*, если при $i, k=1, 2, \ldots, s$, $i\neq k$, любые два вектора $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{u}_k$ этой совокупности ортогональны; если при этом $\Psi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)=1$ $(i=1, 2, \ldots, s)$, то совокупность векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s$ называется *ортонормальной*.

В частности, базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ называется *ортонормальным* относительно функции $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, если он удовлетворяет условию (2).

Лемма 2. *Всякая ортогональная (относительно функции $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$) совокупность отличных от нуля векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s$ пространства L^n линейно независима (и, значит, $s\leqslant n$).*

В самом деле, пусть

$$\mathbf{v}\equiv\lambda_1\mathbf{u}_1+\ldots+\lambda_i\mathbf{u}_i+\ldots+\lambda_s\mathbf{u}_s=0.$$

Требуется доказать, что $\lambda_i=0$ (при любом $i=1, 2, \ldots, s$).

Так как $\mathbf{v}=\mathbf{0}$, то $\Psi(\mathbf{v}, \mathbf{u}_i)=0$, так что

$$0=\Psi(\mathbf{v}, \mathbf{u}_i)\equiv\Psi\left(\sum_j\lambda_j\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i\right)=\sum_j\lambda_j\Psi(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i)=\lambda_i\Psi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i).$$

Так как $\Psi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)\neq 0$, то $\lambda_i=0$, что и требовалось доказать.

В силу леммы 1 наша задача — построить для данной функции $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ базис, в котором она принимает вид (1), — равносильна доказательству следующего предложения.

Теорема 1. *В векторном пространстве L^n существует базис, ортонормальный относительно любой наперед заданной положительно определенной симметричной билинейной функции $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.*

Доказательство. Пусть в векторном пространстве L^n дан какой-нибудь базис $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$. Мы прежде всего построим попарно ортогональные между собою отличные от нуля векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, являющиеся линейными комбинациями векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$. Построение будет вестись по индукции. Положим $\mathbf{v}_1=\mathbf{u}_1$. Ищем теперь такое число λ_1, чтобы вектор

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{u}_2+\lambda_1\mathbf{v}_1$$

был ортогонален к вектору $\mathbf{v}_1$, т. е. чтобы

$$\Psi(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)\equiv\Psi(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1)+\lambda_1\Psi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)=0.$$

Так как $\Psi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) \neq 0$, то из условия

$$\Psi(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) + \lambda_1 \Psi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = 0$$

число λ_1 определяется однозначно:

$$\lambda_1 = -\frac{\Psi(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1)}{\Psi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)}.$$

Так как

$$\mathbf{v}_2 \equiv \mathbf{u}_2 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 + \lambda_1 \mathbf{u}_1$$

и векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ линейно независимы, то $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$.

Предположим теперь, что построена ортогональная система отличных от нуля векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$, являющихся линейными комбинациями векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}$. При любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ вектор

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} \tag{3}$$

является, очевидно, линейной комбинацией векторов $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$ и, значит, линейной комбинацией векторов $\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}$:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k + c_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + c_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}; \tag{3'}$$

при этом вектор $\mathbf{u}_k$ входит в линейную комбинацию (3′) с тем же коэффициентом 1, с которым он входил в комбинацию (3); это происходит от того, что векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$ суть линейные комбинации одних лишь векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}$.

Найдем теперь такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$, чтобы вектор (3) был ортогонален к каждому из векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$, т. е. чтобы для каждого $i = 1, 2, \ldots, k-1$ выполнялось условие

$$\Psi(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_i) \equiv \Psi(\mathbf{u}_k + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_i) = 0; \tag{4}$$

условие (4) может быть записано в виде

$$\Psi(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i) + \lambda_i \Psi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = 0, \tag{4'}$$

откуда и определяется однозначно λ_i. Остается доказать, что $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$. В линейную комбинацию (3′) вектор $\mathbf{u}_k$ входит с коэффициентом 1; поэтому (3′) есть нетривиальная линейная комбинация линейно независимых между собою векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$; значит, $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$. Индукция заканчивается на $k = n$ построением ортогональной (значит, линейно независимой) системы векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ в n-мерном пространстве L^n; поэтому $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ есть ортогональный базис пространства L^n. Положим, наконец, $\mathbf{e}_i = \frac{1}{\sqrt{\Psi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)}} \cdot \mathbf{v}_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\Psi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = \frac{1}{\sqrt{\Psi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)}} \frac{1}{\sqrt{\Psi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)}} \Psi(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = 1$$

— базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ является ортонормальным, и теорема 1 доказана.

Замечание 2. Если векторы $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$, $m \leqslant n$, уже являются попарно ортогональными, то наше построение автоматически дает

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1, \ \ldots, \ \mathbf{v}_m = \mathbf{u}_m.$$

В самом деле, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$. Предположим, что равенства $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i$ доказаны для $i = 1, \ldots, k-1$, где $k \leqslant m$. Докажем, что $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k$.

В наших предположениях равенство (3), определяющее вектор $\mathbf{v}_k$, превращается в

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k + \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_{k-1} \mathbf{u}_{k-1},$$

а условия (4′) для определения $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ — в

$$\Psi(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i) + \lambda_i \Psi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1). \qquad (4'')$$

Но так как $i < k \leqslant m$, то $\Psi(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i) = 0$; кроме того, $\Psi(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) \neq 0$, так что (4″) означает просто, что $\lambda_i = 0$ при всех $i \leqslant k-1$, т. е. $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k$. Мы доказали следующее

Добавление к теореме 1. *Всякую ортогональную (ортонормальную) относительно данной функции* $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *систему векторов* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ *пространства* L^n *можно дополнить до базиса пространства* L^n, *ортогонального (ортонормального) относительно функции* $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Замечание 3. Описанный выше переход от произвольного базиса $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ пространства L^n к базису $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ортогональному (относительно некоторой функции $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$) принято называть *ортогонализацией* (базиса $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$).

Этот процесс ортогонализации с различными его обобщениями имеет в математике очень большие и разнообразные применения.

Теорема 2. *Пусть базис* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *пространства* L^n *ортонормален относительно функции* $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. *Для того чтобы базис* $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ *также был ортонормален (относительно той же функции), необходимо и достаточно, чтобы матрица перехода от базиса* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *к базису* $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ *была ортогональной.*

В самом деле, пусть

$$\mathbf{e}'_i = a_{1i}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{ni}\mathbf{e}_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда

$$\Psi(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) \equiv$$

$$\equiv \Psi(a_{1i}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{hi}\mathbf{e}_h + \ldots + a_{ni}\mathbf{e}_n, \ a_{1j}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{kj}\mathbf{e}_k + \ldots + a_{nj}\mathbf{e}_n) =$$

$$= \sum_{h,\,k} a_{hi} a_{kj} \Psi(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_k) = \sum_{h,\,k} a_{hi} a_{kj} \delta_{hk} = \sum_h a_{hi} a_{hj}.$$

Поэтому условие $\Psi(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = \delta_{ij}$ тождественно с условием

$\sum_h a_{hi}a_{hj} = \delta_{ij}$, т. е. с условием ортогональности матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

чем теорема 2 доказана.

Так как матрица A является матрицей линейного преобразования, переводящего базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в базис $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$, то мы можем сформулировать теорему 2 и следующим образом.

Теорема 2′. *Все ортогональные матрицы и только они являются матрицами линейных преобразований, переводящих один ортонормальный (относительно какой-нибудь функции $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$) базис пространства L^n в другой ортонормальный (относительно той же функции) базис.*

Перефразированной теоремой 2′ является

Теорема 2″. *Совокупность всех базисов пространства L^n, ортонормальных относительно данной функции $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, или, что то же, базисов, в которых функция принимает канонический вид (1), есть некоторый класс K_Ψ ортогонально эквивалентных между собою базисов пространства L^n.*

Обратно: пусть в пространстве L^n выбран некоторый класс K ортогонально эквивалентных базисов. Возьмем какой-нибудь из этих базисов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ и зададим симметричную положительно определенную билинейную функцию, положив

$$\Psi_k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_i x_i y_i \quad \text{для} \quad \begin{cases} \mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1 + \dots + y_n\mathbf{e}_n. \end{cases} \tag{1_k}$$

Тогда во всех базисах $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n$, принадлежащих к классу K (и только в этих базисах), функция $\Psi_k(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ будет иметь каноническое представление

$$\Psi_k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_i x'_i y'_i \quad \text{для} \quad \begin{cases} \mathbf{u} = x'_1\mathbf{e}'_1 + \dots + x'_n\mathbf{e}'_n, \\ \mathbf{v} = y'_1\mathbf{e}'_1 + \dots + y'_n\mathbf{e}'_n, \end{cases} \tag{$1'_k$}$$

так что класс ортонормальных (относительно функции Ψ_k) базисов есть не что иное, как первоначально данный класс K:

$$K_{\Psi_k} = K.$$

§ 3. Определение евклидовых пространств и простейших относящихся к ним понятий

Определение 2. Ввести в векторном пространстве L^n евклидову метрику — значит определить в этом пространстве положительно определенную симметричную билинейную функцию $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Пространство L^n с какой-нибудь введенной в нем евклидовой метрикой называется *евклидовым n-мерным пространством*.

Определение 3. Значение билинейной функции $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ для двух данных векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ называется их *скалярным произведением* (в данном евклидовом пространстве) и обозначается через $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Базисы ортонормальные относительно функции $\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ называются *ортонормальными базисами* данного евклидова пространства.

Из только что данного определения скалярного произведения $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ следует, что оно обладает алгебраическими свойствами элементарного скалярного произведения в обычном трехмерном пространстве:

1° $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

2° $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$.

3° $(\lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

4° Число $(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ для всех векторов $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ положительно, для $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ равно нулю. Оно называется *скалярным квадратом вектора* $\mathbf{u}$.

Определение 4. Число

$$|\mathbf{u}| = +\sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \geqslant 0$$

называется *длиной вектора* $\mathbf{u}$ в евклидовом пространстве L^n. Только нулевой вектор имеет длину, равную нулю. Если в данном ортогональном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ имеем

$$\mathbf{u} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

т. е.

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

то, очевидно, $|\mathbf{u}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

На основании теоремы 2 основное определение 2 может быть сформулировано и так:

Определение 2′. Ввести в n-мерное векторное пространство L^n евклидову метрику — значит выбрать среди всех классов ортогонально эквивалентных между собою базисов пространства один определенный класс K. Пространство L^n, рассматриваемое вместе с этим классом K, называется *n-мерным евклидовым векторным пространством* L^n. Базисы, составляющие этот класс, называются *ортонормальными базисами* евклидова пространства L^n. Положительно определенная симметричная функция $\Psi_k(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, определенная в любом (и тогда в каждом) из ортогональных базисов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ пространства L^n по формуле

$$\Psi_k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{для} \quad \begin{cases} \mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n, \end{cases}$$

называется *скалярным произведением* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *векторов* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$; базисы класса K тождественны с базисами, ортонормальными относительно функции Ψ_k.

Определение 5. Ввести евклидову метрику в n-мерное точечно-векторное пространство R^n — значит ввести ее в векторное пространство L^n всех векторов пространства R^n.

Точечно-векторное пространство R^n с введенной в нем евклидовой метрикой называется *точечно-векторным n-мерным евклидовым пространством* (или просто n-мерным евклидовым пространством) и обозначается через E^n.

Определение 6. Координатная система $Oe_1, e_2, \ldots, e_n$ в пространстве E^n, единичные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ которой образуют ортонормальный базис (векторного пространства L^n всех векторов пространства E^n), называется *прямоугольной* (или *ортогональной*) *системой координат евклидова пространства* E^n.

Определение 7. *Расстоянием между двумя точками* A, B пространства E^n называется длина вектора $\overrightarrow{AB}$; оно обозначается через

$$\rho(A, B) = \rho(B, A) = |\overrightarrow{AB}|$$

и равно нулю тогда и только тогда, когда точки A и B совпадают. Если точки A и B заданы своими координатами в какой-нибудь прямоугольной системе координат:

$$A = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad B = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

то для вектора $\overrightarrow{AB}$ имеем

$$\overrightarrow{AB} = \{y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n\},$$

так что

$$|AB|^2 = (y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2$$

и

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

— обобщение формулы расстояния между двумя точками на плоскости и в трехмерном пространстве.

Наконец, имеет место следующее почти очевидное, но тем не менее очень важное предложение, доказанное в главе IV, § 2, для трехмерного пространства.

Теорема 3. *Координаты каждого вектора* $\mathbf{u}$ *евклидова пространства относительно данного ортонормального базиса* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *равны соответственно скалярным произведениям вектора* $\mathbf{u}$ *на векторы* $e_1, e_2, \ldots, e_n$; *для* $\mathbf{u} = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ *имеем* $x_i = (\mathbf{u}, e_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

В самом деле, из $\mathbf{u} = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ следует

$$(\mathbf{u}, e_i) = x_1 (e_1, e_i) + \ldots + x_i (e_i, e_i) + \ldots + x_n (e_n, e_i) = x_i,$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Неравенство Коши—Буняковского и его следствия. Углы

Чтобы идти дальше, нам понадобится следующее предложение: *Для любых двух векторов* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *евклидова* n*-мерного пространства имеет место неравенство*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \quad (\textit{неравенство Коши—Буняковского}), \tag{1}$$

причем равенство получается, лишь если векторы $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$ *коллинеарны* (*т. е. один получается из другого умножением на некоторое число* λ).

Достаточно доказать это неравенство для векторов, отличных от нуля.

Предположим сначала, что $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$. Возьмем какой-нибудь ортонормальный базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, и пусть

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n.$$

Тогда подлежащее доказательству неравенство (1) при $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$ превращается в

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant 1. \tag{1'}$$

Но, очевидно,

$$0 \leqslant \sum_k (x_k - y_k)^2 = \sum_k x_k^2 + \sum_k y_k^2 - 2\sum_k x_k y_k, \tag{2}$$

причем в (2) равенство наступает, лишь когда $x_k = y_k$ для всех k, т. е. когда $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Так как $\sum_k x_k^2 = |\mathbf{u}|^2 = 1$, $\sum_k y_k^2 = |\mathbf{v}|^2 = 1$, то неравенство (2) в рассматриваемом частном случае совпадает с $2\sum_k x_k y_k \leqslant 2$, т. е. с неравенством (1'), причем мы помним, что равеиство получается лишь при $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Итак, в частном случае $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$ наше предложение доказано.

Пусть теперь $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — какие угодно отличные от нуля векторы. Тогда векторы $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$, $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ имеют длину 1, так что для них

$$\left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) \leqslant 1,$$

т. е. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leqslant |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$, что и требовалось доказать.

Если при этом $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$, то для векторов $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$, $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ имеем $\left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}, \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) = 1$, откуда, по доказанному, следует $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, т. е. $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$ при $\lambda = \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|}$. Теорема Коши—Буняковского доказана.

Замечание 1. Пусть в евклидовом пространстве дан ортонормальный базис, так что $\mathbf{u}=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\mathbf{v}=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Тогда $|\mathbf{u}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$, $|\mathbf{v}|=\sqrt{y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2}$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v})=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$ и неравенство Коши — Буняковского превращается в арифметическое неравенство

$$\sum_k x_k y_k \leqslant \sqrt{\sum_k x_k^2}\sqrt{\sum_k y_k^2}, \tag{1''}$$

верное для любых вещественных чисел $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$.

Определение 8. *Величиной угла между двумя* отличными от нуля *векторами* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ в n-мерном евклидовом пространстве называется число φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, определенное условием

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}. \tag{3}$$

Из теоремы Коши — Буняковского следует, что угол φ (в пределах $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$) однозначно определен. При этом $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (т. е. векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ перпендикулярны или ортогональны между собою) тогда и только тогда, когда

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0.$$

Теперь мы можем сказать, что ортонормальный базис в n-мерном евклидовом пространстве есть просто система из n попарно перпендикулярных (ортогональных) между собою ортов, т. е. векторов длины 1.

Из неравенства Коши — Буняковского легко вытекает так называемое «*неравенство треугольника для векторов*», а именно:

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|. \tag{4}$$

Для того чтобы его доказать, напишем тождество

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u})+2(\mathbf{u}, \mathbf{v})+(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \tag{5}$$

(непосредственно вытекающее из билинейности и симметрии скалярного произведения, как функции от двух векторов).

Из (5) выводим, далее (пользуясь неравенством Коши — Буняковского),

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2+2(\mathbf{u}, \mathbf{v})+|\mathbf{v}|^2 \leqslant$$
$$\leqslant |\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|+|\mathbf{v}|^2 = (|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|)^2,$$

т. е.

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|.$$

Мы уже заметили, что расстояние $\rho(A, B)$ между двумя точками n-мерного евклидова пространства E^n удовлетворяет следующим условиям:

1° $\rho(A, B)$ равно нулю тогда и только тогда, когда точки A и B совпадают.

2° $\rho(A, B) = \rho(B, A)$.

Имеет еще место так называемое неравенство треугольника (для точек), а именно: каковы бы ни были три точки A, B, C, всегда

3° $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geqslant \rho(A, C)$.

Для доказательства положим $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$; тогда $\mathbf{w} = \overrightarrow{AC} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, и мы имеем по формуле (4)

$$|\mathbf{w}| = |\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|,$$

т. е.

$$\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C).$$

Замечание 2. Из формулы (5) вытекает, что для двух взаимно перпендикулярных векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ справедливо

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2. \tag{6}$$

В частности, если точки A, B, C определяют прямоугольный треугольник, т. е. если векторы $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$ взаимно перпендикулярны (являются катетами треугольника ABC), то для его гипотенузы $\overrightarrow{AC}$ имеем $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, и, следовательно (по формуле (6))

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2. \tag{7}$$

Это равенство (или эквивалентное ему равенство (6)) выражает *теорему Пифагора* в n-мерном евклидовом пространстве.

§ 5. Подпространства евклидовых пространств. Ортогональное дополнение к данному подпространству

Так как функция $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, т. е. скалярное произведение любых двух векторов евклидова пространства E^n, определена, в частности, и для векторов, лежащих в произвольно данном подпространстве пространства E^n, то всякое подпространство евклидова пространства есть евклидово пространство.

Пусть E^p есть подпространство евклидова пространства E^n. Назовем вектор $\mathbf{u} \in E^n$ *ортогональным к подпространству* E^p, если он ортогонален ко всякому вектору $\mathbf{v}$, лежащему в этом подпространстве. Так как никакой (отличный от нуля) вектор не ортогонален к самому себе, то ни один (отличный от нуля) вектор, ортогональный к подпространству E^p, не лежит в этом подпространстве. Из линейности скалярного произведения следует, далее, что вектор $\mathbf{u}$, ортогональный ко всем векторам $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$, образующим какой-нибудь базис подпространства E^p, будет ортогонален и ко всему подпространству E^p.

Далее, если векторы $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ ортогональны к подпространству E^p, т. е. ортогональны к любому $\mathbf{v} \in E^p$, то тем же свойством будет обладать и всякий вектор $\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{u}_k$, являющийся линейной комбинацией векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$. Отсюда сразу вытекает предложение.

Совокупность всех векторов $\mathbf{u} \in E^n$, ортогональных к подпространству E_1^p пространства E^n, есть некоторое векторное подпространство $E_2^q = NE_1^p \leqslant E^n$; оно называется *ортогональным дополнением к подпространству E_1^p в пространстве E^n* или, короче, *аннулятором*[1]) *подпространства E_1^p в E^n*.

Мы уже заметили, что нулевой вектор есть единственный вектор, одновременно принадлежащий данному подпространству E_1^p и его аннулятору NE_1^p.

Возьмем в подпространстве E_1^p какой-нибудь ортонормальный базис

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p \tag{1}$$

и дополним его до ортонормального базиса

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p; \mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \tag{2}$$

всего пространства E^n (мы видели на стр. 715, что это всегда возможно).

Векторы $\mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ (будучи ортогональными ко всем векторам $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$, составляющим базис подпространства E_1^p) ортогональны ко всему подпространству E_1^p и, следовательно, лежат в E_2^q. Отсюда следует, что подпространства E_1^p и E_2^q в своей совокупности порождают все пространство E^n; а так как пересечение E_1^p и E_2^q состоит из одного нулевого вектора, то E^n есть прямая сумма (любого) подпространства E_1^p и его аннулятора $E_2^q = NE_1^p$.

В главе XII, § 8, мы доказали (опираясь на основную теорему о системах однородных линейных уравнений), что размерность аннулятора p-мерного подпространства E_1^p равна

$$q = n - p. \tag{3}$$

Дадим теперь второе, прямое доказательство формулы (3). Для этого достаточно доказать, что ортонормальная система

$$\mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_n, \tag{4}$$

состоящая из $n-p$ векторов, есть базис пространства E_2^q. В самом деле, система (4) линейно независима (так как ортогональна), остается доказать, что каждый вектор $\mathbf{v} \in E_2^q$ есть линейная комбинация

[1]) В главе XII, § 8, мы определили аннулятор NL^p подпространства L^p векторного пространства L^n, *снабженного фиксированным базисом* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Теперешнее определение аниулятора совпадает с определением, данным в § 8 главы XII, если в последнем под базисом $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ понимать *любой* ортонормальный базис пространства L^n с введенной в нем евклидовой метрикой.

векторов (4). Но это почти очевидно. Если

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_p\mathbf{e}_p + x_{p+1}\mathbf{e}_{p+1} + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \in E_2^q,$$

то

$$x_1 = (\mathbf{v},\ \mathbf{e}_1) = 0,\ \ldots,\ x_p = (\mathbf{v},\ \mathbf{e}_p) = 0,$$

т. е.

$$\mathbf{v} = x_{p+1}\mathbf{e}_{p+1} + \ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

что и требовалось доказать.

Формула (3) эквивалентна основной теореме о системах однородных уравнений (теорема 12 главы XII): достаточно вспомнить, что аннулятор подпространства $E^p \subset E^n$, снабженного каким-нибудь базисом

$$\mathbf{a}_1 = \{a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n}\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{a}_p = \{a_{p1},\ a_{p2},\ \ldots,\ a_{pn}\},$$

совпадает с аннулятором этого базиса, т. е. с пространством решений системы уравнений

$$a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \ldots + a_{1n}t_n = 0,$$
$$a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{2n}t_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{p1}t_1 + a_{p2}t_2 + \ldots + a_{pn}t_n = 0.$$

Таким образом, дав прямое доказательство формулы (3), мы этим заново и очень просто доказали основную теорему о системах однородных линейных уравнений.

Замечание 1. Два подпространства E' и E'' пространства E^n называются *ортогональными между собою*, если каждый вектор одного из этих подпространств ортогонален к каждому вектору другого. Очевидно, что каждое подпространство E'', ортогональное к данному подпространству E', содержится в аннуляторе NE' этого последнего.

В этом смысле аннулятор подпространства E' в E^n есть максимальное подпространство пространства E^n, ортогональное к данному подпространству E'.

Напомним, наконец, формулу [1])

$$NNE^p = E^p, \tag{5}$$

выражающую симметрию свойства одного подпространства быть аннулятором другого: если подпространство E_2^q состоит из всех векторов $\mathbf{v} \in E^n$, ортогональных к пространству E_1^p, то E_1^p состоит из всех векторов, ортогональных к E_2^q.

[1]) Доказанную в главе XII, § 8, стр. 319.

ГЛАВА XXV

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Инвариантные подпространства и собственные векторы линейного оператора в любом векторном пространстве

Сведения о линейных операторах, изложенные в главе XII, мы в этом параграфе дополним некоторыми дальнейшими предложениями; они имеют место в любых векторных пространствах, но в этих лекциях будут рассматриваться лишь главным образом в применении к пространствам с евклидовой метрикой.

Определение 1. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве L^n. Подпространство L_0 пространства L^n называется *инвариантным подпространством для оператора* $\mathcal{A}$, если для любого вектора $\mathbf{u} \in L_0$ имеем $\mathcal{A}\mathbf{u} \in L_0$ (т. е. если оператор $\mathcal{A}$ отображает пространство L_0 в себя $\mathcal{A}L_0 \subseteq L_0$).

Рассмотрим, в частности, случай одномерного инвариантного подпространства $L_0^1 \subseteq L^n$. Тогда для всякого вектора $\mathbf{u} \in L_0^1$ имеем $\mathcal{A}\mathbf{u} \in L_0^1$, т. е.

$$\mathcal{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \tag{1}$$

где λ — некоторое вещественное число.

Определение 2. Всякий отличный от нуля вектор $\mathbf{u}$, удовлетворяющий равенству (1) (при некотором числе λ), называется *собственным вектором оператора* $\mathcal{A}$, а число λ (однозначно определенное равенством (1)) называется *собственным значением оператора* $\mathcal{A}$, соответствующим данному собственному вектору $\mathbf{u}$.

Замечание. Про собственный вектор $\mathbf{u}$, удовлетворяющий равенству (1) при данном λ, говорят, что он соответствует собственному значению λ. При этом из самого условия (1) следует, что каждый собственный вектор оператора $\mathcal{A}$ соответствует лишь одному собственному значению, тогда как данному собственному значению соответствует бесконечное множество коллинеарных между собою

собственных векторов, но могут соответствовать и линейно независимые между собою собственные векторы.

Мы видим, что каждый (отличный от нуля) вектор одномерного инвариантного подпространства (данного оператора $\mathcal{A}$) есть собственный вектор оператора $\mathcal{A}$. Очевидно и обратное: одномерное подпространство, порожденное данным собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, есть инвариантное подпространство этого оператора.

Непосредственно из определения собственных векторов вытекает следующее предложение:

Если базис пространства L^n состоит из собственных векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ данного оператора $\mathcal{A}$, соответствующих собственным значениям

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n,$$

то в этом базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу A диагонального вида:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Обратно, если в некотором базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ матрица оператора имеет вид (2), то $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ являются собственными векторами оператора $\mathcal{A}$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ суть соответственно их собственные значения.

В этой главе мы до конца выясним вопрос о тех линейных операторах евклидова пространства, матрица которых в некотором ортонормальном базисе имеет вид (2), для которых, другими словами, можно найти ортонормальный базис пространств, состоящий из n собственных векторов.

Но пока мы рассматриваем еще произвольное векторное пространство L^n и в нем произвольный линейный оператор $\mathcal{A}$. Будем разыскивать собственные векторы и собственные значения этого оператора и, следовательно, его одномерные инвариантные подпространства. Мы увидим, что если оператор $\mathcal{A}$ не имеет инвариантного одномерного подпространства [1]) (а значит, не имеет собственных векторов), то он имеет инвариантное подпространство размерности 2.

---

[1]) Таков, например, оператор $\mathcal{A}$, определенный как вращение плоскости вокруг точки O (начала прямоугольной системы координат Oxy) на некоторый угол α, $0 < \alpha < \pi$, т. е. линейное (ортогональное) преобразование, записывающееся в виде

$$x_1 = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$y_1 = x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

При этом преобразовании каждый вектор $\mathbf{u}$ поворачивается на угол α, $-\pi < \alpha < \pi$, следовательно, никакой вектор $\mathbf{u}$ не переходит в вектор вида $\lambda\mathbf{u}$, т. е. не оказывается собственным вектором.

Выберем в пространстве L^n какой-нибудь базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, относительно которого оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \ldots a_{n2} \\ \ldots & \ldots \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Тогда для вектора $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ с координатами $x_1, \ldots, x_n$ вектор $\mathcal{A}\mathbf{u}$ будет иметь координаты

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Условие для того, чтобы вектор $\mathbf{u}$ был собственным вектором с собственным значением λ, есть

$$\mathcal{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}; \tag{1}$$

расписывая это условие покоординатно, получим уравнения

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \lambda x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1'}$$

т. е. уравнения

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Это — система однородных линейных уравнений относительно координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вектора $\mathbf{u}$; нас интересуют лишь ненулевые векторы — решения системы (5); они существуют тогда и только тогда, когда детерминант системы (5) равен нулю, т. е. когда λ удовлетворяет уравнению n-й степени

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Обозначим детерминант, составляющий левую часть уравнения (6), через $D_{\mathbf{e}}(\lambda)$. Значок $\mathbf{e}$ при $D(\lambda)$ поставлен потому, что мы построили детерминант, пользуясь базисом $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n]$.

Очевидно,

$$D_{\mathbf{e}}(\lambda) = \det(A - \lambda E). \tag{6'}$$

Докажем, что в действительности многочлен $D_{\mathbf{e}}(\lambda)$ от выбора базиса $\mathbf{e}$ пространства L^n не зависит, т. е. что для любого другого базиса $\mathbf{e}' = [\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n]$ пространства L^n имеем

$$D_{\mathbf{e}}(\lambda) \equiv D_{\mathbf{e}'}(\lambda).$$

Пусть матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ есть (невырождающаяся) матрица C. Относительно базиса $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу

$$A' = C^{-1}AC,$$

так что

$$A' - \lambda E = C^{-1}AC - \lambda E = C^{-1}AC - \lambda C^{-1}EC = \\ = C^{-1}AC - C^{-1}\lambda EC = C^{-1}(A - \lambda E)C$$

и

$$D_{\mathbf{e}'}(\lambda) \equiv \det(A' - \lambda E) \equiv \det C^{-1} \det(A - \lambda E) \det C = \\ = \det(A - \lambda E) = D_{\mathbf{e}}(\lambda),$$

чем наше утверждение доказано.

Итак, многочлен n-й степени

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \tag{6*}$$

не зависит от выбора того или иного базиса пространства L^n, т. е. от того, какой именно матрицей A записан данный оператор $\mathcal{A}$, он зависит лишь от самого этого оператора и потому называется *характеристическим многочленом оператора* $\mathcal{A}$. Уравнение (6), т. е. уравненне $D(\lambda) = 0$, называется *характеристическим уравнением оператора* $\mathcal{A}$ (и матрицы A, представляющей этот оператор в любом базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$); корни уравнения (6) называются *характеристическими числами оператора* $\mathcal{A}$ и его матрицы A.

Каждое число λ, являющееся собственным значеннем какого-либо собственного вектора оператора $\mathcal{A}$, есть корень характеристнческого многочлена $D(\lambda)$, т. е. характеристическое число оператора $\mathcal{A}$. Обратно, если λ есть корень уравнения (6), то, подставляя его в уравнения (5), сможем получить ненулевое решение $\mathbf{u} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ системы уравненнй (5), т. е. собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, соответствующий собственному значенню λ. Поэтому характеристические числа оператора $\mathcal{A}$ являются собственными значениями; однако при этом надо помнить, что только вещественные характеристические

числа соответствуют вещественным решениям $\mathbf{u}=\{x_1, \ldots, x_n\}$ системы (5), т. е. вещественным векторам пространства L^n, являющимся собственными векторами для данного оператора $\mathcal{A}$.

Так, мы уже упоминали, что преобразование плоскости, записывающееся в прямоугольной системе координат равенствами

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

(вращение вокруг начала координат), не имеет (вещественных) собственных векторов; но оно имеет мнимые характеристические числа — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\cos\alpha\cdot\lambda + 1 = 0,$$

а именно:

$$\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha.$$

Во всяком случае все корни, равно как все коэффициенты, многочлена $D(\lambda)$ не зависят от выбора базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, они, как говорят, являются *инвариантами* оператора $\mathcal{A}$ (т. е. числами, определенными, как скоро задан сам оператор $\mathcal{A}$).

Теорема 1. *Всякий линейный оператор $\mathcal{A}$ в векторном пространстве L^n имеет инвариантное подпространство размерности* 1 *или* 2.

Доказательство. Если характеристический многочлен $D(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ имеет хотя бы один вещественный корень [1]), то этот оператор имеет хотя бы один собственный вектор, а следовательно, имеет и одномерное инвариантное подпространство (этим вектором порожденное).

Требуется доказать, что если среди корней многочлена $D(\lambda)$ нет вещественных, то оператор $\mathcal{A}$ имеет двумерное инвариантное подпространство. Это вытекает из следующего вспомогательного предложения.

Лемма. *Если $\lambda_0 = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$, есть корень многочлена $D(\lambda)$, то существуют два линейно независимых вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, которые в своей совокупности порождают инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$ (имеющее, очевидно, размерность* 2).

Итак, остается доказать лишь лемму.

Берем какой-нибудь базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ пространства L^n и подставляем в уравнения (5) значение $\lambda = \lambda_0 = \alpha + \beta i$. Тогда этим уравнениям удовлетворяет набор комплексных чисел [2])

$$x_1 = \xi_1 + i\eta_1, \ldots, x_n = \xi_n + i\eta_n, \tag{7}$$

---

[1]) В частности, если n нечетно.

[2]) Координаты относительно базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ собственного «мнимого» вектора оператора $\mathcal{A}$.

которые не все равны нулю. Отсюда уже следует, что из векторов

$$\mathbf{u} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \xi_n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{v} = \eta_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \eta_n\mathbf{e}_n \tag{8}$$

по крайней мере один отличен от нуля; то, что они оба отличны от нуля и, более того, линейно независимы, будет доказано несколькими строками ниже. Набор комплексных чисел $\{x_1, \ldots, x_n\}$ есть решение системы (5) при $\lambda = \lambda_0$, так что имеет место система числовых тождеств

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}(\xi_1 + i\eta_1) + a_{12}(\xi_2 + i\eta_2) + \ldots + a_{1n}(\xi_n + i\eta_n) = \\
&\qquad = (\alpha + \beta i)(\xi_1 + i\eta_1), \\
&a_{21}(\xi_1 + i\eta_1) + a_{22}(\xi_2 + i\eta_2) + \ldots + a_{2n}(\xi_n + i\eta_n) = \\
&\qquad = (\alpha + \beta i)(\xi_2 + i\eta_2), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}(\xi_1 + i\eta_1) + a_{n2}(\xi_2 + i\eta_2) + \ldots + a_{nn}(\xi_n + i\eta_n) = \\
&\qquad = (\alpha + \beta i)(\xi_n + i\eta_n).
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Приравнивая в этих тождествах соответственно их вещественные и мнимые части, получаем, во-первых, систему тождеств

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n &= \alpha\xi_1 - \beta\eta_1, \\
a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n &= \alpha\xi_2 - \beta\eta_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n &= \alpha\xi_n - \beta\eta_n,
\end{aligned}\right\} \tag{9$_1$}$$

во-вторых, систему тождеств

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \ldots + a_{1n}\eta_n &= \beta\xi_1 + \alpha\eta_1, \\
a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + \ldots + a_{2n}\eta_n &= \beta\xi_2 + \alpha\eta_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{n1}\eta_1 + a_{n2}\eta_2 + \ldots + a_{nn}\eta_n &= \beta\xi_n + \alpha\eta_n,
\end{aligned}\right\} \tag{9$_2$}$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{A}\mathbf{u} &= \alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v}, \\
\mathcal{A}\mathbf{v} &= \beta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Другими словами, векторы $\mathcal{A}\mathbf{u}$ и $\mathcal{A}\mathbf{v}$ принадлежат векторному подпространству $P \subseteq L^n$, порожденному векторами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Докажем, что и $\mathbf{u}$, и $\mathbf{v}$ отличны от нуля. Предположим, что $\mathbf{u} = \mathbf{0}$; тогда, по доказанному, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Вставляя эти значения $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ в первое из равенств (10), получим

$$\mathbf{0} = -\beta\mathbf{v},$$

и так как $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, то $\beta = 0$, что противоречит условию леммы. Пусть теперь $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ и, следовательно, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$; тогда из второго равенства (10)

получим

$$\mathbf{0} = \beta\mathbf{u},$$

откуда снова $\beta = 0$ — вопреки условию леммы.

Докажем, наконец, что векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ линейно независимы. Предположим противное, тогда $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$ при некотором $k \neq 0$ и равенства (10) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{u} &= (\alpha - k\beta)\,\mathbf{u}, \\ \mathcal{A}k\mathbf{u} &= \beta\mathbf{u} + \alpha k\mathbf{u}. \end{aligned}\right\} \qquad (10')$$

Переписывая второе из этих равенств в виде

$$\mathcal{A}\mathbf{u} = \frac{\beta}{k}\,\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u}$$

и вычитая из него первое равенство (10), получим

$$\mathbf{0} = \left(k + \frac{1}{k}\right)\beta\mathbf{u},$$

откуда снова следует $\beta = 0$, что противоречит условию леммы.

Лемма, а следовательно, и теорема 1 доказаны.

§ 2. Ортогональные преобразования n-мерного евклидова пространства

Преобразование (т. е. взаимно однозначное отображение $\mathcal{A}$ евклидова пространства E^n на себя [1])) называется *ортогональным,* если оно сохраняет скалярное произведение, т. е. если для любых двух векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ пространства E^n имеем

$$(\mathcal{A}\mathbf{u},\ \mathcal{A}\mathbf{v}) = (\mathbf{u},\ \mathbf{v}).$$

Из этого определения вытекает, что ортогональное преобразование $\mathcal{A}$ сохраняет скалярные квадраты, а значит, и длины векторов:

$$|\mathcal{A}\mathbf{u}|^2 = (\mathcal{A}\mathbf{u},\ \mathcal{A}\mathbf{u}) = (\mathbf{u},\ \mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2.$$

Докажем следующее предложение.

Теорема 2. *Всякое ортогональное преобразование евклидова пространства E^n есть линейное преобразование, матрица которого в любой ортонормальной системе координат ортогональна.*

Обратно: всякое линейное преобразование пространства E^n, матрица которого хотя бы в одной ортонормальной системе координат ортогональна, является ортогональным.

---

[1]) При этом линейность преобразования $\mathcal{A}$ не предполагается, она будет доказана несколькими строками ниже.

Доказательство. Берем в E^n ортонормальный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Тогда

$$(\mathcal{A}\mathbf{e}_i, \mathcal{A}\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \delta_{ik}$$

— при ортогональном преобразовании ортонормальный базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ переходит в ортонормальный базис $\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{e}_n$. Пусть вектор $\mathbf{u}$ имеет относительно базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ координаты $x_1, \ldots, x_n$; тогда

$$x_i = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и

$$(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathcal{A}\mathbf{e}_i) = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_i) = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

— при преобразовании $\mathcal{A}$ всякий вектор $\mathbf{u}$ переходит в вектор $\mathcal{A}\mathbf{u}$, имеющий относительно базиса $\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{e}_n$ те самые координаты, которые вектор $\mathbf{u}$ имел относительно базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. А это значит (см. гл. XII, § 6), что преобразование $\mathcal{A}$ линейно.

В силу теоремы 2′ главы XXIV линейное преобразование $\mathcal{A}$, переводя ортонормальный базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ в ортонормальный базис $\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{e}_n$, имеет ортогональную матрицу A.

Первое утверждение теоремы 2 доказано.

Доказываем второе утверждение. Пусть линейное преобразование $\mathcal{A}$ пространства E^n имеет ортогональную матрицу; тогда оно (по теореме 2 главы XXIV) переводит любой ортонормальный базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ в ортонормальный базис $\mathbf{e}_1' = \mathcal{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n' = \mathcal{A}\mathbf{e}_n$. Пусть

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n,$$

так что

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Тогда

$$\mathcal{A}\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1' + \ldots + x_n\mathbf{e}_n', \qquad \mathcal{A}\mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1' + \ldots + y_n\mathbf{e}_n'$$

и

$$(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathcal{A}\mathbf{v}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n,$$

что и требовалось доказать.

Так как (по теореме 2 главы XXIV) среди всех линейных преобразований преобразования с ортогональной матрицей и только они переводят ортонормальный базис в ортонормальный базис, то

ортогональные преобразования могут быть определены как линейные преобразования, переводящие один какой-нибудь (и тогда всякий) ортонормальный базис в ортонормальный же базис.

Заметим, наконец:

для ортогональности линейного преобразования пространства E^n достаточно (и, очевидно, необходимо), чтобы оно сохраняло длину каждого вектора $\mathbf{u}$, т. е. чтобы было

$$|\mathcal{A}\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|.$$

В самом деле, пусть это условие выполнено. Тогда $(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathcal{A}\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$ для любого вектора $\mathbf{u}$. Но для любых векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ имеем (гл. XXIV, § 4, формулы (5))

$$2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}) - (\mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\mathbf{v}, \mathbf{v}),$$

значит,

$$2(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathcal{A}\mathbf{v}) = (\mathcal{A}\mathbf{u}+\mathcal{A}\mathbf{v}, \mathcal{A}\mathbf{u}+\mathcal{A}\mathbf{v}) - (\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathcal{A}\mathbf{u}) - (\mathcal{A}\mathbf{v}, \mathcal{A}\mathbf{v}).$$

Так как

$$(\mathcal{A}\mathbf{u}+\mathcal{A}\mathbf{v}, \mathcal{A}\mathbf{u}+\mathcal{A}\mathbf{v}) = (\mathcal{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v}), \mathcal{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v})) = (\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}),$$

$$(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathcal{A}\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}), \qquad (\mathcal{A}\mathbf{v}, \mathcal{A}\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{v}),$$

то

$$2(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathcal{A}\mathbf{v}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}) - (\mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

откуда утверждение следует.

Подведем итог:

Теорема 2′. *Ортогональные отображения характеризуются среди всех линейных отображений $\mathcal{A}$ евклидова пространства E^n каждым из следующих свойств:*

1° *Они сохраняют длины векторов.*

2° *Они переводят ортонормальный базис в ортонормальный.*

3° *Их матрицы относительно любого ортонормального базиса ортонормальны.*

Докажем еще следующие две совсем простые теоремы.

Теорема 3. *Собственные значения ортогонального преобразования $\mathcal{A}$ равны* ± 1.

В самом деле, пусть $\mathbf{u}$ — собственный вектор ортогонального преобразования $\mathcal{A}$ и λ — соответствующее ему собственное значение. Тогда

$$\mathcal{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

и

$$(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathcal{A}\mathbf{u}) = (\lambda\mathbf{u}, \lambda\mathbf{u}) = \lambda^2(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

С другой стороны, в силу ортогональности преобразования $\mathcal{A}$ имеем $(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathcal{A}\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$. Итак, $\lambda^2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$.

Так как $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0$, то $\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm 1$.

Теорема 4. *Пусть E^p — инвариантное подпространство евклидова пространства E^n по отношению к ортогональному отображению $\mathcal{A}$. Тогда ортогональное дополнение E^q к E^p также инвариантно по отношению к $\mathcal{A}$.*

Лемма. *При отображении $\mathcal{A}$ инвариантное подпространство E^p отображается на себя.*

Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$ — какой-нибудь ортонормальный базис инвариантного подпространства E^p. Тогда векторы $\mathbf{e}'_1 = \mathcal{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}'_p = \mathcal{A}\mathbf{e}_p$ лежат в E^p и ортогональны между собою; так как их число

равно p, то они образуют ортонормальный базис пространства E^p. Пусть $\mathbf{w} = x_1\mathbf{e}_1' + \ldots + x_p\mathbf{e}_p'$ — произвольный вектор из E^p; тогда вектор $\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_p\mathbf{e}_p$ также лежит в E^p и $\mathcal{A}\mathbf{u} = \mathbf{w}$. Итак, всякий вектор $\mathbf{w} \in E^p$ является образом $\mathcal{A}\mathbf{u}$ некоторого вектора $\mathbf{u} \in E^p$.

Лемма доказана.

Доказываем теорему 4.

Пусть $\mathbf{v}$ — произвольный вектор из ортогонального дополнения E^q к подпространству E^p. Надо доказать, что $\mathcal{A}\mathbf{v} \in E^q$, т. е. что $(\mathcal{A}\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$, каков бы ни был вектор $\mathbf{u} \in E^p$. Берем вектор $\mathbf{w} \in E^p$ при условии $\mathcal{A}\mathbf{w} = \mathbf{u}$. Тогда $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$, значит, и $(\mathcal{A}\mathbf{v}, \mathcal{A}\mathbf{w}) = 0$, т. е. $(\mathcal{A}\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$, $A\mathbf{v} \in E^q$ при всяком $\mathbf{v} \in E^q$, что и требовалось доказать.

Сделаем, наконец, следующее замечание (относящееся к любым векторным пространствам L^n и к любым линейным отображениям).

Замечание. Пусть пространство L^n есть прямая сумма своих подпространств L_1^p и L_2^{n-p}, каждое из которых инвариантно относительно (произвольного) линейного оператора $\mathcal{A}$. Тогда, взяв базис

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \text{ в } L_1^p \text{ и } \mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \text{ в } L_2^{n-p},$$

получим, как известно, базис

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p; \ \mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \quad \text{пространства } L^n.$$

Покажем, что оператор $\mathcal{A}$ имеет в этом базисе матрицу вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{p+1,\,p+1} & a_{p+1,\,p+2} & \ldots & a_{p+1,\,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{p+2,\,p+1} & a_{p+2,\,p+2} & \ldots & a_{p+2,\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n,\,p+1} & a_{n,\,p+2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В самом деле, так как $\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{e}_p$ лежат в L_1^p (и, значит, являются линейной комбинацией векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$), то имеем при $i = 1, 2, \ldots, p$

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_i = a_{i1}\mathbf{e}_i + \ldots + a_{ip}\mathbf{e}_p + 0 \cdot \mathbf{e}_{p+1} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{e}_n.$$

Точно так же $\mathcal{A}\mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{e}_n$ лежат в L_2^{n-p}, так что при $i = p+1, \ldots, n$ имеем

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_i = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + \ldots + 0 \cdot \mathbf{e}_p + a_{i,\,p+1}\mathbf{e}_{p+1} + \ldots + a_{in}\mathbf{e}_n;$$

отсюда и следует утверждение.

Теперь мы располагаем всеми средствами, чтобы доказать основной результат этого параграфа — теорему о структуре ортогональных преобразований.

Теорема 5. *Для каждого ортогонального преобразования $\mathcal{A}$ евклидова векторного пространства E^n существует ортонормальный базис, в котором матрица A преобразования имеет вид* [1])

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & \begin{matrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{matrix} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \begin{matrix} \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \end{matrix} \end{pmatrix}; \quad (1)$$

все остальные элементы матрицы суть нули.

Доказательство будем вести индукцией по n. При $n=1$ имеем ортогональное преобразование $\mathcal{A}$ одномерного векторного пространства. Так как $|\mathcal{A}\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|$, то

$$\text{или } \mathcal{A}\mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad \text{или } \mathcal{A}\mathbf{u} = -\mathbf{u}.$$

В первом случае матрица преобразования состоит из одного элемента 1, во втором — из элемента -1. При $n=2$ имеем ортогональное преобразование двумерного векторного многообразия. Мы можем его рассматривать как собственное или несобственное движение плоскости, оставляющее неподвижным начало координат O. Как было установлено в § 8 главы XI, такими движениями являются поворот на некоторый угол α, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, вокруг точки O (собственное движение) и отражение относительно некоторой проходящей через точку O прямой, которую можем принять за ось абсцисс (несобственное движение).

В первом случае преобразование $\mathcal{A}$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad (2)$$

[1]) Базис, в котором матрица ортогонального преобразования имеет вид (1), и саму эту матрицу (1) мы называем *каноническими* для данного ортогонального преобразования.

во втором — матрицу

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Итак, при $n\leqslant 2$ теорема доказана.

Предположим, что она доказана для евклидовых пространств E^n размерности $<n$; докажем ее для E^n.

Имеются лишь две возможности:

1° Преобразование $\mathcal{A}$ имеет хотя бы одно вещественное характеристическое число.

2° Вещественных характеристических чисел преобразование $\mathcal{A}$ не имеет.

В случае 1° преобразование $\mathcal{A}$ имеет вещественный собственный вектор, соответствующий (по теореме 3) характеристическому числу $\lambda=\pm 1$. Этот вектор определяет подпространство E_1^1.

Возьмем ортогональное дополнение E_2^{n-1} к инвариантному подпространству E_1^1. Оно также инвариантно по отношению к преобразованию $\mathcal{A}$.

Так как преобразование $\mathcal{A}$, рассматриваемое в E_2^{n-1}, продолжает быть ортогональным, то, согласно предположению индукции, в E_2^{n-1} имеется ортонормальный базис $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, относительно которого матрица преобразования $\mathcal{A}$ (в E_2^{n-1}) имеет канонический вид (1). Взяв в E_1^1 собственный вектор $\mathbf{e}_1$ длины 1, видим, что матрица A_1 преобразования $\mathcal{A}$ в пространстве E_1^1 состоит из одного элемента ± 1. В полученном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ матрица A имеет, согласно замечанию на стр. 733, вид

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm 1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}.$$

Так как A_2 имеет канонический вид (1), то и вся матрица A имеет после необходимого, быть может, изменения нумерации векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ канонический вид.

В случае 2° преобразование $\mathcal{A}$ имеет двумерное инвариантное многообразие E_1^2. В нем имеется ортонормальный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, относительно которого матрица A_1 преобразования $\mathcal{A}$ (рассматриваемого лишь в E_1^2) имеет вид [1])

$$A_1=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Обозначим через E_2^{n-2} ортогональное дополнение к подпространству E_1^2;

[1]) Преобразование $\mathcal{A}$ в E_1^2 не может иметь матрицу $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, так как тогда оно (а следовательно, и преобразование $\mathcal{A}$ всего E^n) имело бы вещественное характеристическое число.

пространство E_2^{n-2} инвариантно относительно преобразования $\mathcal{A}$; следовательно, согласно предположению индукции, в E_2^{n-2} существует базис $\mathbf{e}_3, \ldots, \mathbf{e}_n$, относительно которого преобразование $\mathcal{A}$ (рассматриваемое в E_2^{n-2}) имеет матрицу A_2 канонического вида.

В базисе

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots, \mathbf{e}_n$$

всего пространства E^n преобразование $\mathcal{A}$ имеет матрицу

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|c} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \\ \hline 0 & & A_2 \end{array}\right),$$

которая (даже и без изменения нумерации векторов[1])) имеет канонический вид.

Теорема 5 доказана.

§ 3. Движения трехмерного евклидова пространства

В случае $n=3$ получаем следующие возможности для матрицы ортогонального преобразования («нормальные формы ортогональных матриц третьего порядка»):

1°_0. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — тождественное преобразование

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

2°_0. $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — несобственное преобразование

$$\begin{aligned} x' &= -x, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned}$$

т. е. отражение относительно плоскости Oyz.

---

[1]) Дело в том, что элементы ± 1 на главной диагонали матрицы A появляются лишь при наличии вещественных характеристических чисел. В данном случае их нет, а потому матрица A_2 вся состоит из «ящиков» второго порядка, откуда, в частности, следует, что ее порядок, а значит, и число n четны.

1°_π. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ — собственное преобразование

$$\begin{aligned} x' &= x,\\ y' &= -y,\\ z' &= -z, \end{aligned}$$

т. е. поворот на угол π вокруг оси Ox (**отражение относительно этой оси**).

1°_α. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ — собственное преобразование

$$\begin{aligned} x' &= x,\\ y' &= y\cos\alpha - z\sin\alpha,\\ z' &= y\sin\alpha + z\cos\alpha, \end{aligned}$$

т. е. поворот вокруг оси Ox на угол α; преобразования 1°_0 и 1°_π являются частными случаями преобразования 1°_α, получающимися соответственно при $\alpha=0$ и $\alpha=\pi$.

2°_α. $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ — несобственное преобразование

$$\begin{aligned} x' &= -x,\\ y' &= y\cos\alpha - z\sin\alpha,\\ z' &= y\sin\alpha + z\cos\alpha, \end{aligned}$$

т. е. поворот вокруг оси Ox на угол α, соединенный с отражением относительно плоскости Oyz. В частности, при $\alpha=0$ получаем чистое отражение 2°_0:

$$\begin{aligned} x' &= -x,\\ y' &= y,\\ z' &= z \end{aligned}$$

относительно плоскости Oyz, а при $\alpha=\pi$ — преобразование

$$\begin{aligned} x' &= -x,\\ y' &= -y,\\ z' &= -z, \end{aligned}$$

т. е. отражение относительно точки O.

Замечание. Для многообразия инвариантных векторов получаем следующие возможности. Оно в случае

1°_0 трехмерно,

1°_α (при любом $\alpha \neq 0$) одномерно,

2°_0 двумерно,

2°_α (при любом $\alpha \neq 0$) нульмерно.

Итак, *при всех собственных ортогональных преобразованиях трехмерного пространства многообразие инвариантных векторов имеет нечетную размерность* 1 *или* 3, *а при несобственных — четную размерность* 2 *или* 0.

Естественно, что это замечание сохраняет свою силу для всех движений трехмерного пространства (так как любое движение порождает ортогональное преобразование многообразия всех векторов пространства).

Переходим к классификации движений трехмерного пространства.

Всякое движение трехмерного пространства в произвольной прямоугольной системе координат записывается в виде

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + c, \end{aligned}$$

где матрица A коэффициентов a_{ik} ортогональна. Имея в виду только что полученные нормальные формы ортогональных матриц третьего порядка, мы можем всякое движение в некоторой прямоугольной координатной системе записать в одном из следующих видов:

Случай 1°.

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y\cos\alpha - z\sin\alpha + b, \\ z' &= y\sin\alpha + z\cos\alpha + c. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Перенесем начало координат в точку $O' = (0, y_0, z_0)$, где y_0, z_0 определяются из уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_0\cos\alpha - z_0\sin\alpha + b &= y_0, \\ y_0\sin\alpha + z_0\cos\alpha + c &= z_0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} (\cos\alpha - 1)\,y_0 - \sin\alpha\cdot z_0 &= -b, \\ \sin\alpha\cdot y_0 + (\cos\alpha - 1)\,z_0 &= -c. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Детерминант системы (3) есть $(\cos\alpha - 1)^2 + \sin^2\alpha$; он равен нулю, лишь когда одновременно $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$; в этом случае

формулы (1) превращаются в

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y + b, \\ z' &= z + c \end{aligned}\right\} \qquad (1_0)$$

и определяют сдвиг пространства на вектор $\mathbf{u}_0 = \{a, b, c\}$. Во всех остальных случаях из уравнений (2) значения y_0, z_0 определяются однозначно, так что определено и преобразование координат

$$\begin{aligned} x &= \xi, \\ y &= \eta + y_0, \\ z &= \zeta + z_0, \end{aligned}$$

означающее перенос начала координат в точку $O' = (0, y_0, z_0)$ с сохранением единичных векторов исходной прямоугольной координатной системы. В новой системе координат движение (1) запишется в виде

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi + a, \\ \eta' + y_0 &= \eta\cos\alpha - \zeta\sin\alpha + (y_0\cos\alpha - z_0\sin\alpha + b), \\ \zeta' + z_0 &= \eta\sin\alpha + \zeta\cos\alpha + (y_0\sin\alpha + z_0\cos\alpha + c), \end{aligned}$$

т. е., ввиду тождеств (2), в виде

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \xi + a, \\ \eta' &= \eta\cos\alpha - \zeta\sin\alpha, \\ \zeta' &= \eta\sin\alpha + \zeta\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Это — поворот вокруг оси $O'\xi$ на угол α, соединенный со сдвигом вдоль этой же оси на вектор $\mathbf{u}_0 = (a, 0, 0)$. При $\alpha = 0$ получаем чистый сдвиг

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi + a, \\ \eta' &= \eta, \\ \zeta' &= \zeta; \end{aligned}$$

при $a = 0$ получаем чистый поворот

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi, \\ \eta' &= \eta\cos\alpha - \zeta\sin\alpha, \\ \zeta' &= \eta\sin\alpha + \zeta\cos\alpha. \end{aligned}$$

Сдвиг вдоль прямой, соединенный с вращением вокруг этой же прямой, называется в механике *винтовым движением*.

Итак, в случае 1° получаем винтовое движение.

Случай 2°.

$$\left.\begin{aligned} x' &= -x + a, \\ y' &= y + b, \\ z' &= z + c. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Перейдем к новой прямоугольной координатной системе, оставив единичные векторы прежними и перенося начало координат в точку $O'=\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$. Другими словами, сделаем преобразование координат

$$x=\xi+\frac{a}{2}, \quad y=\eta, \quad z=\zeta.$$

В новой системе координат движение (5) запишется в виде

$$\begin{aligned} \xi'+\frac{a}{2} &= -\left(\xi+\frac{a}{2}\right)+a, \\ \eta' &= \eta+b, \\ \zeta' &= \zeta+c, \end{aligned}$$

т. е. в виде

$$\xi'=-\xi, \quad \eta'=\eta+b, \quad \zeta'=\zeta+c.$$

Оно представляет собою отражение относительно плоскости $O'\eta\zeta$, соединенное со сдвигом вдоль этой плоскости на вектор $\mathbf{u}_0=\{0, b, c\}$.

Случай 3°.

$$\left.\begin{aligned} x' &= -x+a, \\ y' &= y\cos\alpha-z\sin\alpha+b, \\ z' &= y\sin\alpha+z\cos\alpha+c. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Перейдем опять к новой прямоугольной координатной системе с теми же единичными векторами и с началом $O'=\left(\frac{a}{2}, y_0, z_0\right)$, где y_0, z_0 определяются из уравнений (2)[1]), т. е. сделаем преобразование координат

$$x=\xi+\frac{a}{2}, \quad y=\eta+y_0, \quad z=\zeta+z_0.$$

В новой системе координат движение (6) получит запись

$$\begin{aligned} \xi' &= -\xi, \\ \eta' &= \eta\cos\alpha-\zeta\sin\alpha, \\ \zeta' &= \eta\sin\alpha+\zeta\cos\alpha, \end{aligned}$$

из которой видно, что оно представляет собою отражение относительно плоскости $O\eta\zeta$, соединенное с поворотом вокруг оси $O\xi$ на угол α. Итак, доказана следующая

---

[1]) Если уравнения (3), эквивалентные уравнениям (2), имеют детерминант, равный нулю, то $\cos\alpha=1$, $\sin\alpha=0$ и преобразование (6) имеет вид $x'=-x+a$, $y'=y+b$, $z'=z+c$. Тогда достаточно сделать преобразование $x=\xi+\frac{a}{2}$, $y=\eta$, $z=\zeta$, чтобы представить движение (6) в виде $\xi'=-\xi$, $\eta'=\eta+b$, $\zeta'=\zeta+c$. Мы имеем только что разобранный случай отражения относительно плоскости $O'\eta\zeta$, соединенного со сдвигом вдоль этой плоскости на вектор $\mathbf{u}_0=\{0, b, c\}$.

Теорема 6. *Имеются лишь следующие движения трехмерного пространства:*

I. *Собственные движения:*

1. *Винтовое движение, т. е. сдвиг вдоль некоторой прямой d, соединенный с поворотом вокруг этой же прямой; это движение включает как частные случаи чистый сдвиг вдоль прямой d и чистый поворот вокруг прямой d (в частности, и поворот на угол π, т. е. отражение относительно прямой d).*

II. *Несобственные движения:*

2. *Отражение относительно некоторой плоскости π, соединенное со сдвигом на вектор $\mathbf{u}_0$, компланарный этой плоскости; в частности, при $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ чистое отражение относительно плоскости π.*

3. *Отражение относительно некоторой плоскости π, соединенное с поворотом вокруг прямой d, перпендикулярной к плоскости π, на некоторый угол α, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$; в частности, при $\alpha = \pi$ отражение относительно некоторой точки (точки пересечения плоскости π и прямой d).*

Выше (замечание на стр. 738) уже было выяснено, какое у каждого из этих движений имеется многообразие инвариантных векторов; читателю предоставляется самому определить множество неподвижных точек движений каждого из перечисленных типов.

§ 4. Преобразования подобия. Дальнейшие проблемы

Ортогональные преобразования характеризуются тем, что оставляют неизменной длину любого вектора. Их ближайшим и естественным обобщением являются преобразования *подобия*, т. е. линейные преобразования $\mathcal{A}$, при которых длина каждого вектора $\mathbf{u}$ умножается на одно и то же положительное число λ:

$$|\mathcal{A}\mathbf{u}| = \lambda |\mathbf{u}| \quad \text{(для любого вектора } \mathbf{u}\text{)}.$$

Число λ называется при этом коэффициентом подобия. Для случая трехмерного пространства преобразования подобия рассматривались в главе XI.

Частным случаем преобразований подобия являются так называемые *гомотетические преобразования* (*гомотетии*) с коэффициентом λ, т. е. линейные преобразования вида

$$\mathcal{H}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (\text{где } \lambda \neq 0 \text{ одно и то же для всех } \mathbf{u} \in E^n).$$

Таким образом, гомотетии суть линейные преобразования, для которых все векторы являются собственными с одним и тем же собственным значением $\lambda \neq 0$ (*коэффициент гомотетии*). Гомотетия называется также *растяжением* (или *сжатием*) *пространства*[1]).

[1]) Естественно при $\lambda > 1$ говорить о растяжениях, при $\lambda < 1$ — о сжатиях; при $\lambda = 1$ имеем тождественное преобразование. Мы будем употреблять термин растяжение (во всех случаях).

Очевидно, в любом базисе $e_1, \ldots, e_n$ гомотетия $\mathcal{H}_\lambda$ с коэффициентом λ имеет матрицу

$$H_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E.$$

Как известно, матрица называется *диагональной*, если все ее отличные от нуля элементы расположены на главной диагонали. Диагональная матрица, у которой все лежащие на главной диагонали элементы равны между собою, называется *скалярной*. Таковой и является матрица H_λ.

Докажем следующее предложение.

Теорема 7. *Всякое подобное преобразование $\mathcal{A}$ с коэффициентом подобия λ является произведением растяжения $\mathcal{H}_\lambda$ с тем же коэффициентом λ и некоторого ортогонального преобразования $\mathcal{B}$; при этом порядок множителей $\mathcal{H}_\lambda$ и $\mathcal{B}$ безразличен* [1]).

В самом деле, имеем, очевидно,

$$(\mathcal{H}_\lambda)^{-1} = \mathcal{H}_{\frac{1}{\lambda}}.$$

Рассмотрим преобразование $(\mathcal{H}_\lambda)^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{B}$; имеем для любого вектора $\mathbf{u}$

$$\mathcal{B}\mathbf{u} = (\mathcal{H}_\lambda)^{-1}\mathcal{A}\mathbf{u} = \frac{1}{\lambda}\mathcal{A}\mathbf{u}, \quad \lambda > 0,$$

так что

$$|\mathcal{B}\mathbf{u}| = \frac{1}{\lambda}\lambda|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|,$$

откуда следует, что $\mathcal{B}$ — ортогональное преобразование; из определения преобразования $\mathcal{B} = (\mathcal{H}_\lambda)^{-1}\mathcal{A}$ следует

$$\mathcal{A} = \mathcal{H}_\lambda\mathcal{B},$$

что и требовалось доказать.

Естественным обобщением гомотетических преобразований являются преобразования $\mathcal{A}$, матрица которых (в некоторой ортонормальной системе координат) есть диагональная матрица

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

[1]) Так как для любой матрицы B и скалярной матрицы C имеем, очевидно, $BC = CB$.

Особенно наглядный геометрический смысл имеют среди этих преобразований $\mathcal{A}$ те, в матрице (1) которых все λ_i положительны. Можно сказать, что рассматриваемые преобразования $\mathcal{A}$ слагаются из n растяжений (с, вообще говоря, различными коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$) вдоль взаимно перпендикулярных направлений.

В самом деле, преобразование с матрицей (1) является, очевидно, произведением n преобразований $\mathcal{A}_i$ с матрицами

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda_i & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

каждое из которых при $\lambda_i > 0$ естественно называть *растяжением с коэффициентом* λ_i *вдоль оси координат, несущей вектор* $\mathbf{e}_i$.

Возникает вопрос: какие преобразования можно получить перемножением таких «многократных» растяжений и ортогонального преобразования? Ответ на этот вопрос очень сильный. Оказывается, *все* линейные (т. е. *все аффинные*) преобразования евклидовых пространств можно получить таким образом! Этот фундаментальный результат является непосредственным обобщением теоремы 13 главы XVII об аффинных отображениях плоскости. Он будет доказан в § 6; доказательство опирается на важные и интересные понятия и теоремы, которыми мы и займемся в следующем параграфе.

§ 5. Самосопряженные операторы

Мы теперь будем говорить не только о преобразованиях, но и просто о линейных отображениях пространства E^n в себя, о линейных операторах в E^n.

Прежде всего напомним, что в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ матрица A оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда имеет диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

когда векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, составляющие этот базис, являются собственными векторами преобразования $\mathcal{A}$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственными значениями этих собственных векторов. При этом $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

могут быть какими угодно вещественными числами (среди них могут быть и нули).

Пусть в каком-нибудь ортонормальном базисе матрица A преобразования $\mathcal{A}$ есть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Это значит, что

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_i = a_{1i}\mathbf{e}_1 + a_{2i}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{ki}\mathbf{e}_k + \dots + a_{ni}\mathbf{e}_n \tag{3}$$

для всех $i=1, 2, \dots, n$, т. е. что

$$(\mathcal{A}\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_k) = a_{ki} \text{ (для любых } i,\ k=1,\ 2,\ \dots,\ n). \tag{$4_{i,k}$}$$

Поэтому, если $\mathcal{A}^*$ есть преобразование, задаваемое в том же базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ матрицей A^*, транспонированной к матрице A, то для любых i, k имеем

$$(\mathcal{A}^*\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_k) = a_{ik} \tag{$4^*_{i,k}$}$$

(k-я координата вектора $\mathcal{A}^*\mathbf{e}_i$ равна a_{ik}, чем отображение $\mathcal{A}^*$ определено однозначно).

Равенства $(4_{i,k})$ и $(4^*_{i,k})$ в своей совокупности эквивалентны одному равенству

$$(\mathcal{A}^*\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_i,\ \mathcal{A}\mathbf{e}_k), \tag{5*}$$

означающему, что k-я координата вектора $\mathcal{A}^*\mathbf{e}_i$ равна i-й координате вектора $\mathcal{A}\mathbf{e}_k$ (это и значит, что матрицы преобразований $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$ в базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ транспонированы друг другу).

Если теперь $\mathbf{u}=\sum x_i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{v}=\sum y_k\mathbf{e}_k$, то

$$(\mathcal{A}^*\mathbf{u},\ \mathbf{e}_k) = \sum_i x_i\,(\mathcal{A}^*\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_k) = \sum_i x_i\,(\mathbf{e}_i,\ \mathcal{A}\mathbf{e}_k) = \Big(\sum_i x_i\mathbf{e}_i,\ \mathcal{A}\mathbf{e}_k\Big) = (\mathbf{u},\ \mathcal{A}\mathbf{e}_k)$$

и, далее,

$$(\mathcal{A}^*\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \sum_k y_k\,(\mathcal{A}^*\mathbf{u},\ \mathbf{e}_k) = \sum_k y_k\,(\mathbf{u},\ \mathcal{A}\mathbf{e}_k) =$$
$$= \Big(\mathbf{u},\ \sum_k y_k\mathcal{A}\mathbf{e}_k\Big) = \Big(\mathbf{u},\ \mathcal{A}\sum_k y_k\mathbf{e}_k\Big) = (\mathbf{u},\ \mathcal{A}\mathbf{v}).$$

Итак, если в каком-нибудь ортонормальном базисе операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ имеют взаимно транспонированные матрицы A и A^*, то они связаны соотношением

$$(\mathcal{A}^*\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = (\mathbf{u},\ \mathcal{A}\mathbf{v}) \text{ (для любых векторов } \mathbf{u},\ \mathbf{v}), \tag{5}$$

не зависящим, очевидно, от выбора того или иного базиса пространства E^n.

Обратно, если операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ связаны условием (5), то, каков бы ни был ортонормальный базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, подставляя в (5)

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v} = \mathbf{e}_k,$$

получим соотношение

$$(\mathcal{A}^*\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_i, \mathcal{A}\mathbf{e}_k), \tag{5*}$$

показывающее, что оператор $\mathcal{A}^*$ в этом базисе имеет матрицу, транспонированную к матрице A оператора $\mathcal{A}$. Отсюда следует, что если дан оператор $\mathcal{A}$, то соотношение (5) определяет *единственный* оператор $\mathcal{A}^*$, этому соотношению удовлетворяющий.

Определение 3. Пусть дан оператор $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве E^n. Единственный оператор $\mathcal{A}^*$, удовлетворяющий соотношению (5), называется *оператором, сопряженным к оператору* $\mathcal{A}$.

Переписывая (5) в виде

$$(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathcal{A}^*\mathbf{v}),$$

замечаем, что оператор, сопряженный к оператору $\mathcal{A}^*$, есть оператор $\mathcal{A}$:

$$(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A},$$

т. е. что отношение сопряженности есть отношение симметричное: $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ *сопряжены между собою.*

Мы доказали следующий факт.

Теорема 8. *Если матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ в каком-нибудь ортонормальном базисе транспонированы друг к другу, то операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ являются сопряженными между собою, и тогда их матрицы взаимно транспонированы в любом ортонормальном базисе.*

Определение 4. Оператор $\mathcal{A}$ называется *самосопряженным* (или *симметричным*), если он совпадает со своим сопряженным оператором

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*,$$

т. е. если

$$(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathcal{A}\mathbf{v}). \tag{6}$$

Из предыдущего следует, что оператор $\mathcal{A}$ является самосопряженным, если в каком-нибудь (и тогда *во всяком*) ортонормальном базисе он имеет симметричную матрицу.

Теперь предстоит доказать фундаментальное предложение.

Теорема 9. *Для всякого самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ имеется ортонормальный базис, относительно которого матрица этого оператора имеет диагональный вид.*

Доказательству теоремы 9 предпошлем несколько теорем о собственных векторах и собственных значениях самосопряженных операторов.

Теорема 10[1]. *Два собственных вектора* $\mathbf{u}_1$ *и* $\mathbf{u}_2$ *самосопряженного оператора* $\mathcal{A}$, *которым соответствуют различные собственные значения* $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *ортогональны между собою.*

В самом деле,

$$(\mathcal{A}\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_1) = (\mathbf{u}_2,\ \mathcal{A}\mathbf{u}_1) = (\mathcal{A}\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2),$$

так что

$$(\mathcal{A}\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_1) - (\mathcal{A}\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2) = 0.$$

С другой стороны, $\mathcal{A}\mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_2$, $\mathcal{A}\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1$ и

$$0 = (\mathcal{A}\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_1) - (\mathcal{A}\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2) = \lambda_2\,(\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_1) - \lambda_1\,(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2) = (\lambda_2 - \lambda_1)\,(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2).$$

Так как $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, то $(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2) = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 11. *Все характеристические числа самосопряженного оператора* $\mathcal{A}$ *вещественны.*

Первое доказательство теоремы 11. Берем в пространстве E^n какой-нибудь ортогональный базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и обозначаем через A матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Каждому вектору $\mathbf{u} \in E^n$ соответствует набор чисел $x_1, \ldots, x_n$ его координат, и мы пишем

$$\mathbf{u} = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Пусть

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \beta \neq 0,$$

— характеристическое число оператора $\mathcal{A}$.

Подставляя $\lambda = \lambda_1$ в систему уравнений, определяющую собственные векторы:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_1)\,x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0,\\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_1)\,x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\

если

$$\mathbf{u}=\{x_1,\ \ldots,\ x_n\},\quad \mathbf{v}=\{y_1,\ \ldots,\ y_n\}.$$

Все свойства скалярного произведения сохраняются, кроме одного: скалярный квадрат $(\mathbf{u},\ \mathbf{u})$ мнимого вектора может не быть положительным [1]).

Так как доказательство теоремы 10 от этого свойства не зависит, то теорема 10 сохраняет свою силу и для «мнимых» векторов.

Характеристический многочлен $D(\lambda)$ есть многочлен с вещественными коэффициентами; поэтому, если комплексное число

$$\lambda_1=\alpha+\beta i,\quad \beta\neq 0,$$

является корнем характеристического многочлена $D(\lambda)$, то сопряженное число

$$\lambda_2=\alpha-\beta i$$

также является корнем многочлена $D(\lambda)$. Отсюда следует, что, решая систему уравнений (7) (сначала при $\lambda=\lambda_1$, затем при $\lambda=\lambda_2$), получим два комплексных собственных вектора $\mathbf{u}_1$ (при $\lambda=\lambda_1$) и $\mathbf{u}_2$ (при $\lambda=\lambda_2$), соответствующие координаты которых будут комплексно-сопряженными числами, так что

$$\mathbf{u}_1=\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\},$$
$$\mathbf{u}_2=\{\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_n\}.$$

Векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$, как соответствующие различным характеристическим числам, должны иметь скалярное произведение $(\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2)=0$, т. е.

$$x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2+\ldots+x_n\bar{x}_n=0 \tag{8}$$

или

$$|x_1|^2+|x_2|^2+\ldots+|x_n|^2=0,$$

где $|x_1|$, $|x_2|$, $\ldots$, $|x_n|$ суть модули комплексных чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n, т. е. неотрицательные числа. Поэтому из равенства (8) следует, что $|x_1|=|x_2|=\ldots=|x_n|=0$, значит, и $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, т. е. вектор $\mathbf{u}_1$ — нулевой вектор, тогда как мы имели собственный, т. е. ненулевой, вектор $\mathbf{u}$ оператора $\mathcal{A}$. Полученное противоречие доказывает теорему 11.

Второе доказательство теоремы 11. Это доказательство тоже проведем от противного. Пусть $\lambda=\alpha+\beta i$, $\beta\neq 0$,— характеристическое число оператора $\mathcal{A}$. По теореме 1 (§ 1) оператор $\mathcal{A}$ имеет двумерное инвариантное подпространство, порождаемое

---

[1]) В дальнейшем мы, как раньше, будем рассматривать скалярное произведение *лишь* для действительных векторов.

векторами $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, удовлетворяющими соотношениям

$$\mathcal{A}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v},$$
$$\mathcal{A}\mathbf{v} = \beta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}.$$

Имеем

$$(\mathcal{A}\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) - \beta(\mathbf{v},\ \mathbf{v}),$$
$$(\mathcal{A}\mathbf{v},\ \mathbf{u}) = \beta(\mathbf{u},\ \mathbf{u}) + \alpha(\mathbf{v},\ \mathbf{u}).$$

В силу самосопряженности оператора $\mathcal{A}$ имеем

$$(\mathcal{A}\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = (\mathbf{u},\ \mathcal{A}\mathbf{v}),$$

т. е.

$$\alpha(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) - \beta(\mathbf{v},\ \mathbf{v}) = \beta(\mathbf{u},\ \mathbf{u}) + \alpha(\mathbf{v},\ \mathbf{u}),$$

или

$$\beta(|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2) = 0,$$

что, так как $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 \neq 0$, означает $\beta = 0$ — вопреки предположению. Теорема 11 доказана.

Теорема 12. *Пусть $P = E^p$ — подпространство пространства E^n, инвариантное относительно самосопряженного оператора $\mathcal{A}$. Тогда ортогональное дополнение $Q = E^q$ к подпространству P также инвариантно относительно $\mathcal{A}$.*

Теорема 12 содержится, очевидно, в следующем предложении.

Теорема 12′. *Если $\mathcal{A}$ — какой-нибудь оператор в E^n, имеющий $P = E^p$ своим инвариантным подпространством, то ортогональное дополнение $Q = E^q$ есть инвариантное подпространство сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$.*

В самом деле, пусть $\mathbf{v}$ — произвольный вектор из Q, а $\mathbf{u}$ — произвольный вектор из P. Так как P инвариантно относительно $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}\mathbf{u} \in P$,

$$(\mathcal{A}^*\mathbf{v},\ \mathbf{u}) = (\mathbf{v},\ \mathcal{A}\mathbf{u}) = 0,$$

т. е. $\mathcal{A}^*\mathbf{v} \in Q$, что и требовалось доказать.

Из теорем 11 и 12 основная теорема 9 следует в двух словах.

Она, как мы знаем, может быть сформулирована так: каков бы ни был самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве E^n, существует ортонормальный базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ этого пространства, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Докажем эту теорему посредством индукции. При $n = 1$ она очевидна: всякий вектор $\mathbf{e}$ длины 1 образует в E^1 ортогональный базис и является собственным вектором любого оператора $\mathcal{A}$.

Предполагая теорему доказанной для $n - 1$, докажем ее для n. Пусть характеристические числа оператора $\mathcal{A}$ в E^n (вещественные

в силу теоремы 11 [1]) суть

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n.$$

Возьмем одно из них, например λ_n. Пусть $\mathbf{e}_n$ — собственный вектор длины 1, соответствующий числу λ_n. Он порождает одномерное, инвариантное для $\mathcal{A}$ подпространство $P = E^1$. Ортогональное дополнение к P обозначим через $Q = E^{n-1}$. По теореме 12 подпространство Q инвариантно относительно $\mathcal{A}$; поэтому, рассматривая $\mathcal{A}$ как оператор, действующий в Q, можно (по предположению индукции) найти в Q базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Тогда векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{e}_n$ образуют базис пространства E^n, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 9 доказана.

§ 6. Теорема о структуре произвольного линейного преобразования евклидова пространства

Эта теорема уже была сформулирована в конце § 4. Повторим эту формулировку.

Теорема 13. *Всякое линейное преобразование $\mathcal{A}$ [2]) евклидова пространства E^n может быть представлено в виде произведения ортогонального преобразования и самосопряженного преобразования, имеющего в некотором базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ матрицу*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

в которой все λ_i положительны.

Доказательство опирается на две леммы.

Лемма 1. *Для любых двух операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеем*

$$(\mathcal{AB})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*. \tag{2}$$

Доказательство. Тождество (2) следует из тождества $(AB)^* = B^*A^*$ для матриц (доказанного в главе VIII, § 2). Из доказанного вытекает

Следствие. *Произведение двух самосопряженных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ тогда и только тогда является самосопряженным, когда эти операторы переместительны при умножении.*

---

[1]) В остальном — какие угодно: среди них могут быть равные между собою, могут быть равные нулю.

[2]) Невырожденный линейный оператор.

В самом деле, если $\mathcal{A}=\mathcal{A}^*$, $\mathcal{B}=\mathcal{B}^*$, то

$$(\mathcal{AB})^*=\mathcal{BA},$$

и, значит, $(\mathcal{AB})^*=\mathcal{AB}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{BA}=\mathcal{AB}$.

Лемма 2. *Для всякого линейного преобразования $\mathcal{A}$ пространства E^n преобразование $\mathcal{D}=\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ (равно как и $\mathcal{D}'=\mathcal{A}\mathcal{A}^*$) является самосопряженным с положительными характеристическими числами.*

В самом деле, по лемме 1 имеем

$$\mathcal{D}^*=(\mathcal{A}^*\mathcal{A})^*=\mathcal{A}^*\mathcal{A}=\mathcal{D}.$$

Оператор $\mathcal{D}$ является самосопряженным.

Докажем, что его характеристические числа положительны.

Пусть $\mathbf{u}$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, соответствующий собственному значению λ. Тогда

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}.$$

Почленно скалярное умножение этого равенства на $\mathbf{u}$ дает

$$(\mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathbf{u},\ \mathbf{u})=\lambda\,(\mathbf{u},\ \mathbf{u})$$

или

$$(\mathcal{A}\mathbf{u},\ \mathcal{A}\mathbf{u})=\lambda\,(\mathbf{u},\ \mathbf{u}).$$

Так как и $(\mathcal{A}\mathbf{u},\ \mathcal{A}\mathbf{u})>0$, и $(\mathbf{u},\ \mathbf{u})>0$, то и $\lambda>0$.

Лемма 2 доказана.

Пусть теперь $\mathcal{A}$ — произвольное линейное преобразование пространства E^n. Рассматриваем самосопряженный оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}=\mathcal{D}$ и строим для него ортонормальный базис из его собственных векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. В этом базисе оператор $\mathcal{D}$ имеет матрицу (1) с положительными λ_i. Обозначим через $\mathcal{C}$ преобразование, имеющее в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ матрицу

$$C=\begin{pmatrix} +\sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & +\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Очевидно,

$$C^2=D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\end{pmatrix}=(C^{-1})^*.$$

Рассмотрим преобразование

$$\mathcal{B}=\mathcal{A}\mathcal{C}^{-1}.$$

Тогда

$$\mathcal{A}=\mathcal{B}\mathcal{C}.$$

При этом $\mathcal{C}$ по самому своему определению есть самосопряженное преобразование, и базисные векторы являются для $\mathcal{C}$ собственными векторами с положительными собственными значениями.

Остается доказать, что $\mathcal{B}$ — ортогональное преобразование, т. е. что $\mathcal{B}^*\mathcal{B}=\mathcal{E}$.

Имеем

$$\mathcal{B}^*\mathcal{B}=(\mathcal{A}\mathcal{C}^{-1})^*\cdot\mathcal{A}\mathcal{C}^{-1}=(\mathcal{C}^{-1})^*\mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathcal{C}^{-1}.$$

Но $(\mathcal{C}^{-1})^*=\mathcal{C}^{-1}$, а $\mathcal{A}^*\mathcal{A}=\mathcal{D}$, поэтому

$$\mathcal{B}^*\mathcal{B}=\mathcal{C}^{-1}\mathcal{D}\mathcal{C}^{-1}=\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}^2\mathcal{C}^{-1}=\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}=\mathcal{E},$$

чем все доказано.

Помня, что было сказано в §§ 2 и 3 о геометрической структуре ортогональных преобразований и преобразований, имеющих в каком-либо ортонормальном базисе матрицу (1) с положительным λ_i, мы можем следующим образом переформулировать только что доказанную теорему.

Теорема 13′. *Любое линейное преобразование $\mathcal{A}$ векторного евклидова пространства есть произведение преобразований, каждое из которых есть*

либо симметрия (относительно $(n-1)$-мерного пространства),

либо поворот,

либо сжатия (растяжения), причем сжатия происходят вдоль взаимно перпендикулярных осей.

Аффинные преобразования n-мерного точечно-векторного евклидова пространства E^n, оставляющие неподвижной какую-нибудь точку O (которую берем за начало координат прямоугольного репера $O\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$), естественным образом отождествляются с линейными преобразованиями соответствующего векторного пространства.

Но всякое аффинное преобразование $\mathcal{A}$ пространства E^n может быть представлено в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{D}^{-1}\mathcal{A}'\mathcal{D},$$

где $\mathcal{A}'$ есть преобразование, оставляющее неподвижной некоторую точку O' пространства, а $\mathcal{D}$ есть сдвиг всего пространства на некоторый вектор $\mathbf{u}$ (т. е. преобразование, ставящее в соответствие каждой точке M точку, для которой $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \mathbf{u}$). В самом деле, пусть при аффинном преобразовании $\mathcal{A}$ точка O (начало координат) переходит в некоторую точку O'. Тогда, обозначая через $\mathcal{D}$ сдвиг пространства E^n на вектор $\mathbf{u}_0 = \overrightarrow{OO'}$, видим, что при преобразовании

$$\mathcal{A}' = \mathcal{D}\mathcal{A}\mathcal{D}^{-1}$$

точка O остается неподвижной и $\mathcal{A} = \mathcal{D}^{-1}\mathcal{A}'\mathcal{D}$. Из доказанного следует

Теорема 14. *Всякое аффинное преобразование точечно-векторного n-мерного евклидова пространства есть произведение преобразований, каждое из которых является одним из следующих элементарных преобразований*:

сдвиг (*на некоторый вектор*),

симметрия (*относительно некоторой* $(n-1)$*-мерной плоскости*),

поворот на некоторый угол α, $0 \leqslant \alpha < \pi$,

сжатие (*растяжение*),

причем сжатия, если их несколько, происходят вдоль взаимно перпендикулярных осей.

§ 7. Билинейные и квадратичные формы в евклидовых пространствах

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 15. *Пусть в евклидовом пространстве E^n дана симметричная билинейная функция $\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Тогда в E^n существует ортонормальный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, в котором функция $\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ записывается в каноническом виде*:

$$\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \lambda_1 x_1 y_1 + \ldots + \lambda_n x_n y_n \quad \text{для} \quad \begin{cases} \mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n. \end{cases} \tag{1}$$

Доказательство основывается на следующей лемме, представляющей и самостоятельный интерес.

Лемма. *Если билинейная функция*[1]) $\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *и линейный оператор $\mathcal{A}$, определенные в евклидовом пространстве E^n, имеют в каком-*

[1]) Быть может, и не симметричная.

нибудь ортонормальном базисе $\mathbf{e}=[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n]$ *одну и ту же матрицу* $A_{\mathbf{e}}$, *то и во всяком ортонормальном базисе* $\mathbf{e}'=[\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n]$ *они будут иметь одну и ту же матрицу* $A_{\mathbf{e}'}$.

В самом деле, пусть матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{e}'$ есть C. Тогда матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{e}'$ есть

$$C^{-1}A_{\mathbf{e}}\,C=A_{\mathbf{e}'};$$

что же касается билинейной функции $\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, то, имея в базисе $\mathbf{e}$, по предположению, матрицу $A_{\mathbf{e}}$, она будет иметь в базисе $\mathbf{e}'$ матрицу

$$C^*A_{\mathbf{e}}\,C.$$

Но C (как матрица перехода от одного ортонормального базиса к другому) есть ортогональная матрица, поэтому $C^*=C^{-1}$, и билинейная функция $\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ имеет в базисе $\mathbf{e}'$ ту же матрицу $A_{\mathbf{e}'}$, что и оператор $\mathcal{A}$.

Замечание 1. Из доказательства этой леммы ясна существенность предположения, что базисы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ ортонормальны: в противном случае матрица C не была бы ортогональна, следовательно, C^* не совпадала бы с C^{-1} и все рассуждения были бы несправедливы. Интерес леммы состоит в том, что она позволяет установить *естественное* взаимно однозначное соответствие между всеми билинейными формами, с одной стороны, и всеми линейными операторами, с другой стороны (определенными в данном евклидовом пространстве E^n): соответствующими друг другу считаются форма Ω и оператор $\mathcal{A}$, имеющие в каком-нибудь (и тогда во всяком) ортонормальном базисе одну и ту же матрицу.

Из теоремы 9 и только что доказанной леммы теорема 15 вытекает в двух словах.

Пусть в пространстве E^n дана симметричная билинейная функция $\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})$; пусть A — ее (симметричная) матрица (в каком-нибудь ортонормальном базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$); пусть $\mathcal{A}$ — соответствующий форме $\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ оператор (имеющий в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ ту же матрицу A, что и форма $\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})$).

Так как матрица A симметрична, то оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен, следовательно (в силу теоремы 9), существует ортонормальный базис $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ суть характеристические числа оператора $\mathcal{A}$ (т. корни характеристического уравнения матрицы A).

Но по только что доказанной лемме матрица (2) является и ма рицей билинейной формы $\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ в базисе $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n'$, так что

$$\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda_1 x_1' y_1' + \ldots + \lambda_n x' y_n'$$

для $\mathbf{u} = x_1'\mathbf{e}_1' + \ldots + x_n'\mathbf{e}_n'$, $\mathbf{v} = y_1'\mathbf{e}_1' + \ldots + y_n'\mathbf{e}_n'$.

Теорема 15 доказана.

Следствие. *Для всякой квадратичной функции* $\varphi(\mathbf{u}) \equiv \Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ *определенной в евклидовом пространстве* E^n, *существует ортонормал ный базис* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, *в котором функция* $\varphi(\mathbf{u})$ *записывается ка квадратичная форма канонического вида:*

$$\varphi(\mathbf{u}) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 \quad \text{для} \quad \mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n.$$

При этом коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *суть характеристические чис функции* $\varphi(\mathbf{u})$, *т. е. характеристические числа ее матрицы* (*в любо ортонормальном базисе*).

§ 8. ($n-1$)-мерные многообразия (поверхности) второго поряд в n-мерном аффинном и евклидовом пространствах

Пусть в n-мерном аффинном пространстве R^n дана аффинная си тема координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\ldots\mathbf{e}_n$. Всякое алгебраическое уравнение ст пени m, т. е. уравнение

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

левая часть которого есть многочлен степени m от перемени $x_1, x_2, \ldots, x_n$, задает в R^n некоторое *алгебраическое многообраз размерности* $n-1$ *и порядка* m; мы будем кратко говорить: некотору *алгебраическую поверхность порядка* m в пространстве R^n. В свя с этим определением можно было бы привести высказывания, ан логичные тем, которые в свое время были приведены в главе XV, § об алгебранческих поверхностях в обычном трехмерном пространств В частности, имея уравнение данной поверхности в данной систе координат, мы совершенно так же, как в случае $n=3$, находим уравнение во всякой другой системе координат, и все эти уравнен будут одной и той же степени: порядок поверхности не зависит той системы координат, в которой мы поверхность задаем. Следу также сказать, что удовлетворительное построение теории алгебра ческих поверхностей требует перехода к комплексному пространств более того, к комплексному проективному пространству.

Мы, однако, ограничимся лишь самыми краткими замечаниям касающимися поверхностей второго порядка в n-мерном аффинн и n-мерном евклидовом пространствах.

Общее уравнение второй степени от переменных $x_1, \ldots, x_n$ имеет вид

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) + 2l(x_1, \ldots, x_n) + a_0 = 0, \qquad (1)$$

где $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ есть квадратичная, а $l(x_1, \ldots, x_n)$ — линейная форма от n переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k, \\ l(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{j=1}^{n} a_j x_j. \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

Вектор $\mathbf{u} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ пространства R^n, удовлетворяющий условию

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad (2)$$

называется *асимптотическим* для данной поверхности (1). Поверхность, определяемая однородным уравнением (2), так же как и в случае трехмерного пространства, называется *конической поверхностью*. В данном случае, когда форма $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть квадратичная форма старших членов уравнения (1), коническая поверхность (2) называется *конусом асимптотических направлений* поверхности (1).

Точки пересечения поверхности (1) с какой-либо прямой

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \alpha_1 t, \\ &\ldots\ldots \\ x_n &= x_n^0 + \alpha_n t \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

находятся совершенно так же, как и в случае $n=3$: решая уравнения (3) совместно с уравнением (1), получаем квадратное уравнение для t:

$$At^2 + 2Bt + C = 0,$$

где

$$A = \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad B = \sum_{k=1}^{n} F_k(x_1^0, \ldots, x_n^0)\,\alpha_k,$$
$$C = F(x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

причем

$$F_k(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_k} = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n + a_k$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда выводим, что поверхность (1) пересекается со всякой прямой неасимптотического направления по паре точек, которые могут быть действительными (различными или совпадающими) или мнимыми сопряженными. Прямая асимптотического направления или вовсе не

пересекается с поверхностью (1), или пересекается с нею в одной действительной точке, или целиком содержится в поверхности (1), являясь в последнем случае прямолинейной образующей этой поверхности.

Как и в случае $n=3$, мы определяем *большой ранг* поверхности R, т. е. ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_0 \end{pmatrix}$$

всех коэффициентов a_{ik}, a_j и a многочлена

$$F(x_1, \dots, x_n)=\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k+2\sum_{j=1}^{n} a_jx_j+a.$$

Поверхность называется *вырождающейся*, если ее большой ранг $R<n+1$.

Малым рангом поверхности (1) называется ранг r квадратичной формы $\varphi(x_1, \dots, x_n)=\sum\limits_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ старших членов ее уравнения (1).

Точка $M_0=(x_1^0, \dots, x_n^0)$ поверхности (1) называется *особой точкой* этой поверхности, если

$$F_k(x_1^0, \dots, x_n^0)=0 \quad \text{для всех } k=1, 2, \dots, n, \tag{4}$$

т. е. если все частные производные многочлена $F(x_1, \dots, x_n)$ равны в этой точке нулю.

Так как имеет место тождество

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n)=\sum_{k=1}^{n} x_kF_k(x_1, \dots, x_n)+\sum_{j=1}^{n} a_jx_j+a_0,$$

то из равенств (4) и из $F(x_1^0, \dots, x_n^0)=0$ следует, что особая точка $M_0=(x_1^0, \dots, x_n^0)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1^0+a_{12}x_2^0+\dots+a_{1n}x_n^0+a_1=0,\\ a_{21}x_1^0+a_{22}x_2^0+\dots+a_{2n}x_n^0+a_2=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}x_1^0+a_{n2}x_2^0+\dots+a_{nn}x_n^0+a_n=0,\\ a_1x_1^0+a_2x_2^0+\dots+a_nx_n^0+a_0=0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Другими словами, если $M_0=(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ есть особая точка поверхности (1), то отличный от нуля вектор $\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, 1\}$ арифметического $(n+1)$-мерного векторного пространства является решением

однородной системы из $n+1$ уравнений

$$\begin{aligned}
a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n + a_1\xi_{n+1} &= 0,\\
a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n + a_2\xi_{n+1} &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots

определяются как плоскости, являющиеся пересечением нескольких диаметральных плоскостей размерности $n-1$.

В случае центральных поверхностей диаметральные плоскости — это просто плоскости, проходящие через центр поверхности.

Понятие особого направления вводится и исследуется так же, как и в случае $n=3$; исследование этого и других вопросов общей аффинной теории поверхностей второго порядка предоставляется читателю. Решившись на такое исследование, любознательный читатель едва ли пожалеет о затраченных на него времени и усилиях. В частности, он, вероятно, сумеет дать (по индукции) доказательство теоремы единственности (см. § 5 главы XX) для поверхностей второго порядка в n-мерном пространстве.

Несомненно, читатель докажет (по крайней мере для центральных поверхностей) следующую теорему: если направления единичных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ данной аффинной координатной системы в пространстве R^n являются попарно сопряженными между собою относительно поверхности (1), то в этой координатной системе квадратичная форма старших членов уравнения (1) имеет канонический вид.

Теперь до конца этого параграфа мы предполагаем, что в пространстве R^n выбрана такая аффинная координатная система $Oe_1e_2\ldots e_n$, в которой форма $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет вид

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_r x_r^2,$$

где r, как всегда, есть ранг формы φ и все коэффициенты $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ равны ± 1. В этой системе координат уравнение данной поверхности имеет вид

$$F(x_1, \ldots, x_n) \equiv \varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_r x_r^2 + 2a_1 x_1 + \ldots + 2a_n x_n + a_0 = 0. \tag{1*}$$

Покажем теперь, что посредством сдвига начала координат в некоторую точку $O' = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_r^0, 0, \ldots, 0)$, координаты которой вдобавок однозначно определены, можно достигнуть того, чтобы коэффициенты $a_1, \ldots, a_r$ при $x_1, \ldots, x_r$ в линейной форме $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ обратились в нуль. В самом деле, сделаем преобразование координат

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1' + x_1^0, \\ x_2 &= x_2' + x_2^0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_r &= x_r' + x_r^0, \\ x_{r+1} &= x_{r+1}', \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= x_n' \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

при пока еще не определенных постоянных $x_1^0, \ldots, x_r^0$. При преобразовании (6) многочлен $F(x_1, \ldots, x_n)$ тождественно перейдет в

$$F'(x_1', \ldots, x_n') = \varepsilon_1 x_1'^2 + \ldots + \varepsilon_r x_r'^2 + 2(\varepsilon_1 x_1^0 + a_1)x_1' + 2(\varepsilon_2 x_2^0 + a_2)x_2' + \ldots + 2(\varepsilon_r x_r^0 + a_r)x_r' + 2a_{r+1}x_{r+1}' + \ldots + 2a_n x_n' + a_0',$$

где

$$a_0 = F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_r^0, 0, \ldots, 0).$$

Так как $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ все отличны от нуля, то из уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 x_1^0 + a_1 &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ \varepsilon_r x_r^0 + a_r &= 0, \end{aligned}$$

значения $x_1^0, \ldots, x_r^0$ определяются однозначно, и тогда коэффициенты при первых степенях $x_1', \ldots, x_r'$ в $F'(x_1', \ldots, x_n')$ обратятся в нуль, а само уравнение (1*) примет вид

$$\varepsilon_1 x_1'^2 + \ldots + \varepsilon_r x_r'^2 + 2a_{r+1}x_{r+1}' + \ldots + 2a_n x_n' + a_0' = 0. \tag{7}$$

Если все $a_{r+1}, \ldots, a_n$ равны нулю, то с системой координат $O'x_1' \ldots x_n'$, имеющей репер $O'\mathbf{e}_1' \ldots \mathbf{e}_n'$, больше ничего не делаем. Если же среди $a_{r+1}, \ldots, a_n$ имеются отличные от нуля, то без ограничения общности можем предположить, что $a_{r+1} \neq 0$; тогда переходим к новому аффинному реперу $O'\mathbf{e}_1'' \ldots \mathbf{e}_n''$ посредством преобразования координат

$$\left.\begin{aligned} x_1'' &= x_1', \\ &\cdots\cdots \\ x_r'' &= x_r', \\ x_{r+1}'' &= a_{r+1}x_{r+1}' + a_{r+2}x_{r+2}' + \ldots + a_n x_n' + \frac{a_0'}{2}, \\ x_{r+2}'' &= x_{r+2}', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'' &= x_n', \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

это преобразование (8) переводит уравнение (7) в уравнение

$$\varepsilon_1 x_1''^2 + \ldots + \varepsilon_r x_r''^2 + 2x_{r+1}'' = 0. \tag{9}$$

Мы доказали следующее основное предложение.

Теорема 16. *В надлежаще выбранной аффинной системе координат пространства R^n всякая поверхность второго порядка (малого) ранга $r \leqslant n$ имеет при $r = n$ уравнение*

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_n x_n^2 + a_0 = 0, \tag{10}$$

при $r < n$ либо уравнение

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_r x_r^2 + a_0 = 0, \tag{11}$$

либо уравнение

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_r x_r^2 + 2x_{r+1} = 0. \tag{12}$$

Геометрический смысл этой теоремы выясняется по аналогии с трехмерным случаем.

Уравнение (10) есть простейшее уравнение центральной поверхности в аффинных координатах. При $a_0 \neq 0$ мы имеем *невырождающуюся центральную поверхность*, при $a_0 = 0$ — *конус второго порядка*.

Если в данной аффинной координатной системе уравнение центральной поверхности имеет вид (10), то начало координат этой системы является единственным центром поверхности (10).

Нормируя уравнение (10) требованием, чтобы его свободный член $a_0 \neq 0$ был отрицательным, основываем аффинную классификацию невырождающихся центральных поверхностей на индексе квадратичной формы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, т. е. на числе положительных среди коэффициентов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Мы получаем, прежде всего, два крайних случая действительного и мнимого эллипсоидов: *действительный эллипсоид* получается, когда все $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ положительны, *мнимый* — когда они все отрицательны. Между этими крайними случаями лежат $n-1$ *гиперболоидов различных сортов*.

Если в уравнении (10) мы имеем $a = 0$, то это уравнение определяет конус второго порядка; в этом случае, умножая, если надо, обе части уравнения (10) на -1, мы всегда можем предположить, что число положительных среди коэффициентов не меньше, чем $\frac{n}{2}$; ограниченные этим требованием значения индекса квадратичной формы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и дают нам различные аффинные классы *конусов* второго порядка в R^n; число этих классов равно $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$[1]); они взаимно однозначно соответствуют аффинным классам невырожденных поверхностей второго порядка в R^{n-1}.

Пусть теперь $r = n - 1$. Тогда наша поверхность задается либо уравнением

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} x_{n-1}^2 + 2x_n = 0, \tag{13}$$

либо уравнением

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} x_{n-1}^2 + a_0 = 0. \tag{11_{n-1}}$$

В первом случае имеем *параболоид*. Умножая, если нужно, обе части уравнения (13) на -1, меняя направление последней координатной оси, а также порядок других осей, можно всегда достигнуть того, чтобы число положительных среди коэффициентов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$

[1]) $[k]$ означает наибольшее целое число $\leqslant k$.

было $\geqslant \frac{n-1}{2}$ и чтобы они стояли на первых местах. Это и даст нам нормальный вид уравнения параболоида. Число аффинно различных классов параболоидов равно $\left[\frac{n-1}{2}\right]+1$.

В случае (11_{n-1}) имеем *цилиндр* над $(n-1)$-мерной центральной поверхностью, в частности, при $a_0=0$ — над $(n-1)$-мерным конусом второго порядка.

Переходим теперь к случаю любого $r<n-1$. Введем прежде всего следующее определение. Поверхность, заданную в n-мерном пространстве R^n уравнением вида

$$F(x_1, \ldots, x_p)=0, \tag{14}$$

где $p<n$ и, следовательно, $q=n-p>0$, назовем *q-кратным цилиндром над $(p-1)$-мерной поверхностью* (14), лежащей в p-мерной плоскости

$$x_{p+1}=\ldots=x_n=0$$

пространства R^n (т. е. в плоскости, проходящей через точку $O=(0, \ldots, 0)$ и натянутой на векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$). Теперь можно сказать, что при любом $r<n-1$ уравнение (12) определяет *$(n-r-1)$-кратный цилиндр над r-мерным параболоидом*, лежащим в $(r+1)$-мерной плоскости

$$x_{r+2}=\ldots=x_n=0$$

и заданным в ней уравнением (12).

Уравнение (11) определяет *$(n-r)$-кратный цилиндр над $(r-1)$-мерной центральной поверхностью* r-мерной плоскости

$$x_{r+1}=\ldots=x_n=0,$$

вырождающейся при $a_0=0$ в конус.

Предполагаем теперь, что аффинное пространство R^n снабжено евклидовой метрикой, т. е. является евклидовым пространством E^n. Имеет место следующая основная

Теорема 17. *В надлежаще выбранной прямоугольной координатной системе евклидова n-мерного пространства E^n всякая лежащая в этом пространстве поверхность второго порядка малого ранга $r\leqslant n$ имеет уравнение одного из следующих видов:*

А. *Если ранг $r=n$ (центральный случай), то*

$$\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\ldots+\lambda_n x_n^2+a_0=0, \tag{15}$$

причем при $a_0\neq 0$ получаем невырождающуюся центральную поверхность, при $a_0=0$ — вырождающуюся (конус).

Б. *Если $r=n-1$, то или*

$$2\mu x_n=\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\ldots+\lambda_{n-1}x_{n-1}^2 \quad (\textit{параболоид}), \quad (16_{n-1})$$

или

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1}^2 + a_0 = 0 \qquad (17_{n-1})$$

— цилиндр над $(n-2)$-мерной центральной поверхностью в плоскости $x_n = 0$.

В. *При* $r < n-1$ *либо*

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 + a_0 = 0 \qquad (17_r)$$

— $(n-r)$-кратный цилиндр над центральной $(r-1)$-мерной поверхностью в r-мерной плоскости (вырождающейся при $a_0 = 0$ в конус), либо

$$2\mu x_{r+1} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 \qquad (16_r)$$

— $(n-r-1)$-кратный цилиндр над r-мерным параболоидом.

Доказательство. Пусть

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) + 2l(x_1, \ldots, x_n) + a_0 = 0 \qquad (1)$$

— уравнение поверхности второго порядка в прямоугольной системе координат $O\mathrm{e}_1 \ldots \mathrm{e}_n$,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

— квадратичная форма ранга $r \leqslant n$,

$$l(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

— линейная форма.

Предположим сначала, что $r = n$; тогда существует ортонормальный базис, составленный из собственных векторов $\mathrm{e}'_1, \ldots, \mathrm{e}'_n$ квадратичной формы φ, в котором эта форма принимает вид

$$\lambda_1 x_1'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2,$$

причем все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ отличны от нуля. В системе координат $O\mathrm{e}'_1 \ldots \mathrm{e}'_n$ уравнение (1) принимает вид

$$\lambda_1 x_1'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2 + 2a'_1 x'_1 + \ldots + 2a'_n x'_n + a_0 = 0. \qquad (18)$$

Так как все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ отличны от нуля, то посредством переноса начала O системы координат $O\mathrm{e}'_1 \ldots \mathrm{e}'_n$ в точку O' можно достигнуть того, что все коэффициенты линейной формы уравнения поверхности обратятся в нуль и в системе $O'\mathrm{e}'_1 \ldots \mathrm{e}'_n$ уравнение поверхности будет иметь вид

$$\lambda_1 x_1''^2 + \ldots + \lambda_n x_n''^2 + a'_0 = 0. \qquad (15')$$

При $a'_0 \neq 0$ получаем невырождающуюся центральную поверхность, при $a'_0 = 0$ — вырождающуюся (конус).

Пусть теперь $r < n$. Найдем такой ортонормальный базис

$$\mathrm{e}'_1, \ldots, \mathrm{e}'_n,$$

в котором квадратичная форма φ имеет канонический вид

$$\lambda_1 x_1'^2 + \ldots + \lambda_r x_r'^2, \quad \lambda_i \neq 0 \quad (i = 1, \ldots, r),$$

а линейная форма l принимает вид

$$\alpha_1 x_1' + \ldots + \alpha_r x_r' + \mu x_{r+1}'.$$

В качестве первых r векторов искомого базиса возьмем ортонормальную систему из r собственных векторов $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_r'$ квадратичной формы φ, соответствующих ее r отличным от нуля собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.

Чтобы найти $(r+1)$-й вектор нужного нам базиса, представим вектор

$$\mathbf{a} = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

(координатами которого являются коэффициенты линейной формы l) в виде

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1' + \ldots + \alpha_r \mathbf{e}_r' + \mathbf{b}, \tag{19}$$

где $\mathbf{b}$ — вектор, ортогональный к каждому из векторов $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_r'$.

Для получения такого представления вектора $\mathbf{a}$ умножим равенство (19) на каждый из векторов $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_r'$. Тогда будем иметь

$$\alpha_i = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_i') \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

откуда

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} - (\mathbf{a}, \mathbf{e}_1')\,\mathbf{e}_1' - \ldots - (\mathbf{a}, \mathbf{e}_r')\,\mathbf{e}_r'. \tag{19'}$$

Из равенства (19′) видно, что вектор $\mathbf{b}$ ортогонален к каждому из векторов $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_r'$.

Теперь возможны два случая:

1. $\mathbf{b} = 0$.
2. $\mathbf{b} \neq 0$.

В первом случае равенство (19) принимает вид

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1' + \ldots + \alpha_r \mathbf{e}_r'.$$

Дополним ортонормальную систему векторов $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_r'$ до (какого-нибудь) ортонормального базиса $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_r', \mathbf{e}_{r+1}', \ldots, \mathbf{e}_n'$ всего пространства R^n и будем рассматривать линейную форму $l(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ как скалярное произведение векторов

$$\mathbf{a} = \{a_1, \ldots, a_n\} \text{ и } \mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

В базисе $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_r', \mathbf{e}_{r+1}', \ldots, \mathbf{e}_n'$

$$\mathbf{a} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \quad 0, \ldots, 0\}.$$

Пусть в этом базисе

$$\mathbf{x} = \{x_1', \ldots, x_r', \quad x_{r+1}', \ldots, x_n'\},$$

тогда

$$l'(x'_1, \ldots, x'_n) = (\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \alpha_1 x'_1 + \ldots + \alpha_r x'_r.$$

Таким образом, в системе координат $O\mathbf{e}'_1 \ldots \mathbf{e}'_n$ уравнение поверхности (1) принимает вид

$$\lambda_1 x'^2_1 + \ldots + \lambda_r x'^2_r + 2\alpha_1 x'_1 + \ldots + 2\alpha_r x'_r + a_0 = 0.$$

Так как все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ отличны от нуля, то сдвигом начала координат O в новую точку O' снова можно достигнуть того, чтобы уравнение не содержало членов с первыми степенями координат. В системе $O'\mathbf{e}'_1 \ldots \mathbf{e}'_n$ уравнение (1) принимает вид

$$\lambda_1 x''^2_1 + \ldots + \lambda_r x''^2_r + a'_0 = 0 \qquad (17'_r).$$

и, в частности, при $r = n - 1$

$$\lambda_1 x''^2_1 + \ldots + \lambda_{n-1} x''^2_{n-1} + a_0 = 0 \qquad (17'_{n-1})$$

Пусть теперь $\mathbf{b} \neq 0$. Положим $|\mathbf{b}| = \mu$ и представим вектор $\mathbf{b}$ в виде

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{e}'_{r+1}.$$

Формула (19) в этом случае принимает вид

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}'_1 + \ldots + \alpha_r \mathbf{e}'_r + \mu \mathbf{e}'_{r+1}.$$

Дополним снова ортонормальную систему векторов $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_r, \mathbf{e}'_{r+1}$ до ортонормального базиса $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ всего пространства и будем рассматривать снова форму $l(x_1, \ldots, x_n)$ как скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}$. В базисе $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ линейная форма l примет вид

$$l'(x'_1, \ldots, x'_n) = (\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \alpha_1 x'_1 + \ldots + \alpha_r x'_r + \mu x'_{r+1}.$$

Поэтому уравнение (1) в системе $O\mathbf{e}'_1 \ldots \mathbf{e}'_n$ принимает вид

$$\lambda_1 x'^2_1 + \ldots + \lambda_r x'^2_r + 2\alpha_1 x'_1 + \ldots + 2\alpha_r x'_r + 2\mu x'_{r+1} + a_0 = 0. \qquad (20)$$

Ввиду того, что все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu$ отличны от нуля, переносом начала координат O в точку

$$O' = \left(\frac{-\alpha_1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{-\alpha_r}{\lambda_r}, \frac{-a'_0}{2\mu}, 0, \ldots, 0\right),$$

где

$$a'_0 = a_0 - \frac{\alpha_1^2}{\lambda_1} - \ldots - \frac{\alpha_r^2}{\lambda_r},$$

и изменением направления оси $O'x''_{r+1}$ на противоположное можно добиться того, что уравнение (1) примет вид

$$\lambda_1 x''^2_1 + \ldots + \lambda_r x''^2_r = 2\mu x''_{r+1} \quad \text{при} \quad r < n \qquad (16'_r)$$

и, в частности,

$$\lambda_1 x''^2_1 + \ldots + \lambda_{n-1} x''^2_{n-1} = 2\mu x''_n \quad \text{при} \quad r = n - 1. \qquad (16'_{n-1})$$

В заключение несколько слов о поверхностях второго порядка в (комплексном) n-мерном проективном пространстве P^n. Они определяются уравнением (в однородных координатах)

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0, \tag{21}$$

левая часть которого есть квадратичная форма от этих координат.

Пусть α — какая-нибудь прямая, не содержащаяся целиком в поверхности (1) и, следовательно, пересекающаяся с нею по паре точек: действительных (быть может, совпадающих) или мнимых (сопряженных). Если прямая пересекается с поверхностью (21) по паре совпадающих точек, то она называется *касательной*, и все касательные прямые к поверхности (21) в данной ее точке $P = (p_1 : p_2 : \ldots : p_{n+1})$ образуют касательную плоскость, уравнение которой есть

$$\Psi(p_1, \ldots, p_{n+1};\ x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0, \tag{22}$$

где Ψ, как всегда, билинейная форма, полярная к квадратичной форме Φ. Если $P = (p_1 : p_2 : \ldots : p_{n+1})$ — какая-нибудь точка, быть может, и не принадлежащая поверхности (21), то плоскость π, определяемая уравнением (22), называется *полярной плоскостью точки* P (относительно поверхности (21)), а точка P называется *полюсом плоскости* π. О полярных плоскостях и полюсах можно повторить все, что о них было сказано в главе XXIII (для случая $n = 3$) и еще ранее в главе XXII (для $n = 2$).

Со всякой гиперплоскостью пространства поверхность (21) пересекается по $(n-2)$-мерной поверхности второго порядка. Если поверхность (21) невырождающаяся, то $(n-2)$-мерная поверхность, по которой она пересекается с гиперплоскостью π, вырождается тогда и только тогда, когда плоскость π является касательной плоскостью к поверхности (21); тогда в пересечении получаем $(n-2)$-мерный конус прямолинейных образующих поверхности (21), проходящих через данную точку. В частности, если поверхность (21) не содержит несобственной гиперплоскости $x_{n+1} = 0$, то ее пересечение с этой последней совпадает с $(n-2)$-мерной поверхностью, являющейся пересечением с несобственной плоскостью конуса асимптотических направлений данной поверхности.

Так как всякая плоскость любого числа измерений есть пересечение нескольких гиперплоскостей (т. е. $(n-1)$-мерных плоскостей), то пересечение поверхности (21) со всякой плоскостью (любой размерности) есть поверхность второго порядка соответствующего числа измерений.

Проективная классификация поверхностей второго порядка в пространстве P^n сводится к классификации квадратичных форм $\Phi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ от $n+1$ переменных по их рангу и индексу. Умножая, если нужно, обе части уравнения (21) на -1, всегда можно достигнуть того, чтобы индекс квадратичной формы

$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ был не меньше, чем $\frac{r}{2}$, где r — раиг формы Φ. Предполагая, что все рассматриваемые уравнения нормированы этим требованием, видим, что для каждого значения r, $1 < r \leqslant n+1$, каждый проективный класс поверхностей данного ранга r определяется значением индекса k нормированной формы Φ и состоит из поверхностей, проективно эквивалентных поверхности, уравнение которой (в «канонической» системе координат) имеет вид

$$x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0,$$

где k принимает все значения, удовлетворяющие неравенству

$$r \geqslant k \geqslant \frac{r}{2},$$

так же как в случае $n = 3$.

Доказательство теоремы единственности для поверхностей второго порядка в n-мерном проективном пространстве сводится к доказательству аналогичной теоремы для поверхностей в аффинном пространстве R^n.

Наконец, так же как в трехмерном пространстве P^3, проективно-аффинный класс поверхности второго порядка в P^n определяется проективным классом самой поверхности и проективным классом ее пересечения с несобственной гиперплоскостью.

ПРИБАВЛЕНИЕ

ПЕРЕСТАНОВКИ, МНОЖЕСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ; ГРУППЫ

§ 1. Перестановки

Боря, Володя и Шурик сидят в лодке в определенном порядке (считая, например, от носа к корме лодки). Боря гребет на передних веслах, Володя — на средних, Шурик — за рулем. Их можно пересадить шестью различными способами — существует шесть различных *порядков*, в которых они могут разместиться в лодке (считая все время от носа к корме), а именно:

1) Боря, Володя, Шурик;
2) Боря, Шурик, Володя;
3) Володя, Боря, Шурик;
4) Володя, Шурик, Боря;
5) Шурик, Володя, Боря;
6) Шурик, Боря, Володя.

Переход от одного из этих порядков к другому, т. е. само действие пересаживания мальчиков в лодке, называется *перестановкой* (или *подстановкой*) [1].

---

[1]) Термин *перестановка* спокон веку употребляется именно в этом смысле в русском языке: всякий знает, что такое перестановка книг на полке или стульев за столом. В алгебраической (особенно учебной) литературе установилась другая, представляющаяся мне неразумной, терминология: переход от одного порядка элементов данного конечного множества к другому стали называть *подстановкой*, а сами эти порядки — *перестановками*. Такая терминология не только идет вразрез с обычным словоупотреблением, но и по существу относится к тому ушедшему в прошлое времени, когда в математике еще не привыкли к словам «множество» и «упорядоченное множество». К этому же периоду относятся уже вовсе неудачные термины «сочетание» (вместо «подмножество» конечного множества) и «размещение» (вместо «упорядоченное подмножество»).

Мы будем говорить: *порядок* (элементов данного конечного множества) и *перестановка* или *подстановка* (переход от одного порядка к другому). В комбинаторной топологии такое словоупотребление давно установилось: говорят о различных порядках вершин данного симплекса и о перестановках этих вершин (т. е. о переходах от одного порядка к другому). См., например, Л. С. Понтрягин, Основы комбинаторной топологии, Москва, Гостехиздат, 1947, стр. 43. Я опасаюсь даже, что иногда мы будем (сознавая всю непозволительность этого) употреблять слово «перестановка» в обоих смыслах: и как действие («подстановка»), и как результат действия (порядок, возникший в результате действия подстановки).

Перестановка записывается так:

$$\begin{pmatrix} \text{Боря,} & \text{Володя,} & \text{Шурик} \\ \text{Володя,} & \text{Шурик,} & \text{Боря} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Это значит, что Володя сел на место Бори, Шурик — на место Володи, Боря — на место Шурика.

Следующее замечание при всей его очевидности очень важно. При этом перестановка элементов какого-нибудь множества, например множества гребцов на лодке, вполне определена, если указано, какой гребец сел на место какого. Именно это и только это указано в записи (1). Поэтому в записи (1) и вообще в записи любой перестановки совершенно несущественно, в каком порядке написаны элементы верхней строки. Та же перестановка (1) может быть, очевидно, записана и в виде

$$\begin{pmatrix} \text{Володя,} & \text{Боря,} & \text{Шурик} \\ \text{Шурик,} & \text{Володя,} & \text{Боря} \end{pmatrix},$$

и в виде

$$\begin{pmatrix} \text{Шурик,} & \text{Володя,} & \text{Боря} \\ \text{Боря,} & \text{Шурик,} & \text{Володя} \end{pmatrix}.$$

Простейшими из перестановок являются так называемые *транспозиции*; это перестановки, при которых все элементы данного множества, кроме двух элементов, остаются неподвижными, а упомянутые два элемента меняются местами. Например:

$$\begin{pmatrix} \text{Боря,} & \text{Ваня,} & \text{Володя,} & \text{Витя,} & \text{Шурик} \\ \text{Боря,} & \text{Витя,} & \text{Володя,} & \text{Ваня,} & \text{Шурик} \end{pmatrix}.$$

В этой перестановке Боря, Володя, Шурик остались на месте, а Ваня и Витя поменялись местами.

Всякую перестановку можно осуществить, делая последовательно транспозиции (в лодке так и полагается пересаживаться, в особенности при волнении). Строгое доказательство этого факта (индукция по числу элементов множества) нетрудно и может быть предоставлено читателю.

Определение. Перемножить две перестановки, первую на вторую, — значит сделать сначала первую перестановку, потом вторую.

Например, пусть даны две перестановки:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \text{Володя,} & \text{Шурик,} & \text{Боря,} & \text{Витя,} & \text{Ваня} \\ \text{Боря,} & \text{Ваня,} & \text{Володя,} & \text{Шурик,} & \text{Витя} \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} \text{Шурик,} & \text{Володя,} & \text{Ваня,} & \text{Боря,} & \text{Витя} \\ \text{Боря,} & \text{Ваня,} & \text{Витя,} & \text{Володя,} & \text{Шурик} \end{pmatrix}.$$

В результате перестановки S_1 на место Володи сел Боря, но в результате второй перестановки на место Бори сел Володя. Значит, после двух перестановок S_1 и S_2 Володя остался на месте. На место Шурика после перестановки S_1 сел Ваня, но в результате второй перестановки S_2 на место Вани сел Витя. Значит, после двух перестановок на место Шурика сел Витя. После первой перестановки на место Бори сел Володя, на место которого вторая перестановка посадила Ваню. В результате двух перестановок, сначала S_1, потом S_2, на место Бори сел Ваня. Так же убеждаемся в том, что после перестановок S_1 и S_2 на место Вити сел Боря, а на место Вани — Шурик. Итак, произведение перестановок S_1 и S_2 есть перестановка

$$S_3 = \begin{pmatrix} \text{Володя, Шурик, Боря, Витя, Ваня} \\ \text{Володя, Витя, Ваня, Боря, Шурик} \end{pmatrix}.$$

Мы записываем этот результат так:

$$S_3 = S_2 S_1,$$

т. е. пишем справа первую перестановку, а слева — вторую [1]).

Заметим, что при перестановке S_3 Володя остался на месте. Если при данной перестановке элементов какого-нибудь множества все элементы этого множества остаются на своих местах, то перестановка называется *тождественной*. Тождественная перестановка наших трех гребцов есть

$$\begin{pmatrix} \text{Боря, Володя, Шурик} \\ \text{Боря, Володя, Шурик} \end{pmatrix}.$$

Мы будем обозначать тождественную перестановку через E (или e). При тождественной перестановке вообще ничего не происходит, никакой перестановки нет. Спрашивается: нужно ли ее рассматривать? Оказывается, нужно, так же как нужно, например, рассматривать покой как частный случай движения, иначе изложение всей механики очень осложнилось бы. Мы сейчас убедимся в этом.

Ко всякой перестановке S существует однозначно определенная *обратная* к ней *перестановка* S^{-1}; перестановка S^{-1} возвращает элементы, перемещенные перестановкой S, на их первоначальные места.

Например, перестановка, обратная к перестановке

$$S = \begin{pmatrix} \text{Боря, Володя, Шурик} \\ \text{Володя, Шурик, Боря} \end{pmatrix},$$

[1]) Причина такой записи выяснится немного позже, в § 3 этого Прибавления.

есть перестановка

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}\text{Володя}, & \text{Шурик}, & \text{Боря}\\ \text{Боря}, & \text{Володя}, & \text{Шурик}\end{pmatrix},$$

или если в записи перестановки S^{-1} сохранить тот же порядок элементов первой строки, какой был в записи перестановки S, то та же перестановка S^{-1} записывается в виде

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}\text{Боря}, & \text{Володя}, & \text{Шурик}\\ \text{Шурик}, & \text{Боря}, & \text{Володя}\end{pmatrix}.$$

Очевидно, если S^{-1} есть перестановка, обратная к перестановке S, то S есть перестановка, обратная к S^{-1}; перестановки S и S^{-1} суть *взаимно обратные перестановки*.

Очевидно также, что, если сделать сначала какую-нибудь перестановку, а потом — обратную к ней, мы получим тождественную перестановку:

$$S^{-1}S=SS^{-1}=E.$$

Читатель легко докажет, что для данной перестановки S обратная перестановка S^{-1} есть единственная перестановка X, удовлетворяющая какому-нибудь из условий

$$SX=E \text{ или } XS=E.$$

Тождественная перестановка есть единственная перестановка X, удовлетворяющая для любой перестановки S каждому из уравнений

$$SX=S,\ XS=S.$$

При этом, разумеется, все время рассматриваются перестановки одного и того же множества (например, множества трех гребцов на нашей лодке).

Мы уже подчеркивали, что, записывая данную перестановку в виде двух строк и указывая таким образом, какой элемент данного множества каким элементом этого же множества заменяется, мы вольны в верхней строке написать элементы нашего множества в любом порядке, лишь бы под каждым элементом верхней строки был подписан тот элемент, которым он заменяется. Поэтому можно раз навсегда занумеровать элементы данного множества X_n натуральными числами, т. е. записать их в виде

$$x_1, \ldots, x_n,$$

а произвольную перестановку этих элементов записать в виде

$$S=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 \ldots x_n\\ x_{i_1} & x_{i_2} \ldots x_{i_n}\end{pmatrix};$$

эта запись показывает, что при перестановке S элемент x_1 заменился элементом x_{i_1}, элемент x_2 — элементом x_{i_2} и т. д. Но при

этой записи все дело сводится к перестановке не самих элементов x_1, $x_2, \ldots, x_n$, а их номеров 1, 2, ..., n, так что, например, все шесть перестановок произвольных трех элементов — после того как эти элементы занумерованы какими-нибудь числами 1, 2, 3 — могут быть записаны в виде

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Конечно, жаль расставаться с нашими гребцами в лодке и заменять их невыразительными цифрами, но делать нечего — так все получается гораздо короче.

Теперь мы можем сказать: перестановка

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \tag{1'}$$

в множестве X_n, состоящем из чисел 1, 2, ..., n, заключается в том, что каждому элементу k множества X_n ставится в соответствие элемент a_k того же множества X_n, притом так, что различным k соответствуют различные a_k.

Это положение вещей выражают, говоря, что перестановка (1′) есть *взаимно однозначное отображение множества X_n на себя*.

Можно написать

$$a_k = S(k) \tag{2}$$

и сказать, что перестановка S есть функция (2) такая, что и значения аргумента k, и значения функции суть числа 1, 2, 3, ..., n, причем различным значениям аргумента соответствуют различные значения функции. Перестановка (1′) вполне определена, если для каждого k ($k = 1, 2, \ldots, n$) определено $S(k)$, т. е. a_k. Отсюда сразу следует *свойство ассоциативности (сочетательности) умножения перестановок*, т. е. свойство, выражаемое формулой

$$S_1(S_2S_3) = (S_1S_2)S_3, \tag{3}$$

т. е. если сначала сделать перестановку S_2S_3, являющуюся произведением перестановок S_3 и S_2 (в этом порядке), а затем — перестановку S_1, то это все равно, что сделать сначала перестановку S_3, а потом перестановку S_1S_2, являющуюся произведением перестановки S_2 на перестановку S_1. В самом деле, если записать перестановки S_1, S_2, S_3 соответственно в виде функций:

$$a_k = S_1(k), \quad b_k = S_2(k), \quad c_k = S_3(k)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

то и левая, и правая часть равенства (3) есть перестановка S, ставящая в соответствие элементу k множества X элемент

$$S(k) = S_1(S_2(S_3(k))),$$

т. е.

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_{b_{c_1}} & a_{b_{c_2}} & \dots & a_{b_{c_n}} \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. Свойством переместительности (коммутативности) умножение перестановок, вообще говоря, не обладает: если

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

то

$$S_2 S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad S_1 S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq S_2 S_1.$$

Замечание 2. Если натуральные числа, являющиеся элементами множества X_n, записать в их естественном порядке

$$1, 2, 3, \dots, n,$$

то каждая перестановка множества X_n переводит этот порядок в какой-то порядок

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

и, обратно, каждый порядок $a_1, a_2, \dots, a_n$ получается в результате вполне определенной перестановки. Итак, различные порядки, в которых можно записать элементы множества X_n, взаимно однозначно соответствуют перестановкам в этом множестве. Поэтому число этих перестановок равно числу различных порядков в множестве X_n. Докажем, что это число равно $n!$. Это ясно, если $n = 1$, тогда имеется лишь один порядок. Ясно это и для $n = 2$, тогда имеется два порядка: 1, 2 и 2, 1. Предположим, что наше утверждение доказано для $n - 1$, докажем его для n. Каждому порядку

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1},$$

в котором можно написать числа 1, 2, ..., $n - 1$, соответствует n различных порядков, полученных от присоединения числа n, а именно порядки

$$n, a_1, \dots, a_{n-1}; \quad a_1, n, a_2, \dots, a_{n-1}; \quad \dots; \quad a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, n.$$

Так как по предположению всех порядков $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, в которых можно написать числа 1, 2, ..., $n-1$, имеется $(n-1)!$, то всех порядков, в которых можно написать числа 1, 2, ..., n, будет $(n-1)!\,n = n!$, что и требовалось доказать.

Четные и нечетные перестановки. Пусть дана перестановка

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим какую-нибудь пару различных элементов множества X_n, т. е. два натуральных числа i, k, каждое из которых не превосходит n. Пару i, k назовем *правильной* по отношению к перестановке S, если разности $k-i$ и $a_k - a_i$ имеют один и тот же знак. В противном случае говорят, что наша пара *неправильна* по отношению к перестановке S или образует в ней *инверсию*. Следовательно, если пара i, k образует инверсию, то имеем либо $i < k$ и $a_i > a_k$, либо, наоборот, $i > k$ и $a_i < a_k$.

В тождественной перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ нет ни одной инверсии — все пары правильны.

В перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ имеется единственная инверсия (1, 2).

В перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ имеются две инверсии: (1, 3) и (2, 3).

Определение. Перестановка, содержащая четное число инверсий, называется *четной перестановкой*; перестановка, содержащая нечетное число инверсий, называется *нечетной перестановкой*.

Знаком перестановки называется число $+1$, если перестановка четная, и число -1, если она нечетная. Назовем теперь *знаком действительного числа* x число $+1$, если $x > 0$, число -1, если $x < 0$, число 0, если $x = 0$. Теперь ясно, что знак перестановки S равен произведению знаков всех чисел $\frac{i-k}{a_i - a_k}$, соответствующих парам i, k, причем дробь $\frac{i-k}{a_i - a_k} = \frac{k-i}{a_k - a_i}$ строится по одному разу для каждой пары, взятой из чисел 1, 2, 3, ..., n[1]).

Этим замечанием мы воспользуемся для доказательства следующего предложения:

Знак произведения двух перестановок равен произведению знаков этих перестановок.

---

[1]) Читатель знает (и легко докажет), что число всех этих пар равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Пусть даны две перестановки:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n\end{pmatrix}.$$

Их произведение есть, очевидно, перестановка

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ b_{a_1} & b_{a_2} & b_{a_3} & \dots & b_{a_n}\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Знак A равен произведению всех знаков $\left(\frac{i-k}{a_i-a_k}\right)$. Знак B равен произведению всех знаков $\left(\frac{i-k}{b_i-b_k}\right)$. Однако можно также написать

$$B=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\\ b_{a_1} & b_{a_2} & \dots & b_{a_n}\end{pmatrix};$$

поэтому имеем: знак B равен произведению всех знаков $\left(\frac{a_i-a_k}{b_{a_i}-b_{a_k}}\right)$. Отсюда сразу следует:

$$(\text{зн } A)(\text{зн } B)=\text{произв. всех зн}\left(\frac{i-k}{a_i-a_k}\right)\cdot\text{зн}\left(\frac{a_i-a_k}{b_{a_i}-b_{a_k}}\right)=$$
$$=\text{произв. всех зн}\left(\frac{i-k}{a_i-a_k}\cdot\frac{a_i-a_k}{b_{a_i}-b_{a_k}}\right)=$$
$$=\text{произв. всех зн}\left(\frac{i-k}{b_{a_i}-b_{a_k}}\right)=\text{зн}\,(BA),$$

что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы непосредственно следует: произведение двух перестановок одинаковой четности [1]) есть четная, а произведение двух перестановок различной четности [2]) есть нечетная перестановка. Тождественная перестановка E не содержит ни одной инверсии и, следовательно, есть четная перестановка. Далее,

$$AA^{-1}=E,$$

т. е. произведение данной перестановки A и обратной к ней есть четная перестановка; отсюда, по только что доказанному, следует, что любая перестановка имеет ту же четность, что и обратная ей.

Итак, имеет место

Теорема 1. *Произведение двух четных перестановок есть четная перестановка, тождественная перестановка есть четная перестановка; перестановка, обратная четной перестановке, есть четная перестановка.*

---

[1]) То есть произведение двух четных или двух нечетных перестановок.
[2]) То есть произведение четной и нечетной или нечетной и четной.

Докажем теперь следующее предложение.

Лемма. *Любая транспозиция*

$$S=\begin{pmatrix} 1 & \dots & \boxed{i} & \dots & \boxed{k} & \dots & n \\ 1 & \dots & \boxed{k} & \dots & \boxed{i} & \dots & n \end{pmatrix}$$

есть нечетная перестановка [1].

Для доказательства заметим, что какая-нибудь пара (h, l) только тогда может образовать инверсию относительно перестановки S, когда одним из элементов этой пары есть какое-нибудь из чисел i, k. Каждую пару будем записывать в ее естественном порядке: (h, l), если $h<l$.

Ни одна пара вида h, i, $h<i$, инверсией не является, так как в $\begin{pmatrix} h & i \\ h & k \end{pmatrix}$ имеем $h<i<k$.

Среди пар (i, l) инверсиями являются пары $(i, i+1), \dots, (i, k)$, всего $k-i$ инверсий.

Пары (i, l), где $l>k$, инверсиями не являются, так как в $\begin{pmatrix} i & l \\ k & l \end{pmatrix}$ имеем $i<k<l$. Нет инверсий среди пар (j, k), $j<i$.

Пара (i, k) есть инверсия, но мы ее уже считали. Среди пар (j, k), $j>i$, имеются инверсии

$$(i+1, k), \dots, (k-1, k),$$

всего $k-1-i$ инверсий.

Наконец, ни одна из пар (k, j), $j>k$, инверсией не является.

Итак, в нашей транспозиции S имеем всего

$$(k-i)+(k-i-1)=2k-2i-1$$

— нечетное число инверсий.

Лемма доказана.

Из теоремы 1 и из леммы вытекает

Теорема 2. *Всякая перестановка, являющаяся произведением четного числа транспозиций, является четной перестановкой, а всякая перестановка, являющаяся произведением нечетного числа транспозиций, есть нечетная перестановка.*

Так как всякая перестановка есть произведение некоторого числа транспозиций, то из теоремы 2 следует, что нечетные, соответственно четные, перестановки могут быть определены как перестановки, которые являются произведением нечетного, соответственно четного, числа транспозиций.

---

[1] Может, конечно, случиться, что в транспозиции S имеем $i=1$ или $k=n$ или и то и другое одновременно.

Замечание 3. Данная перестановка может быть, вообще говоря, различным образом представлена в виде произведения транспозиций, и число множителей в различных этих представлениях может быть различным; однако из доказанного следует, что во всех представлениях одной и той же перестановки в виде произведения транспозиций четность числа множителей всегда одна и та же.

Замечание 4. Число четных и число нечетных среди перестановок данных n элементов одинаково и равно $\frac{n!}{2}$. В самом деле, пусть все четные перестановки в X_n суть

$$E = S_0,\ S_1,\ \ldots,\ S_k.$$

Умножив каждую из этих перестановок на одну и ту же нечетную, например на одну какую-нибудь транспозицию, которую обозначим через S_{k+1}, получим нечетные перестановки

$$S_{k+1} = S_{k+1}S_0,\ S_{k+2} = S_{k+1}S_1,\ \ldots,\ S_{2k+1} = S_{k+1}S_k. \qquad (5)$$

Все эти перестановки различны между собою. В самом деле, если бы, положим, было

$$S_{k+1}S_h = S_{k+1}S_j,$$

то, умножая обе части этого тождества на S_{k+1}^{-1}, получили бы

$$S_{k+1}^{-1}\,S_{k+1}\,S_h = S_{k+1}^{-1}\,S_{k+1}\,S_j,$$

т. е. (так как $S_{k+1}^{-1}\,S_{k+1}$ есть тождественная перестановка)

$$S_h = S_j,$$

вопреки тому, что S_h и S_j — различные перестановки. Итак, все k нечетных перестановок (5) различны между собою. Я утверждаю, что всякая нечетная перестановка S есть одна из перестановок (5). В самом деле, перестановка $S_{k+1}S$ есть четная перестановка (так как S_{k+1} есть транспозиция, а S — нечетная перестановка), поэтому $S_{k+1}S$ есть одна из перестановок $S_0,\ \ldots,\ S_k$. Пусть $S_{k+1}S = S_i$, $i \leqslant k$. Умножая обе части этого тождества на транспозицию $S_{k+1}^{-1} = S_{k+1}$, получим $S = S_{k+1}S_i$.

Итак, перестановки (5) — это все нечетные перестановки; их число равно k, т. е. числу всех четных перестановок. Значит, $2k$ есть число всех перестановок из n элементов,

$$k = \frac{n!}{2},$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Множества

В § 1 мы имели дело лишь с конечными множествами. Но бывают и бесконечные множества. Таковы, например, множество всех натуральных (т. е. целых и положительных) чисел, множество всех точек плоскости или пространства, множество всех прямых, проходящих через данную точку (в плоскости или в пространстве), множество всех окружностей, проходящих через две данные точки, множество всех плоскостей, проходящих через данную прямую, и т. д.

Теория множеств посвящена в основном изучению именно *бесконечных множеств.*

Теория конечных множеств называется иногда *комбинаторикой.*

Но простейшие свойства множеств, те, о которых мы только и будем здесь говорить, в большинстве случаев в равной мере относятся как к конечным, так и к бесконечным множествам.

Заметим еще одно обстоятельство: в математике вполне допускаются к рассмотрению множества, число элементов которых равняется единице, а также множество, вовсе не содержащее элементов («пустое» множество).

Предположим, в самом деле, что мы вообще говорим о множестве окружностей, проходящих через несколько данных точек. Если этих точек две, то множество проходящих через них окружностей бесконечно; но если этих точек три, то имеется (в случае, если эти три точки не лежат на одной прямой) лишь одна проходящая через них окружность. Другими словами, множество окружностей, проходящих через три точки, не лежащие на одной прямой, состоит из одного элемента. А множество окружностей, проходящих через три точки, лежащие на одной прямой, не содержит ни одного элемента; это — пустое множество, так как таких окружностей вовсе нет.

Заметим, наконец: запись $a \in X$ означает, что a есть элемент множества X. Например, если X есть множество всех точек плоскости, а M — какая-нибудь из этих точек, то пишут: $M \in X$.

Подмножества. Рассмотрим множество A всех студентов, присутствующих на данной лекции. Тогда множество тех из них, которым меньше 20 лет, является примером подмножества множества A.

Примеры других подмножеств множества A: подмножество, состоящее из всех студентов, рост которых больше 165 *см*, или из тех, которые родились в Москве, и т. д.

Каждый отдельный элемент множества A образует подмножество, состоящее из этого одного элемента.

Кроме того, пустое множество является подмножеством всякого множества.

Общее определение подмножества такое:

Множество B называется *подмножеством* множества A, если каждый элемент множества B является в то же время элементом множества A.

Подмножество множества A называется *несобственным*, если оно совпадает с множеством A (другими словами, само множество A причисляется к своим подмножествам и называется своим несобственным подмножеством). Если множество B есть подмножество множества A, то говорим также, что B *содержится в* A или B *включено в* A, и обозначаем это так: $B \subseteq A$ или $A \supseteq B$. Знак $\subseteq$ называется *знаком включения*. Подмножество B множества A называется *собственным* подмножеством, если B не пусто и не совпадает с A (т. е. имеется элемент множества A, не содержащийся в B). Если B есть собственное подмножество множества A, то пишут $B \subset A$ или $A \supset B$.

Дадим еще примеры. Множество всех четных чисел есть собственное подмножество множества всех целых чисел, которое в свою очередь есть подмножество множества всех рациональных чисел.

Действия над множествами. а) Сумма множеств. Вернемся к уже рассмотренному примеру.

Среди всех студентов, присутствующих в данной аудитории, рассмотрим множество M всех тех, которые удовлетворяют хотя бы одному из следующих признаков:

1) они моложе 20 лет,

2) их рост больше 165 *см*.

Другими словами, в наше множество M войдут все студенты, которым меньше 20 лет (независимо от их роста), а также все те, рост которых больше 165 *см* (независимо от их возраста). Множество M называется суммой двух множеств: множества M_1 всех студентов моложе 20 лет и множества M_2 всех студентов, рост которых больше 165 *см*.

Общее определение суммы двух множеств A и B. *Суммой множеств* A *и* B называется множество, состоящее из всех элементов множества A и из всех элементов множества B (при этом множества A и B могут иметь общие элементы, а могут и не иметь их).

Заметим, в частности, следующее: если множество B есть подмножество множества A, то сумма множеств B и A совпадает с A.

Совершенно аналогичным образом определяется сумма любого числа множеств. Можно определить и сумму бесконечного числа множеств. Все это содержится в следующем определении.

Пусть дана какая-нибудь конечная или бесконечная совокупность множеств. *Суммой множеств данной совокупности* называется множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств, входящих в данную совокупность.

Например, пусть A_k есть множество всех правильных k-угольников на плоскости (где $k=3, 4, 5, \ldots$). Таким образом, A_3 есть множество всех правильных треугольников, A_4 — множество всех правильных четырехугольников и т. д.

Множество всех правильных многоугольников есть сумма множеств $A_3, A_4, A_5, \ldots, A_k, \ldots$

Обозначим через B_k ($k=3, 4, 5, \ldots$) множество всех правильных многоугольников, число сторон которых не превосходит k. Тогда B_k есть сумма множеств $A_3, A_4, \ldots, A_{k-1}, A_k$, и множество всех правильных многоугольников есть сумма всех множеств B_k ($k=3, 4, \ldots$).

Очевидно, далее, что $A_3=B_3$ и что

$$B_3 \subset B_4 \subset B_5 \subset \ldots \subset B_k \subset B_{k+1} \subset \ldots$$

б) Пересечение множеств. Пусть M_1 — множество присутствующих в аудитории студентов моложе 20 лет, а M_2 — множество тех присутствующих в аудитории студентов, рост которых больше 165 *см*.

Под *пересечением* множеств M_1 и M_2 понимается множество элементов, принадлежащих и к множеству M_1, и к множеству M_2, т. е. в нашем примере множество всех студентов моложе 20 лет, рост которых в то же время больше 165 *см*. Конечно, это множество может оказаться и пустым.

Вообще, *пересечением множеств* данной (конечной или бесконечной) совокупности множеств называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих ко всем множествам данной совокупности.

Заметим: если $B \subseteq A$, то пересечение множеств A и B есть множество B.

Задача. Условимся под треугольником понимать множество всех точек, лежащих внутри этого треугольника.

Докажите, что сумма всех правильных треугольников, вписанных в круг с центром O и радиусом 1, есть множество всех точек, лежащих внутри этого круга, а пересечение этих треугольников есть множество точек, лежащих внутри круга с центром O и радиусом $\frac{1}{2}$.

Сформулируйте и решите аналогичную задачу для вписанных квадратов и других правильных многоугольников, а также для правильных многоугольников, описанных около круга.

§ 3. Отображения или функции

Большая компания студентов (состоящая, положим, из всех студентов одного курса) отправилась кататься на лодках. Лодок хватило: каждый студент попал в какую-то лодку. Обозначим множество всех наших студентов через A, множество всех лодок

через B. Каждому элементу a множества A (т. е. каждому студенту) поставлен в соответствие определенный элемент b множества B (та лодка b, в которой оказался студент a).

Мы говорим, что множество A отображено в множество B или что мы имеем функцию, аргумент которой пробегает множество A, а значения ее принадлежат множеству B. Для того чтобы показать, что данный элемент b поставлен в соответствие элементу a, пишут $b=f(a)$ и говорят, что b есть образ элемента при данном отображении f (или что b есть значение функции для значения a аргумента).

Множество тех элементов множества A, которым поставлен в соответствие данный элемент b множества B, называется *прообразом* этого элемента [1]) b и обозначается через $f^{-1}b$; в нашем примере $f^{-1}b$ есть множество всех студентов, оказавшихся в данной лодке b.

Могут представиться следующие частные случаи.

1° Для каждого элемента $b\in B$ множество $f^{-1}b$ не пусто, т. е. каждый элемент b множества B является образом хотя бы одного элемента a множества A; в применении к нашему примеру это значит, что в каждую лодку сел хотя бы один студент, т. е. что все лодки оказались разобранными.

В этом случае мы говорим, что имеем *отображение* множества A *на* множество B. Этот случай является наиболее важным. К нему легко приводится и общий случай отображения одного множества в другое. В самом деле, пусть дано какое-нибудь отображение f множества A в множество B; множество всех тех элементов множества B, которые в силу отображения f поставлены в соответствие хотя бы одному элементу множества A, назовем *образом множества* A при отображении f и обозначим через $f(A)$. Очевидно, что отображение f есть отображение множества A на множество $f(A)$.

Это замечание дает нам возможность в дальнейшем ограничиться рассмотрением отображений одного множества на другое.

2° Если прообраз $f^{-1}(b)$ каждого элемента b множества B состоит лишь из одного элемента множества A, то отображение множества A на множество B *взаимно однозначно*.

В нашем примере имеем взаимно однозначное отображение множества A всех студентов на множество B всех лодок в том случае, когда в каждую лодку сел лишь один студент.

Взаимно однозначное отображение множества A на множество B автоматически производит также взаимно однозначное отображение множества B на множество A: ведь если каждое множество $f^{-1}(b)$, где b — любой элемент B, состоит лишь из одного элемента a, то

[1]) В некоторых книгах это множество называется *полным прообразом* элемента b.

мы получаем отображение f^{-1} множества B на множество A, ставящее в соответствие каждому элементу b множества B элемент $a=f^{-1}(b)$ множества A. Отображение f^{-1} называется *обратным отображением* к отображению f.

Итак, при взаимно однозначном отображении множества A на множество B происходит следующее: каждый элемент a множества A объединяется в пару с некоторым вполне определенным элементом $f(a)$, и при этом оказывается, что каждый элемент b множества B находится в паре с единственным вполне определенным элементом a множества A. Ставя в соответствие каждому элементу b множества B находящийся с ним в паре элемент a множества A, мы получим взаимно однозначное отображение f^{-1} множества B на множество A, обратное к отображению f.

Таким образом, при взаимно однозначном отображении одного множества на другое оба множества занимают равноправное положение (так как каждое взаимно однозначно отображается на другое). Для того чтобы подчеркнуть это равноправие, часто говорят о взаимно однозначном соответствии между двумя множествами, разумея под этим совокупность обоих взаимно однозначных и взаимно обратных отображений каждого множества на другое.

Отображения множества в себя и на себя. Преобразование множества. Когда мы определяли отображение какого-нибудь множества A на какое-нибудь множество B, то могло, в частности, случиться, что множество B является собственным или несобственным подмножеством множества A. Например, пусть A есть множество всех точек плоскости α, а B — множество всех точек прямой d, лежащей на плоскости α.

Пусть M — произвольная точка нашей плоскости. Обозначим через $f(M)$ проекцию точки M на прямую d, т. е. основание перпендикуляра, опущенного на прямую d из точки M. Ставя в соответствие каждой точке M плоскости точку $f(M)$, получаем отображение множества A на множество $B \subset A$.

Всякое отображение f множества A на собственное или несобственное подмножество B множества A называется *отображением множества A в себя*; если при этом $B=A$, то имеем *отображение f множества A на себя*.

Взаимно однозначное отображение множества A на себя называется *преобразованием* множества A. Преобразования множеств имеют в геометрии очень большое значение, и им уделяется в этих лекциях большое внимание. Примером преобразования (прямой, плоскости или пространства) может служить преобразование симметрии относительно данной точки O, т. е. взаимно однозначное отображение (прямой, плоскости или пространства) на себя, состоящее в том, что каждой точке M ставится в соответствие точка M', симметричная точке M относительно центра симметрии O.

Примером преобразования плоскости является также симметрия (или отражение) относительно данной прямой d, лежащей в этой плоскости. Это преобразование состоит в том, что каждой точке M плоскости ставится в соответствие точка M', симметричная точке M относительно прямой, т. е. точка M', лежащая на перпендикуляре, опущенном из точки M на прямую d, на том же расстоянии от этой прямой, что и точка M, но по другую сторону от прямой d.

Аналогично определяется и преобразование пространства, называемое *симметрией* относительно данной плоскости. В дальнейшем мы узнаем много других преобразований плоскости и пространства.

Для конечных множеств понятие преобразования совпадает с ранее введенным понятием перестановки.

Мы видели, что для перестановок, т. е. преобразований конечных множеств, естественно определяется действие перемножения, которое будем также называть *композицией*: *произведение* (*композиция*) двух преобразований f и g данного множества X, заданных в данном порядке — сначала f, потом g,— есть преобразование множества X, получающееся, если сделать сначала преобразование f, а потом преобразование g. Более подробно: преобразование f ставит в соответствие каждому элементу x множества X элемент $f(x)$ того же множества; преобразование g ставит в соответствие каждому элементу x множества X элемент $g(x)$ множества X, в частности, элементу $f(x)$ — элемент $g(f(x))$; преобразование h (являющееся произведением преобразований f и g) ставит в соответствие каждому элементу x множества X элемент $g(f(x))$ того же множества X. Поэтому мы и пишем:

$$h = gf.$$

Это определение произведения, или композиции, двух отображений без всяких изменений пригодно и для любых двух отображений множества X в себя (без требования взаимной однозначности). Если, как это принято, например, в анализе, называть отображения *функциями*, то композиция двух отображений f и g есть не что иное, как сложная функция $g(f(x))$. Например, каждая из функций $f(x) = \sin x + 3$, $g(x) = |\log x|$, определенных, скажем, на положительной полупрямой, осуществляет отображение этой полупрямой в себя. Композиция $h = gf$ этих отображений есть сложная функция

$$h(x) \equiv g(f(x)) = |\log(\sin x + 3)|.$$

Этот пример, в частности, показывает, почему, наряду с общепринятым в геометрии термином произведения двух преобразований, вообще, двух отображений какого-либо множества в себя, удобно иметь еще и другой термин, например, композиции двух отображений: при переходе к функциям, рассматриваемым в анализе, мы таким образом избегаем конфликтов с общепринятой терминологией (не-

удобно было бы сложную функцию $g(f(x))$ называть произведением функций $f(x)$ и $g(x)$).

Из приведенного примера видно также, что композиция (перемножение) двух отображений, вообще говоря, зависит от порядка, в котором берутся эти отображения:

$$g(f(x)) = |\log(\sin x + 3)| \quad \text{и} \quad f(g(x)) = \sin|\log x| + 3$$

отнюдь не одно и то же. Впрочем, мы видели на примере перестановок, т. е. преобразований конечных множеств, что даже в этом простейшем случае перемножение преобразований не коммутативно.

Определенное нами перемножение (композиция) преобразований удовлетворяет свойству ассоциативности: для любых трех преобразований f_1, f_2, f_3 множества X выполнено условие $(f_1f_2)f_3 = f_1(f_2f_3)$. В самом деле, полагая $(f_1f_2)f_3 = h$, $f_1(f_2f_3) = h'$, имеем при любом выборе элемента $x \in X$

$$f_1(f_2(f_3(x))) = h(x) = h'(x).$$

Наконец, заметим, что среди преобразований множества имеется так называемое *тождественное* преобразование e, ставящее в соответствие каждому элементу x множества X этот самый элемент x (говорят, что тождественное преобразование оставляет неподвижными все элементы множества X). Легко видеть, что тождественное преобразование множества X есть единственное преобразование e этого множества, произведение которого на любое преобразование f совпадает с преобразованием f: $fe(x) = ef(x) = f(x)$ для любого $x \in X$. Наконец, мы видели, что для каждого преобразования f множества X определено обратное преобразование f^{-1}. Оно вполне определено каждым из условий $f^{-1}f = e$, $ff^{-1} = e$, означающих соответственно, что $f^{-1}f(x) = x$, $ff^{-1}(x) = x$ при любом $x \in X$.

§ 4. Разбиение множества на подмножества. Отношение эквивалентности

1. Множества множеств. Мы можем рассматривать множества, состоящие из самых различных элементов. В частности, можем рассматривать множества множеств, т. е. множества, элементы которых сами суть множества. Таково, например, множество всех пар весел, имеющихся на данной лодочной станции. Множеством множеств является также множество всех спортивных команд Москвы (каждая спортивная команда есть множество составляющих ее спортсменов).

Множество всех профессиональных союзов, а также множество всех воинских частей (дивизий, полков, батальонов, рот, взводов и т. д.) данной армии являются множествами множеств. Эти примеры показывают, что множества, являющиеся элементами данного

множества множеств, могут в одних случаях пересекаться, в других случаях, наоборот, не иметь общих элементов. Так, например, множество всех профессиональных союзов СССР есть множество попарно не пересекающихся множеств, так как гражданин СССР не может быть одновременно членом двух профессиональных союзов. С другой стороны, множество всех воинских частей какой-либо армии есть пример множества множеств, некоторые элементы которого являются подмножествами других элементов: так, каждый взвод есть подмножество некоторого полка, полк есть подмножество дивизии и т. д.

Множество спортивных команд данного города состоит, вообще говоря, из пересекающихся множеств, так как одно и то же лицо может входить в несколько спортивных команд (например, в команду пловцов и в команду волейболистов или лыжников).

Замечание. Для облегчения речи иногда вместо выражения «множество множеств» употребляются как совершенно равнозначащие выражения «система множеств» или «совокупность множеств».

2. Разбиение на классы. Очень важный класс систем множеств получаем, если рассматриваем всевозможные разбиения какого-нибудь множества на попарно не пересекающиеся множества. Дано множество X, представленное в виде суммы попарно не пересекающихся подмножеств; множества, слагаемые нашей суммы, и являются элементами данного разбиения множества X.

Пример 1. M есть множество всех учащихся в средних школах Москвы. Множество M можно разбить на попарно не пересекающиеся подмножества, например, следующими двумя способами: 1) мы объединяем в одно слагаемое всех учащихся одной и той же школы[1]) (т. е. разбиваем множество всех учащихся по школам); 2) мы объединяем в одно слагаемое всех учащихся одного и того же класса (хотя бы и разных школ).

Пример 2. Пусть X есть множество всех точек плоскости; возьмем на этой плоскости какую-нибудь прямую g и разобьем всю плоскость на прямые, параллельные прямой g. Множества точек каждой такой прямой и являются теми подмножествами, на которые мы разбиваем множество X.

Если данное множество X разбито на попарно не пересекающиеся подмножества, дающие в сумме множество M, то для краткости говорят просто о разбиении множества M на классы.

Теорема 3. *Пусть дано отображение f множества A на множество B. Полные прообразы $f^{-1}(b)$ всевозможных точек b множества B образуют разбиение множества A на классы. Множество этих классов находится во взаимно однозначном соответствии с множеством B.*

---

[1]) В предположении, что каждый учащийся учится лишь в одной школе.

Эта теорема, в сущности, очевидна: каждому элементу a множества A соответствует, в силу отображения, один и только один элемент $b=f(a)$ множества B, так что a входит в один полный прообраз $f^{-1}(b)$. А это и значит, что полные прообразы точек b, во-первых, дают в сумме все множество A, во-вторых, попарно не пересекаются.

Множество классов находится во взаимно однозначном соответствии с множеством B: каждому элементу b множества B соответствует класс $f^{-1}(b)$, и каждому классу $f^{-1}(b)$ соответствует элемент b множества B.

Теорема 4. *Пусть дано разбиение множества A на классы. Это разбиение порождает отображение множества A на некоторое множество B, а именно на множество B всех классов данного разбиения. Это отображение получается, если заставить соответствовать каждому элементу множества A тот класс, к которому он принадлежит.*

Доказательство теоремы уже заключено в самой ее формулировке.

Пример. Тем самым, что учащиеся Москвы распределены по школам, уже установлено[1]) отображение множества A всех учащихся на множество B всех школ: каждому учащемуся соответствует та школа, в которой он учится.

При всей самоочевидности наших двух теорем факты, устанавливаемые ими, не сразу получили в математике отчетливую формулировку; получив же эту формулировку, они приобрели очень важное значение в логическом построении различных математических дисциплин и прежде всего алгебры.

3. Отношение эквивалентности. Пусть дано разбиение множества X на классы. Введем следующее определение: назовем два элемента множества X *эквивалентными по отношению к данному разбиению множества X на классы,* если они принадлежат к одному и тому же классу.

Таким образом, если мы разобьем учащихся Москвы по школам, то двое учащихся будут «эквивалентны», если они учатся в одной и той же школе (хотя бы и в разных классах). Если же мы разобьем учащихся по классам, то двое учащихся будут «эквивалентны», если они учатся в одном и том же классе (хотя бы и различных школ).

Отношение эквивалентности, только что определенное нами, очевидно, обладает следующими свойствами.

Свойство симметрии (или *взаимности*). Если a и b эквивалентны, то эквивалентны также b и a.

---

[1]) В предположении, что каждый учащийся учится лишь в одной школе.

Свойство транзитивности (или *переходности*). Если эквивалентны элементы a и b, а также b и c, то a и c эквивалентны («два элемента a и c, эквивалентные третьему b, эквивалентны между собою»).

Наконец, мы считаем каждый элемент эквивалентным самому себе; это свойство отношения эквивалентности называется *свойством рефлексивности*.

Три условия: рефлексивности, симметрии и транзитивности, которым подчинено отношение эквивалентности, называются *условиями* или *аксиомами эквивалентности* (а также аксиомами равенства).

Итак, всякое разбиение данного множества на классы определяет между элементами этого множества некоторое отношение эквивалентности, обладающее свойствами симметрии, транзитивности и рефлексивности.

Предположим теперь, что нам удалось, каким бы то ни было способом, установить некоторый признак, дающий нам возможность о некоторых парах элементов множества X говорить как о парах эквивалентных элементов. При этом мы требуем от этой эквивалентности, только чтобы она обладала свойствами симметрии, транзитивности и рефлексивности.

Докажем, что это отношение эквивалентности определяет разбиение множества X на классы.

В самом деле, обозначим классом K_a данного элемента a множества X множество всех элементов, эквивалентных элементу a.

В силу того, что наше отношение эквивалентности по предположению обладает свойством рефлексивности, каждый элемент a содержится в своем классе.

Докажем: если два класса пересекаются (т. е. имеют хоть один общий элемент), то они непременно совпадают (т. е. каждый элемент одного класса является в то же время элементом другого).

В самом деле, пусть классы K_a и K_b имеют общий элемент c. Записывая эквивалентность двух каких-нибудь элементов x и y так: $x \sim y$, имеем по определению классов:

$$a \sim c, \quad b \sim c.$$

Следовательно, в силу симметрии $c \sim b$ и в силу транзитивности

$$a \sim b. \tag{1}$$

Пусть y — какой-нибудь элемент класса K_b. Имеем:

$$b \sim y.$$

Значит, в силу транзитивности и (1)

$$a \sim y,$$

т. е. y есть элемент класса K_a.

Пусть теперь x — какой-нибудь элемент класса K_a. Имеем

$$a \sim x$$

и по симметрии

$$x \sim a,$$

а в силу (1) и по транзитивности

$$x \sim b.$$

Вследствие симметрии

$$b \sim x,$$

т. е. x принадлежит к классу K_b.

Таким образом, два класса K_a и K_b, имеющие общий элемент c, действительно совпадают между собой.

Мы доказали, что различные классы K_a образуют систему попарно не пересекающихся подмножеств множества X. Далее, классы в сумме дают все множество X, так как каждый элемент множества X принадлежит к своему классу.

Повторим еще раз доказанные выше результаты, объединив их в следующее предложение.

Теорема 5. *Каждое разбиение на классы какого-нибудь множества X определяет между элементами множества некоторое отношение эквивалентности, обладающее свойствами симметрии, транзитивности и рефлексивности. Обратно: каждое отношение эквивалентности, установленное между элементами множества X и обладающее свойствами симметрии, транзитивности и рефлексивности, определяет разбиение множества X на классы попарно эквивалентных между собой элементов.*

§ 5. Определение группы

Возвратимся к рассмотрению множества G всех преобразований данного множества X. Мы видели, что для любых двух элементов множества G, т. е. для любых двух преобразований g_1, g_2, определен элемент g_2g_1, т. е. преобразование, называемое *произведением* (или *композицией*) двух элементов g_1, g_2, заданных в данном порядке (сначала g_1, потом g_2). При этом выполнено условие ассоциативности $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$. Кроме того, среди элементов g множества G имеется элемент e (*тождественное преобразование*), удовлетворяющий условию

$$ge = eg = g$$

для любого элемента g. И, наконец, для каждого элемента g множества G имеется *обратный элемент* g^{-1}, удовлетворяющий условию

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e.$$

Предположим теперь, что дано некоторое (произвольное) конечное или бесконечное множество G для любых двух элементов g_1 и g_2 (данных в этом порядке) и определен некоторый третий элемент g_3 того же множества, называемый *произведением* или *композицией* элемента g_1 и элемента g_2 и обозначаемый через $g_3 = g_2 g_1$. Предположим, наконец, что эта операция умножения, или композиции (т. е. операция перехода от двух данных элементов g_1 и g_2 к элементу $g_3 = g_2 g_1$), удовлетворяет следующим условиям:

I. *Условие сочетательности, или ассоциативности.* Для любых трех элементов g_1, g_2, g_3 множества справедливо соотношение

$$g_1 (g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3.$$

II. *Условие существования нейтрального элемента.* Среди элементов множества G имеется некоторый определенный элемент, называемый *нейтральным элементом* и обозначаемый через e, такой, что

$$ge = eg = g$$

при любом выборе элемента g.

III. *Условие существования обратного элемента к каждому данному элементу.* К каждому данному элементу g множества G можно подобрать такой элемент g^{-1} того же множества G, что

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e.$$

Множество G с определенной в нем операцией умножения (композиции), удовлетворяющей только что перечисленным трем условиям, называется *группой*; сами эти условия называются *аксиомами понятия группы* или, короче, *групповыми аксиомами*.

Пусть в группе G, кроме трех групповых аксиом, оказывается выполненным еще и следующее условие.

IV. *Условие переместительности, или коммутативности*:

$$g_2 g_1 = g_1 g_2.$$

В этом случае группа G называется *коммутативной* или *абелевой*.

Группа называется *конечной*, если она состоит из конечного числа элементов; в противном случае она называется *бесконечной*.

Число элементов конечной группы называется ее *порядком*.

Познакомившись с определением группы, мы видим, что множество всех преобразований какого-либо множества X есть группа. В частности, группой является множество всех перестановок в каком-либо конечном множестве, например множество всех перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$.

Замечание 1. Мы назвали операцию композиции в группе *умножением*. С таким же успехом ее можно было бы назвать *сло-*

жением[1]). Это общепринято, в частности, в применении к коммутативным группам.

Иногда, желая подчеркнуть, что композиция в данной группе G названа сложением, саму группу G называют *аддитивной*. Аналогично, желая подчеркнуть действие умножения как композицию в группе, называют группу *мультипликативной*. Простейшими примерами коммутативных групп являются:

1. *Аддитивная группа J всех целых чисел* с обычным сложением в качестве композиции и числом нуль в качестве нейтрального элемента. «Обратный» элемент к целому числу n есть при этом число $-n$.

2. *Аддитивная группа всех вещественных чисел*, также с обычным сложением в качестве композиции. Нейтральный элемент есть снова число нуль, $-x$ есть «обратный» элемент к числу x.

3. Если в аддитивной группе всех вещественных чисел сохранить (не меняя композицию) лишь рациональные числа, получим *аддитивную группу всех рациональных чисел*.

4. *Мультипликативная группа всех положительных вещественных чисел*. Композиция в этой группе есть арифметическое умножение; нейтральным элементом является число 1; обратным элементом к числу x является число $\frac{1}{x}$.

5. *Группа $\mathcal{H}$ всех свободных векторов* (на плоскости, соответственно в пространстве). Композиция определяется как сложение векторов (см. гл. II). Нейтральным элементом является нулевой вектор; «обратным» элементом к вектору $\mathbf{u}$ является вектор $-\mathbf{u}$.

6. *Группа всех вращений плоскости* (самой по себе) *вокруг данной точки O* (на всевозможные углы φ). Каждое такое вращение рассматривается как преобразование плоскости (т. е. как взаимно однозначное отображение плоскости на себя). Поэтому два вращения на углы φ и φ', разность которых есть целое, кратное 2π:

$$\varphi' - \varphi = 2k\pi, \quad k \text{ — целое},$$

должны рассматриваться как совпадающие (тождественные) между собою вращения; значит, достаточно говорить о вращениях (поворотах) плоскости на всевозможные углы φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

7. *Группа $\mathcal{H}_3$, состоящая из трех вращений плоскости* (вокруг точки O), а именно из вращений *на углы* 0 (тождественное вращение), $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$. Это вращения плоскости, отображающие на себя правильный треугольник с центром в точке O.

---

[1]) Так сделано, например, в моей книжке «Введение в теорию групп», из которой читатель может почерпнуть некоторые дальнейшие элементарные сведения о группах.

Аналогично можно говорить о *группе* $\mathcal{H}_n$, *состоящей из* n *вращений плоскости на углы* $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{2\cdot 2\pi}{n}, \ldots, \frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n}$. Это вращения плоскости вокруг данной точки O, отображающие на себя правильный n-угольник с центром в точке O.

Наконец, определим группу $\mathcal{H}_2$ как *группу, состоящую из двух вращений плоскости*: на угол 0 и на угол π.

8. Пусть m — данное целое число $\geqslant 2$. Назовем любые два целых числа n и n' *эквивалентными между собою относительно числа* m (или *эквивалентными по модулю* m), если их разность $n-n'$ без остатка делится на число m. Это определение эквивалентности удовлетворяет аксиомам рефлексивности, симметрии и транзитивности и, следовательно, порождает разбиение всего множества целых чисел на классы чисел, эквивалентных между собою по модулю m. Один из этих классов состоит из чисел, делящихся без остатка на m, остальные состоят из чисел, дающих при делении на m один и тот же положительный остаток r ($r=1, 2, \ldots, m-1$).

Так, например, при $m=3$ имеем классы K_0, K_1, K_2, причем класс K_0 состоит из чисел вида $3n$, т. е. из чисел

$$\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots;$$

класс K_1 — из чисел вида $3n+1$, т. е. из чисел

$$\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots;$$

класс K_2 — из чисел вида $3n+2$, т. е. из чисел

$$\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \ldots$$

При любом m имеем классы

$$K_0, K_1, \ldots, K_{m-1},$$

состоящие соответственно из чисел вида

$$mn, mn+1, \ldots, mn+r, \ldots, mn+(m-1),$$

где n пробегает все целочисленные значения.

Эти классы кратко называются «*классами по модулю* m». Для них вводится следующее правило сложения: для сложения двух классов K_h и K_l надо выбрать из каждого класса по одному какому-нибудь элементу: k_h из K_h, k_l из K_l; класс K_r, содержащий число k_h+k_l, будет одним и тем же, как бы ни выбрали число k_h в классе K_h и число k_l в классе K_l. Поэтому класс K_r, содержащий элемент k_h+k_l, зависит только от классов K_h, K_l, а не от того, какие элементы k_h, k_l мы выбрали в этих классах; класс K_r называется *суммой классов* K_h *и* K_l:

$$K_r = K_h + K_l.$$

Это сложение, очевидно, коммутативно и ассоциативно. Легко видеть, что при этом всегда $K_0 + K_i = K_i$.

При $m = 3$ имеем:

$$K_0 + K_0 = K_0, \quad K_0 + K_1 = K_1 + K_0 = K_1, \quad K_0 + K_2 = K_2 + K_0 = K_2,$$
$$K_1 + K_1 = K_2, \quad K_1 + K_2 = K_2 + K_1 = K_0, \quad K_2 + K_2 = K_1.$$

При $m = 4$ имеем:

$$K_0 + K_i = K_i \ (i = 0, 1, 2, 3),$$
$$K_1 + K_2 = K_3, \quad K_1 + K_3 = K_0,$$
$$K_2 + K_2 = K_0, \quad K_2 + K_3 = K_1, \quad K_3 + K_3 = K_2$$

и далее по коммутативности сложения.

Для каждого класса K_i имеется единственный класс K_j, удовлетворяющий условию

$$K_i + K_j = K_0.$$

Если k_i — какое-нибудь число из класса K_i, то класс, содержащий число $-k_i$ (этот же класс содержит и число $m - k_i$), является искомым. Например, при $m = 3$ имеем

$$K_1 + K_2 = K_0,$$

при $m = 4$

$$K_1 + K_3 = K_0$$

и т. д.

Классы K_i $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$ чисел по модулю m с приведенным сложением в качестве композиции образуют коммутативную группу, которую обозначаем через $\mathfrak{T}_m$ и называем *группой классов или группой вычетов по модулю m.*

Понятие изоморфизма групп. Определение. Взаимно однозначное отображение f группы X на группу Y называется *изоморфным отображением* или *изоморфизмом* группы X на группу Y, если при этом сохраняется композиция элементов, т. е. из

$$x_1 x_2 = x_3 \quad \text{в } X$$

всегда следует, что

$$f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_3) \quad \text{в } Y.$$

Если f есть изоморфное отображение группы X на группу Y, то обратное отображение f^{-1} группы Y на группу X также есть изоморфизм.

В самом деле, пусть

$$f^{-1}(y_1) = x_1, \quad f^{-1}(y_2) = x_2,$$

и пусть

$$y_1 y_2 = y_3.$$

Пусть $f^{-1}y_3 = x_3$. Надо доказать, что $x_3 = x_1x_2$. Доказываем от противного: пусть $x_3 \neq x_1x_2$. Так как f — изоморфное, в частности взаимно однозначное, отображение, то из нашего предположения следует, что $f(x_3) \neq f(x_1x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$. Между тем $f(x_3) = y_3$, $f(x_1)f(x_2) = y_1y_2$, т. е. $y_3 \neq y_1y_2$, вопреки предположению.

Основное определение. Две группы называются изоморфными, если существует изоморфное отображение одной из них на другую.

Примеры изоморфных групп. 1) Пусть V^2 есть группа всех свободных векторов на плоскости. Эта группа изоморфна группе L^2, элементами которой являются упорядоченные пары $\{x, y\}$ действительных чисел с покоординатным сложением:

$$\{x_1, y_1\} + \{x_2, y_2\} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}.$$

Мы получаем изоморфное отображение группы V^2 на группу L^2, ставя в соответствие каждому свободному вектору и пару его координат x, y (в какой-либо определенной системе координат на плоскости).

2) Поставим в соответствие каждому положительному числу x его (натуральный) логарифм $\ln x$. Этим определено изоморфное отображение мультипликативной группы всех положительных чисел на аддитивную группу всех действительных чисел. Другой изоморфизм между этими же группами получим, если возьмем вместо натуральных логарифмов десятичные (или вообще логарифмы по любому основанию a).

3) Группа $\mathscr{H}_m$ изоморфна группе $\mathscr{T}_m$. (Доказательство предоставляется читателю.)

Определение. Всякая группа, изоморфная группе $\mathscr{T}_m$ (или, что то же, группе $\mathscr{H}_m$), называется (конечной) *циклической группой порядка m*. Всякая группа, изоморфная аддитивной группе всех целых чисел, называется *бесконечной циклической группой*.

4) Назовем два вещественных числа x и x' *эквивалентными по модулю* 1, если их разность есть целое число. Это определение эквивалентности порождает разбиение множества всех вещественных чисел на классы ξ. Суммой двух классов ξ_1, ξ_2 назовем класс ξ_3, содержащий сумму $x_1 + x_2$ каких-либо двух чисел x_1, x_2, взятых соответственно в классах ξ_1, ξ_2. Легко видеть, что класс ξ_3 не зависит от выбора элементов x_1, x_2 в классах ξ_1, ξ_2. Это определение сложения превращает множество всех наших классов в группу Γ_1, изоморфную группе $\mathscr{H}$ всех вращений плоскости вокруг данной ее точки (доказать!).

Указание. Надо прежде всего доказать, что группа Γ_1 изоморфна группе $\Gamma_{2\pi}$, полученной как группа классов вещественных чисел, если считать эквивалентными всякие два числа, разность которых есть целочисленное, кратное 2π. Теперь легко видеть, что

каждому элементу ξ группы $\Gamma_{2\pi}$ взаимно однозначно соответствует некоторый поворот плоскости (на любой угол φ, где φ принадлежит классу ξ; все такие углы отличаются друг от друга на кратные 2π, т. е. определяют одно и то же вращение). Полученное взаимно однозначное соответствие между группами $\Gamma_{2\pi}$ и $\mathcal{H}$ есть изоморфизм.

Замечание. Группа $\mathcal{T}_m$, а также Γ_1 и $\Gamma_{2\pi}$ являются примерами, иллюстрирующими (в частном случае коммутативных групп) важнейшее в теории групп понятие *фактор-группы*. Пусть дана какая-нибудь коммутативная группа G. Ее мы пишем аддитивно, т. е. композицию в ней называем *сложением*, и (для двух каких-нибудь элементов g_1 и g_2 группы вместо g_1g_2 пишем g_1+g_2[1])) в соответствии с этим нейтральный элемент называем *нулем* и обозначаем его через 0, а элемент, обратный к данному элементу g, называем *противоположным* и обозначаем через $-g$. Вместо $g_1+(-g_2)$ пишем просто g_1-g_2. Имеем (в коммутативной группе) всегда $-(g_1-g_2)=g_2-g_1$. Пусть в коммутативной группе G дана какая-нибудь подгруппа H. Два элемента g_1 и g_2 группы G называем *эквивалентными* относительно подгруппы H, если их разность g_1-g_2 есть элемент этой подгруппы. Читатель легко проверит, что это определение эквивалентности удовлетворяет трем аксиомам равенства и, следовательно, ведет к распадению всей группы на классы K эквивалентных элементов по отношению к подгруппе H. Одним из этих классов является, как легко видеть, сама подгруппа H; этот класс называем *нулевым*. Как бы мы ни выбирали элементы g_1 и g_2, принадлежащие соответственно двум каким-нибудь классам K_1 и K_2, элемент g_1+g_2 принадлежит всегда одному и тому же классу K_3, определенному, таким образом, самими классами K_1 и K_2, а не выбором принадлежащих им элементов g_1 и g_2. Класс K_3 называется *суммой классов* K_1 и K_2. Таким образом, множество всех классов эквивалентности, на которые распадается коммутативная группа G относительно своей подгруппы H, превращается в группу G^*, называемую *фактор-группой коммутативной группы G по ее подгруппе H* и обозначаемую так: $G^*=G/H$. Нулевым элементом этой группы является нулевой класс, т. е. подгруппа H. Фактор-группы определяются и для некоммутативных групп, однако уже не по любой подгруппе, а только по некоторым так называемым *инвариантным подгруппам* (или *нормальным делителям*), определение которых читатель может найти, например, в моей маленькой книжке «Введение в теорию групп».

Ставя в соответствие каждому элементу группы G единственный содержащий ее класс относительно подгруппы H, получим отображение f группы G на фактор-группу G/H. Это отображение, уже

---

[1]) Аддитивно можно, конечно, записывать и любые группы—см. уже упомянутую мою книгу «Введение в теорию групп».

не будучи взаимно однозначным [1]), тем не менее сохраняет композицию в том же смысле, как мы говорили об этом при определении изоморфизма: если g_1 и g_2 — любые элементы группы G, то

$$f(g_1+g_2)=f(g_1)+f(g_2).$$

Отображения какой-нибудь группы X на какую-нибудь группу Y, удовлетворяющие этому условию, называются *гомоморфными отображениями* или *гомоморфизмами*. Изоморфные отображения суть не что иное, как взаимно однозначные гомоморфные отображения одной группы на другую (коммутативность групп при этом не предполагается).

§ 6. Простейшие теоремы о группах

1. Аксиома ассоциативности. Аксиома ассоциативности имеет в теории групп очень большое значение: она позволяет определить не только произведение двух, но и произведение трех и вообще любого конечного числа элементов данной группы G.

В самом деле, если даны, положим, три элемента g_1, g_2, g_3 группы G, то мы пока еще не знаем, что значит перемножить эти три элемента: ведь аксиомы группы говорят лишь о произведении двух множителей и выражения вида $g_1g_2g_3$ еще не определены. Однако условие ассоциативности гласит, что, перемножая, с одной стороны, два элемента g_1 и g_2g_3, с другой стороны, два элемента g_1g_2 и g_3, мы получим один и тот же элемент $g_1(g_2g_3)=(g_1g_2)g_3$, который и обозначаем через $g_1g_2g_3$.

Таким же точно образом можно определить произведение четырех элементов g_1, g_2, g_3, g_4, например, как

$$g_1g_2g_3g_4=g_1(g_2g_3g_4)=(g_1g_2)(g_3g_4)=(g_1g_2g_3)g_4.$$

Аналогично определяется произведение любого числа элементов группы.

2. Нейтральный элемент. Условие существования нейтрального элемента гласит: в группе существует некоторый элемент e такой, что для любого элемента g группы выполнено условие

$$ge=eg=g. \tag{1}$$

В этом условии не содержится утверждения, что не может быть в данной группе второго элемента e', отличного от e, но

---

[1]) За исключением тривиального случая, когда группа H состоит из одного нулевого элемента группы G. Во всех случаях прообразом нулевого элемента фактор-группы G/H при отображении f, очевидно, является множество всех элементов подгруппы H.

обладающего тем же свойством

$$ge' = e'g = g \tag{1'}$$

для любого g.

Отсутствие такого второго элемента e' вытекает из следующей более сильной теоремы, которую иногда называют *теоремой о единственности нейтрального элемента.*

Теорема 6. *Если для какого-нибудь определенного элемента g группы G найден элемент e_g, удовлетворяющий одному из условий*

$$ge_g = g \text{ или } e_g g = g,$$

то непременно

$$e_g = e.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $ge_g = g$. Заметим прежде всего, что для любого элемента g' имеем

$$g'e_g = (g'e)\, e_g,$$

что при замене e через $g^{-1}g$ дает

$$g'e_g = g'g^{-1}ge_g = g'g^{-1}(ge_g) = g'g^{-1}g = g'.$$

Точно так же имеем

$$e_g g' = g'.$$

Итак, для любого g' имеем $g'e_g = e_g g' = g'$. Возьмем, в частности, $g' = e$. Получаем

$$ee_g = e. \tag{2}$$

Но по определению элемента e имеем, с другой стороны,

$$ee_g = e_g. \tag{3}$$

Из уравнений (2) и (3) следует:

$$e_g = e,$$

что и требовалось доказать.

Совершенно аналогичным образом можно вывести тождество $e_g = e$ из предположения $e_g g = g$.

3. Обратный элемент. Условие существования обратного элемента гласит: для каждого элемента g существует определенный элемент g^{-1} такой, что

$$g^{-1}g = gg^{-1} = e.$$

Здесь опять-таки утверждается лишь существование элемента g^{-1}, а никак не единственность его. Докажем эту единственность, т. е. докажем следующую теорему.

Теорема 7. *Если для данного g имеем какой-нибудь элемент g', удовлетворяющий одному из условий*

$$gg' = e \quad или \quad g'g = e,$$

то непременно

$$g' = g^{-1}.$$

Доказательство. Пусть

$$gg' = e.$$

Отсюда следует, что

$$g^{-1}(gg') = g^{-1},$$

т. е.

$$(g^{-1}g)\,g' = g^{-1},$$

следовательно,

$$eg' = g^{-1},$$

отсюда

$$g' = g^{-1}.$$

Совершенно аналогичным образом можно из предположения $g'g = e$ вывести $g' = g^{-1}$.

Итак, для данного g существует единственный элемент g', удовлетворяющий равенству $gg' = e$ или равенству $g'g = e$, а именно элемент g^{-1}.

Возьмем теперь элемент g^{-1}. Элемент g удовлетворяет равенству $g^{-1}g = e$, т. е. является для элемента g^{-1} обратным элементом. Итак,

$$(g^{-1})^{-1} = g.$$

4. Замечания об аксиомах понятия группы. Мы не ставили себе задачей дать наименьшее число требований, достаточных для определения понятия группы. Действительно, мы потребовали, чтобы нейтральный элемент удовлетворял сразу условиям

$$ge = eg = g$$

для всех элементов $g \in G$, а обратный элемент g^{-1} к любому элементу g — условиям

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e.$$

Между тем на основании доказанного в пп. 2 и 3 настоящего параграфа достаточно было бы потребовать, чтобы выполнялось одно какое-нибудь из условий

$$ge = g \quad или \quad eg = g,$$

а также одно какое-нибудь из условий

$$gg^{-1} = e \quad или \quad g^{-1}g = e.$$

Наконец, заметим, что в определении группы (§ 5) условие существования нейтрального элемента и условие существования обратного элемента ко всякому данному можно было бы заменить одной следующей аксиомой:

Ко всяким двум элементам a и b группы G можно найти элементы x и y такие, что $ax=b$ и $ya=b$.

Доказательство предлагаем провести самому читателю (или прочитать его, например, в книге А. Г. Куроша «Теория групп»).

5. Понятие подгруппы. Определение. Если дана какая-нибудь группа G и если множество $\mathcal{H}$, состоящее из некоторых элементов группы G, образует (при композиции, господствующей в G) группу, то группа $\mathcal{H}$ называется *подгруппой группы G.*

Таким образом, аддитивная группа целых чисел является подгруппой аддитивной группы рациональных чисел, а эта последняя — подгруппой аддитивной группы всех вещественных чисел. Читатель легко докажет, что множество всех четных перестановок из n элементов есть подгруппа множества всех перестановок из этих элементов и т. д.

6. Условие, чтобы подмножество группы было подгруппой. При доказательстве того, что некоторое подмножество $\mathcal{H}$ группы G является подгруппой, удобнее всего бывает пользоваться следующей общей теоремой:

Подмножество $\mathcal{H}$ группы G тогда и только тогда является подгруппой группы G, если выполнены следующие условия:

1. *Произведение всяких двух элементов h_1 и h_2 из $\mathcal{H}$ (в смысле умножения, определенного в G) есть элемент множества $\mathcal{H}$.*

2. *Нейтральный элемент группы G есть элемент множества $\mathcal{H}$.*

3. *Элемент, обратный к какому-нибудь элементу множества $\mathcal{H}$, есть элемент множества $\mathcal{H}$.*

Для доказательства достаточно заметить, что наши условия выражают как раз требование, чтобы умножение, определенное в G, но применяемое лишь к элементам множества $\mathcal{H}\subset G$, удовлетворяло всем аксиомам группы (ассоциативности требовать не нужно: будучи выполнена при умножении любых элементов множества G, она тем более выполнена в частном случае, когда эти элементы являются элементами множества $\mathcal{H}$).

§ 7. Эквивалентность подмножеств данного множества по отношению к данной группе его преобразований

Множество всех преобразований данного множества X является группой (по отношению к определенному выше умножению преобразований); группа эта называется *группой всех преобразований множества X* или *симметрической группой множества X* (последнее

название употребительно главным образом в случае, когда множество X конечно, и тогда его симметрическая группа есть группа всех перестановок данного конечного множества X). В группе всех преобразований данного множества X содержится великое множество подгрупп, и все эти подгруппы, естественно, называются *группами преобразований множества* X. В частности, в симметрической группе конечного множества X в качестве подгруппы содержится, например, группа всех четных перестановок, содержатся и другие подгруппы. Но во всех группах преобразований данного множества закон композиции всегда один и тот же: это то правило перемножения преобразований, которое мы сначала определили для преобразований конечных множеств (т. е. для перестановок), а потом дословно повторили в § 3 для преобразований любых множеств.

В этих лекциях нас интересуют преобразования плоскости, пространства (рассматриваемых как множества лежащих в них точек и векторов) и вообще преобразования множеств, являющихся теми или иными геометрическими объектами; при этом мы изучаем лишь преобразования, удовлетворяющие некоторым геометрическим условиям. Так, мы изучаем группы движений плоскости и трехмерного пространства, линейные преобразования векторных пространств и другие группы преобразований пространств различного числа измерений. Во всех случаях первостепенное значение для нас имеет порождаемое данной группой преобразований множества X понятие эквивалентности подмножеств множества X. Это понятие эквивалентности мы сейчас и определим.

Два подмножества A и A' множества X называются эквивалентными относительно данной группы преобразований G множества X, если в числе элементов группы G имеется преобразование f, «переводящее A в A'», т. е. отображающее множество A на множество A'.

Это определение эквивалентности удовлетворяет требованиям рефлексивности, симметрии и транзитивности. В самом деле, рефлексивность вытекает из того, что одним из элементов группы G (как и всякой группы преобразований) является тождественное преобразование e. Мы не изменим множество A, подвергая его тождественному преобразованию; следовательно, каждое множество A эквивалентно самому себе (относительно группы преобразований G множества X). Симметрия вытекает из того, что группа G, содержащая преобразование f, переводящее множество A в некоторое множество A', содержит и обратное преобразование f^{-1}, переводящее множество A' в множество A. Поэтому, если множество A эквивалентно множеству A', то и множество A' эквивалентно множеству A. Остается транзитивность. Если посредством преобразования f_1 множество A переходит в множество A_1, а посредством преобразования f_2 множество A_1 переходит в множество A_2, то преобразование $f_2 f_1$ переводит множество A в множество A_2: если множество A эквивалентно множеству A_1, а

множество A_1 — множеству A_2, то множество A эквивалентно множеству A_2.

Итак, все три аксиомы эквивалентности выполнены. Поэтому любая совокупность подмножеств множества X распадается на классы, состоящие из множеств, попарно эквивалентных между собою по отношению к данной группе преобразований G множества X.

Замечание. Нам часто приходится доказывать, что такая-то совокупность геометрических фигур состоит из фигур, эквивалентных между собою по отношению к такой-то группе преобразований. Почти всегда мы делаем это, доказывая, что все фигуры этой совокупности эквивалентны какой-нибудь одной среди них, — они тогда будут эквивалентны между собою (в силу аксиомы транзитивности).

Пример. Назовем преобразование f плоскости (или пространства) *преобразованием подобия* или *подобным преобразованием,* если существует такое число k (*коэффициент подобия*), что, обозначая через M_1 и M_2 две произвольные точки плоскости, а через M_1' и M_2' их образы при преобразовании f, имеем $\rho(M_1', M_2') = k\rho(M_1, M_2)$, где $\rho(M_1, M_2)$ — расстояние между точками M_1 и M_2 (длина отрезка $\overline{M_1M_2}$). Легко видеть, что подобные преобразования плоскости (пространства) образуют группу преобразований. Два множества точек плоскости или пространства (две любые геометрические фигуры) называются *подобными между собою,* если они эквивалентны по отношению к группе подобных преобразований. Совокупность всех множеств, лежащих в плоскости, а следовательно и любая совокупность тех или иных специальных фигур, например совокупность всех плоских многоугольников или всех кривых второго порядка, распадается на классы подобных между собою фигур. То же и в пространстве.

Мы доказываем (в главе XVI), что все параболы подобны между собою. Для этого достаточно доказать, что все параболы подобны одной определенной параболе, например той, которая в данной системе координат имеет уравнение $y^2 = 2x$. В главе XVI мы так и поступаем.

В этих лекциях вопросы классификации геометрических фигур по отношению к той или иной группе преобразований (того пространства, в котором эти фигуры рассматриваются) занимают видное место.

ЗАДАЧИ

К главам I, II, III

Задача 1. Говорят, что пара точек C, D гармонически разделяет пару точек A, B, если четыре точки A, B, C, D лежат на одной прямой и $\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}:\overrightarrow{DB}$.

Доказать, что если пара точек C, D гармонически разделяет пару точек A, B и E — середина отрезка $\overline{CD}$, то точка E лежит вне отрезка $\overline{AB}$.

Доказательство. Пусть x_1, x_2 — координаты точек A, B в какой-нибудь системе координат, введенной на прямой AB. Тогда, обозначая соответственно через x_3, x_4, x_5 координаты точек C, D, E в той же системе и полагая $\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{CB}=\lambda$, будем иметь:

$$\overrightarrow{AD}:\overrightarrow{DB}=-\lambda$$

и

$$x_3=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad x_4=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda},$$

$$x_5=\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+\dfrac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}}{2}=\frac{x_1-\lambda^2 x_2}{1-\lambda^2}.$$

Итак,

$$x_5=\frac{x_1-\lambda^2 x_2}{1-\lambda^2}.$$

Это равенство показывает, что точка E делит отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $-\lambda^2<0$, откуда следует, что точка E лежит вне отрезка $\overline{AB}$.

Задача 2. Доказать: для того чтобы два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (лежащие на прямой, на плоскости или в пространстве) были равны, необходимо и достаточно, чтобы середины отрезков $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ совпадали.

Доказательство необходимости. Пусть $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ и O — середина отрезка $\overline{AD}$. Докажем, что O будет также серединой отрезка $\overline{BC}$. Так

как O — середина $\overline{AD}$, то $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$. Чтобы установить, что O является серединой отрезка $\overline{BC}$, надо показать, что $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OC}$. Но

$$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}.$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OC},$$

т. е. O — середина $\overline{BC}$.

Доказательство достаточности. Пусть середины отрезков $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ совпадают в точке O, т. е.

$$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OC}, \qquad \overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}.$$

Докажем, что

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD},$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{CD}.$$

Задача 3. Даны радиусы-векторы [1]) $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ двух точек A и B (прямой, плоскости или пространства). Найти радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки M, делящей направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в данном отношении λ.

Решение. $\overrightarrow{AM}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$, $\overrightarrow{MB}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}$, $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}=\lambda$ или $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$, откуда

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=\lambda(\mathbf{r}_2-\mathbf{r})$$

и, следовательно,

$$\mathbf{r}=\frac{\mathbf{r}_1+\lambda\mathbf{r}_2}{1+\lambda}.$$

В частности, если $\lambda=1$, то

$$\mathbf{r}=\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2},$$

т. е. радиус-вектор середины отрезка равен полусумме радиусов-векторов его концов.

Задача 4. Доказать, что: 1) отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, имеют общую точку и делятся в этой точке пополам; 2) эта же точка является общей для отрезков, соединяющих вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположных граней, причем она делит эти отрезки в отношении 3:1, считая от вершины.

Доказательство. Пусть O — произвольная точка пространства. Рассмотрим векторы:

$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{r}_1, \quad \overrightarrow{OB}=\mathbf{r}_2, \quad \overrightarrow{OC}=\mathbf{r}_3, \quad \overrightarrow{OD}=\mathbf{r}_4,$$

идущие из точки O в вершины тетраэдра $ABCD$.

---

[1]) *Радиусом-вектором* точки M (относительно данной аффинной системы координат с началом O) называется вектор $\overrightarrow{OM}$.

1) Пусть E и F — середины ребер $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, а M — середина отрезка $\overline{EF}$, тогда

$$\overrightarrow{OE}=\mathbf{r}_E=\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2}{2},$$

$$\overrightarrow{OF}=\mathbf{r}_F=\frac{\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4}{2},$$

$$\overrightarrow{OM}=\mathbf{r}_M=\frac{\mathbf{r}_E+\mathbf{r}_F}{2}=\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4}{4}.$$

Из симметрии выражения для $\mathbf{r}_M$ относительно векторов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_4$, идущих из точки O в вершины тетраэдра, заключаем, что точка M будет серединой отрезков, соединяющих середины двух других пар противоположных ребер тетраэдра.

2) Пусть K — точка пересечения медиан грани ABC. Тогда

$$\overrightarrow{OK}=\mathbf{r}_K=\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3}{3}.$$

Обозначим через N точку направленного отрезка $\overrightarrow{DK}$, делящую его в отношении 3:1. Тогда для вектора $\mathbf{r}_N=\overrightarrow{ON}$ получим выражение

$$\mathbf{r}_N=\frac{\mathbf{r}_D+3\mathbf{r}_K}{4}=\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4}{4}.$$

Отсюда видно, что точка N совпадает с точкой M и что она одна и та же для всех отрезков, соединяющих вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположных граней.

Задача 5. Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника в его вершины, равна нулю.

Доказательство. Пусть $A_1A_2A_3\ldots A_n$ — правильный n-угольник, O — его центр. Требуется доказать, что

$$\overrightarrow{OA}_1+\overrightarrow{OA}_2+\overrightarrow{OA}_3+\ldots+\overrightarrow{OA}_n=0.$$

Повернем фигуру, составленную из отрезков $\overline{OA}_1$, $\overline{OA}_2$, $\overline{OA}_3$, ..., $\overline{OA}_n$, вокруг точки O, как твердое тело, на центральный угол многоугольника. Тогда, с одной стороны, сумма векторов $\overrightarrow{OA}_1+\ldots+\overrightarrow{OA}_n$, не меняя своей длины, повернется в том же направлении и на тот же угол. С другой стороны, эта сумма не должна измениться, так как после поворота мы получим ту же систему векторов, что и прежде. Вектор $\overrightarrow{OA}_1$ совместится с вектором $\overrightarrow{OA}_2$, вектор $\overrightarrow{OA}_2$ совместится с вектором $\overrightarrow{OA}_3$, ..., вектор $\overrightarrow{OA}_n$ совместится с вектором $\overrightarrow{OA}_1$. Из сопоставления двух утверждений относительно суммы $\overrightarrow{OA}_1+\overrightarrow{OA}_2+\ldots+\overrightarrow{OA}_n$ следует, что она равна нулю.

Задача 6. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за начало аффинной системы координат вершину A, за единичный вектор оси абсцисс — вектор $\overrightarrow{AB}$, а за единичный вектор оси ординат — вектор $\overrightarrow{AC}$, найти в этой системе координаты вершин шестиугольника.

Решение.

$$A=(0,\ 0),\quad B=(1,\ 0),\quad C=(0,\ 1);$$
$$\overrightarrow{BC}=\{-1,\ 1\},\quad \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}=\{-2,\ 2\},$$
$$D=(-2,\ 2);$$
$$\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{AB}=\{-1,\ 0\},\quad \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\{-3,\ 2\},$$
$$E=(-3,\ 2);$$
$$\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{BC}=\{1,\ -1\},\quad \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\{-2,\ 1\},$$
$$F=(-2,\ 1).$$

К главе IV

Задача 7. Доказать, что если A, B, C, D—произвольные четыре точки прямой, плоскости или пространства, то всегда имеет место равенство

$$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{DB})=0.$$

Доказательство.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA},\quad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB},\quad \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}.$$

Поэтому

$$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{DB})=$$
$$=(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DB})=$$
$$=(\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{DC})-(\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DA})-(\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DB})-(\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DB})=0.$$

Следствие. *Если два ребра тетраэдра перпендикулярны к противоположным им ребрам, то перпендикулярны и противоположные ребра третьей пары.*

Задача 8. Найти вектор **v**, являющийся ортогональной проекцией вектора **u** на ось, направление которой определяется вектором **a**.

Решение. Алгебраическое значение ортогональной проекции вектора **u** на ось с направляющим вектором **a** определяется по формуле

$$\frac{(\mathbf{a},\ \mathbf{u})}{|\mathbf{a}|}.$$

Единичный вектор, имеющий направление вектора **a**, находится из соотношения

$$\mathbf{e}=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

Следовательно, вектор **v**, являющийся ортогональной проекцией вектора **u** на ось с направляющим вектором **a**, будет

$$\mathbf{v}=\frac{(\mathbf{a},\ \mathbf{u})}{\mathbf{a}^2}\,\mathbf{a}.$$

Задача 9. Зная длины трех ребер параллелепипеда, выходящих из одной вершины, и образуемые ими углы, найти длину диагонали параллелепипеда, выходящей из той же вершины.

Решение. Пусть a, b, c — длины ребер параллелепипеда, выходящих из вершины O:

$$|\overrightarrow{OA}|=a, \quad |\overrightarrow{OB}|=b, \quad |\overrightarrow{OC}|=c;$$

обозначим через α, β, γ углы, образуемые этими ребрами:

$$\angle BOC=\alpha, \quad \angle COA=\beta, \quad \angle AOB=\gamma.$$

Пусть d — длина диагонали $\overrightarrow{OD}$ параллелепипеда, выходящей из вершины O. Имеем:

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

или, полагая $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$, $\overrightarrow{OD}=\mathbf{d}$:

$$\mathbf{d}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}.$$

Возводя это равенство скалярно в квадрат, получим:

$$\mathbf{d}^2=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+2\mathbf{ab}+2\mathbf{ac}+2\mathbf{bc}$$

или

$$d^2=a^2+b^2+c^2+2ab\cos\gamma+2ac\cos\beta+2bc\cos\alpha,$$

откуда

$$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab\cos\gamma+2ac\cos\beta+2bc\cos\alpha}.$$

Задача 10. Доказать, что сумма квадратов всех сторон и всех диагоналей правильного многоугольника равна n^2r^2, где n — число сторон многоугольника, а r — радиус описанной окружности.

Доказательство. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — правильный многоугольник, n — число его сторон, O — его центр, r — радиус описанной окружности. Положим

$$\overrightarrow{OA_1}=\mathbf{r}_1, \quad \overrightarrow{OA_2}=\mathbf{r}_2, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{OA_n}=\mathbf{r}_n.$$

Найдем сумму квадратов сторон и диагоналей многоугольника, выходящих из вершины A_1. Имеем:

$$\overrightarrow{A_1A_1}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_1=\mathbf{0}, \quad \overrightarrow{A_1A_2}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1, \quad \overrightarrow{A_1A_3}=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{A_1A_n}=\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_1.$$

Возводя эти равенства скалярно в квадрат и складывая, получаем

$$|\overrightarrow{A_1A_1}|^2+|\overrightarrow{A_1A_2}|^2+|\overrightarrow{A_1A_3}|^2+\ldots+|\overrightarrow{A_1A_n}|^2=$$
$$=|\mathbf{r}_1|^2-2(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1)+|\mathbf{r}_1|^2+|\mathbf{r}_1|^2-2(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)+|\mathbf{r}_2|^2+|\mathbf{r}_1|^2-2(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_3)+|\mathbf{r}_3|^2+\ldots$$
$$\ldots+|\mathbf{r}_1|^2-2(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_n)+|\mathbf{r}_n|^2=2nr^2-2(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3+\ldots+\mathbf{r}_n).$$

Но (см. задачу 5)

$$\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\ldots+\mathbf{r}_n=0.$$

Поэтому

$$|\overrightarrow{A_1A_2}|^2+|\overrightarrow{A_2A_3}|^2+\ldots+|\overrightarrow{A_1A_n}|^2=2nr^2.$$

Точно так же докажем, что сумма квадратов сторон и диагоналей многоугольника, исходящих из любой его вершины, равна $2nr^2$.

Так как у многоугольника n вершин, то, беря сумму квадратов сторон и диагоналей, исходящих из каждой вершины, и складывая эти суммы, получим в результате число $n \cdot 2nr^2 = 2n^2r^2$. Но при этом каждую сторону и каждую диагональ мы берем два раза; следовательно, сумма всех сторон и всех диагоналей правильного n-угольника равна n^2r^2.

Задача 11. В вершине куба приложены три силы, равные по абсолютной величине 1, 2 и 3 и направленные по диагоналям граней куба, исходящим из этой вершины.

Определить величину равнодействующей этих сил и ее углы с данными силами.

Решение. Обозначим данные силы через $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, а их равнодействующую через $\mathbf{F}$. Тогда $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$. Пусть $|\mathbf{F}_1| = 1$, $|\mathbf{F}_2| = 2$, $|\mathbf{F}_3| = 3$.

Введем прямоугольную систему координат, принимая за начало координат вершину куба, в которой приложены силы, а за оси — ребра куба. Пусть, например, сила $\mathbf{F}_1$ лежит в плоскости yz, сила $\mathbf{F}_2$ — в плоскости zx, сила $\mathbf{F}_3$ — в плоскости xy. Тогда

$$\mathbf{F}_1 = \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \quad \mathbf{F}_2 = \left\{\frac{2}{\sqrt{2}}, 0, \frac{2}{\sqrt{2}}\right\}, \quad \mathbf{F}_3 = \left\{\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, 0\right\},$$

откуда

$$\mathbf{F} = \left\{\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right\};$$

$$|\mathbf{F}| = 5, \quad \cos \angle (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}) = \frac{7}{10}, \quad \cos \angle (\mathbf{F}_2, \mathbf{F}) = \frac{8}{10}, \quad \cos \angle (\mathbf{F}_3, \mathbf{F}) = \frac{9}{10}.$$

Задача 12. Из начала координат выходят два луча, образующие с положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz углы, соответственно равные α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2.

Найти направляющие косинусы биссектрисы угла между данными лучами.

Решение. Отложим на данных лучах единичные векторы:

$$\overrightarrow{OA_1} = \{\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1\},$$
$$\overrightarrow{OA_2} = \{\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2\}.$$

Их сумма

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = \{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2, \cos \beta_1 + \cos \beta_2, \cos \gamma_1 + \cos \gamma_2\}$$

пойдет по биссектрисе угла между данными лучами, как диагональ ромба OA_1BA_2; далее,

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)^2 + (\cos \beta_1 + \cos \beta_2)^2 + (\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2)^2} =$$
$$= \sqrt{2 + 2(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2)} =$$
$$= \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} = 2 \cos \frac{\varphi}{2},$$

где φ — угол между данными лучами. Следовательно, **направляющие косинусы** биссектрисы угла между данными лучами суть

$$\cos\alpha=\frac{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2}{2\cos\frac{\varphi}{2}},$$

$$\cos\beta=\frac{\cos\beta_1+\cos\beta_2}{2\cos\frac{\varphi}{2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\cos\gamma_1+\cos\gamma_2}{2\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Задача 13. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до двух вершин A и B треугольника ABC равна квадрату расстояния до третьей его вершины C.

Решение. Введем на плоскости прямоугольную систему координат, и пусть в этой системе $A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$, $C=(x_3, y_3)$.

Если $M=(x, y)$ — произвольная точка искомого геометрического места, то

$$|\overline{AM}|^2+|\overline{BM}|^2=|\overline{CM}|^2,$$

откуда для координат точек искомого геометрического места получаем уравнение

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=(x-x_3)^2+(y-y_3)^2 \qquad (1)$$

или

$$x^2+y^2-2x(x_1+x_2-x_3)-2y(y_1+y_2-y_3)+x_1^2+x_2^2-x_3^2+y_1^2+y_2^2-y_3^2=0. \qquad (2)$$

В полученном уравнении второй степени с двумя неизвестными коэффициенты при квадратах координат одинаковы, а член с произведением координат отсутствует. Следовательно, это уравнение определяет окружность, действительную, нулевую или мнимую.

Выясним, при каких условиях имеет место тот или иной случай. Для этого преобразуем уравнение (2), дополнив выражения, содержащие x и y, до полного квадрата. Мы будем иметь

$$[x-(x_1+x_2-x_3)]^2+[y-(y_1+y_2-y_3)]^2=$$
$$=-x_1^2-x_2^2+x_3^2+(x_1+x_2-x_3)^2-y_1^2-y_2^2+y_3^2+(y_1+y_2-y_3)^2. \qquad (3)$$

Преобразуя правую часть уравнения (3), приведем его к такому виду:

$$[x-(x_1+x_2-x_3)]^2+[y-(y_1+y_2-y_3)]^2=$$
$$=[(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2]+[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2]-[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]. \qquad (4)$$

Таким образом, координатами центра D найденной окружности будут

$$x_0=x_1+x_2-x_3, \quad y_0=y_1+y_2-y_3,$$

а радиус ее определяется из равенства

$$r^2=[(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2]+[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2]-[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2].$$

Определим положение центра относительно вершин треугольника. Из выражений для координат центра находим

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_3+x_0}{2},$$

$$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{y_3+y_0}{2}.$$

Эти равенства показывают, что середины отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ совпадают. Следовательно, центр D искомой окружности находится в вершине параллелограмма $ACBD$, противоположной вершине C.

Рассматривая выражение для квадрата радиуса, видим, что квадратные скобки суть квадраты длин сторон $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ и $\overline{AB}$ данного треугольника, т. е.

$$r^2=|\overline{AC}|^2+|\overline{BC}|^2-|\overline{AB}|^2=2|\overline{CA}|\,|\overline{CB}|\cos\angle C.$$

Итак, геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до двух вершин A, B треугольника ABC равна квадрату расстояния до его третьей вершины C, есть

1) окружность, если угол при вершине C острый; центр D этой окружности находится в вершине параллелограмма $ACBD$, противоположной вершине C; радиус ее

$$r=\sqrt{|\overline{AC}|^2+|\overline{BC}|^2-|\overline{AB}|^2};$$

2) единственная точка D, если угол при вершине C прямой;
3) пустое множество, если угол C тупой.

К главе V

Задача 14. Вершина D параллелограмма $ABCD$ соединена с точкой K, лежащей на стороне BC и делящей отрезок $\overrightarrow{BC}$ в отношении 2:3. Вершина B соединена с точкой L стороны CD, делящей отрезок $\overrightarrow{DC}$ в отношении 3:5. В каком отношении точка M пересечения прямых DK и BL делит направленные отрезки $\overrightarrow{DK}$ и $\overrightarrow{BL}$?

Решение. Примем за начало аффинной системы координат вершину A, а за единичные векторы оси абсцисс и ординат соответственно векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$. Тогда будем иметь:

$$A=(0,\ 0),\quad B=(0,\ 1),\quad C=(1,\ 1),\quad D=(1,\ 0),$$

$$K=\left(\frac{2}{5},\ 1\right),\quad L=\left(1,\ \frac{3}{8}\right).$$

Пусть точка M имеет координаты x, y и делит отрезок $\overrightarrow{DK}$ в отношении λ, а отрезок $\overrightarrow{BL}$ в отношении μ. Найдем координаты точки M, решая совместно уравнения прямых DK и BL.

$$DK:\quad \frac{x-1}{\frac{2}{5}-1}=y,$$

или

$$5x+3y-5=0.$$

$$BL:\quad x=\frac{y-1}{\frac{3}{8}-1},$$

или

$$5x+8y-8=0.$$

Решая совместно уравнения прямых DK и BL, найдем:

$$M=\left(\frac{16}{25},\ \frac{3}{5}\right),$$

$$\lambda=\frac{\overrightarrow{DM}}{\overrightarrow{MK}}=\frac{3}{2},$$

$$\mu=\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{ML}}=\frac{16}{9}.$$

Задача 15. Относительно аффинной системы координат даны уравнения двух смежных сторон параллелограмма

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2=0$$

и точка пересечения его диагоналей $M=(x_0,\ y_0)$. Написать уравнения двух других его сторон.

Решение. Так как искомые стороны параллельны данным, то их уравнения можно написать в виде

$$A_1x+B_1y+D_1=0,\quad A_2x+B_2y+D_2=0,$$

взяв при x и y те же коэффициенты, что и в уравнениях данных сторон. Свободные члены D_1 и D_2 можно найти, используя то обстоятельство, что если точка M лежит между двумя параллельными прямыми на одинаковом расстоянии от этих прямых и коэффициенты при соответствующих неизвестных в уравнениях этих прямых одинаковы, то результаты подстановки координат точки в левые части уравнений прямых равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Таким образом,

$$A_1x_0+B_1y_0+D_1=-(A_1x_0+B_1y_0+C_1)$$

и

$$A_2x_0+B_2y_0+D_2=-(A_2x_0+B_2y_0+C_2).$$

Из этих равенств и определяются свободные члены D_1 и D_2 искомых сторон параллелограмма:

$$D_1=-(2A_1x_0+2B_1y_0+C_1),$$
$$D_2=-(2A_2x_0+2B_2y_0+C_2).$$

Задача 16. Относительно аффинной системы координат даны две пересекающиеся прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и точка $M=(x_0,\ y_0)$, не принадлежащая ни одной из данных прямых. Найти направления сторон того из четырех углов, образованных данными прямыми, в котором лежит данная точка M.

(Говорят, что точка M лежит внутри угла, сторонами которого служат лучи $\vec{h}$, $\vec{k}$, если точка M и луч $\vec{k}$ лежат по одну сторону от прямой, содержащей луч $\vec{h}$, и точка M и луч $\vec{h}$ лежат по одну сторону от прямой, содержащей луч $\vec{k}$.)

Решение. Пусть $A=(x', y')$ — точка пересечения данных прямых. Точка A делит первую прямую на два луча: направление одного из них определяется вектором $\{B_1, -A_1\}$, направление другого — вектором $\{-B_1, A_1\}$. Если отложить эти векторы от точки A, то конец нужного нам вектора должен лежать по ту сторону от второй прямой, что и точка M.

Пусть B — конец вектора $\{B_1, -A_1\}$, отложенного от точки A; тогда

$$B=(x'+B_1,\ y'-A_1).$$

Чтобы узнать, удовлетворяет ли условию задачи вектор $\{B_1, -A_1\}$ или вектор, ему противоположный, подставим в левую часть уравнения второй прямой координаты точек M и B. Если получатся числа одного знака, то вектор $\{B_1, -A_1\}$ годится. Если же получатся числа разных знаков, то условию задачи удовлетворяет вектор $\{-B_1, A_1\}$. Имеем

$$A_2(x'+B_1)+B_2(y'-A_1)+C_2=A_2x'+B_2y'+C_2+A_2B_1-B_2A_1=\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$$

так как $A_2x'+B_2y'+C_2=0$).

Таким образом, вектор $\{B_1, -A_1\}$ годится, если числа

$$A_2x_0+B_2y_0+C_2 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$$

одного знака. В противном случае условию задачи удовлетворяет вектор $\{-B_1, A_1\}$.

Точно так же найдем нужный вектор на второй прямой. Это будет вектор $\{B_2, -A_2\}$, если числа

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

одного знака. В противном случае условию задачи удовлетворяет вектор $\{-B_2, A_2\}$.

Задача 17. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы точка $M=(x_0, y_0)$ лежала внутри треугольника, стороны которого заданы уравнениями:

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1&=0 \qquad (BC),\\ A_2x+B_2y+C_2&=0 \qquad (CA),\\ A_3x+B_3y+C_3&=0 \qquad (AB). \end{aligned}$$

(Говорят, что точка M лежит внутри треугольника ABC, если она расположена по одну сторону от прямой AB вместе с точкой C, по одну сторону от прямой BC вместе с точкой A, по одну сторону от прямой CA вместе с точкой B.)

Решение. Найдем координаты x_3, y_3 точки C пересечения первой и второй прямой и подставим их в левую часть уравнения третьей прямой.

Имеем:

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}},\quad y_3=-\frac{\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}},$$

$$A_3x_3+B_3y_3+C_3=A_3\frac{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}+B_3\left(-\frac{\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}\right)+C_3=$$

$$=\frac{A_3\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}-B_2\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}+C_3\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}.$$

Для того чтобы точки M и C лежали по одну сторону от прямой AB, необходимо и достаточно, чтобы числа $A_3x_0+B_3y_0+C_3$ и $A_3x_3+B_3y_3+C_3$ имели одинаковые знаки, а для этого в свою очередь необходимо и достаточно, чтобы были одинаковые знаки у чисел

$$A_3x_0+B_3y_0+C_3\quad\text{и}\quad\frac{\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}.$$

Точно так же убедимся, что для того, чтобы точки M и B лежали по одну сторону от прямой AC, необходимо и достаточно, чтобы были одинаковые знаки у чисел

$$A_2x_0+B_2y_0+C_2\quad\text{и}\quad\frac{\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_3 & B_3\\ A_1 & B_1\end{vmatrix}}.$$

Наконец, чтобы точки M и A были расположены по одну сторону от прямой BC, необходимо и достаточно, чтобы были одинаковы знаки чисел

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1\quad\text{и}\quad\frac{\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix}}.$$

Отсюда следует, что если точка M лежит внутри треугольника, то числа

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1,\quad A_2x_0+B_2y_0+C_2,\quad A_3x_0+B_3y_0+C_3$$

либо имеют, соответственно, такие же знаки, как определители

$$\begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}A_3 & B_3\\ A_1 & B_1\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix},$$

либо знаки, им противоположные.

Обратно, если это условие выполнено, то числа

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1,\quad A_2x_0+B_2y_0+C_2,\quad A_3x_0+B_3y_0+C_3$$

либо имеют одинаковые знаки с числами

$$\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}, \quad \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}, \quad \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

либо знаки, им противоположные. В первом случае точка M лежит по ту же сторону от прямой BC, что и точка A, по ту же сторону от прямой AC, что и точка B, и по ту же сторону от прямой AB, что и точка C, т. е. является внутренней точкой для треугольника ABC.

Второй случай не может иметь места, так как, какова бы ни была точка M, не лежащая ни на одной из прямых AB, BC и CA, по крайней мере одна из полуплоскостей, определяемых этими прямыми, одновременно содержит и точку M, и вершину треугольника, противолежащую этой прямой. Но в этом случае результат подстановки координат точки M в левую часть уравнения соответствующей прямой имеет знак, одинаковый с одним из написанных выше отношений детерминантов.

Итак, для того чтобы точка (x_0, y_0) лежала внутри треугольника, образованного прямыми

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0, \qquad A_3x+B_3y+C_3=0,$$

необходимо и достаточно, чтобы числа

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1, \qquad A_2x_0+B_2y_0+C_2, \qquad A_3x_0+B_3y_0+C_3$$

имели бы соответственно такие же знаки, как определители

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

либо знаки, им противоположные.

Задача 18. Относительно прямоугольной системы координат даны уравнения двух прямых

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2=0$$

и точка $A=(x_0, y_0)$. Написать уравнения биссектрисы того угла между данными прямыми, в котором лежит точка A.

Решение. Пусть $M=(x, y)$ — произвольная точка искомой биссектрисы, лежащая внутри того угла между данными прямыми, в котором содержится точка A.

Так как расстояния от точки M до данных прямых равны, то

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (1)$$

Так как, далее, точки A и M лежат внутри одного угла, то они расположены по одну сторону как от первой прямой, так и от второй прямой. Поэтому числа

$$A_1x+B_1y+C_1 \quad \text{и} \quad A_1x_0+B_1y_0+C_1$$

имеют одинаковые знаки; числа

$$A_2x+B_2y+C_2 \quad \text{и} \quad A_2x_0+B_2y_0+C_2$$

также имеют одинаковые знаки.

В уравнении (1) дроби, стоящие в левой и правой частях, равны по абсолютной величине. Они имеют одинаковые знаки, если одинаковы знаки чисел

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1 \quad \text{и} \quad A_2x_0+B_2y_0+C_2, \tag{2}$$

и противоположные знаки, если различны знаки чисел (2).

Поэтому уравнение искомой биссектрисы будет

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

если числа

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1, \quad A_2x_0+B_2y_0+C_2$$

одного знака, и

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

если числа

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1, \quad A_2x_0+B_2y_0+C_2$$

разных знаков.

Задача 19. Написать уравнения биссектрис внутренних углов треугольника, стороны которого заданы уравнениями

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1&=0 \qquad (BC),\\ A_2x+B_2y+C_2&=0 \qquad (CA),\\ A_3x+B_3y+C_3&=0 \qquad (AB) \end{aligned}$$

в прямоугольной системе координат.

Решение. Найдем биссектрису внутреннего угла C, образованного первой и второй прямыми. Пусть $M=(x, y)$ — произвольная точка этой биссектрисы, лежащая внутри треугольника. Так как расстояния от точки M до прямых CA и CB равны между собой, то

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Так как, далее, M — внутренняя точка треугольника ABC, то точки M и A лежат по одну сторону от прямой BC, а точки M и B — по одну сторону от прямой AC. Поэтому числа

$$A_1x+B_1y+C_1, \qquad A_2x+B_2y+C_2$$

имеют соответственно или такие же знаки, как определители

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2\\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_3 & B_3\\ A_1 & B_1 \end{vmatrix},$$

или знаки, им противоположные.

Таким образом, уравнение искомой биссектрисы внутреннего угла C будет

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

если определители $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$ имеют одинаковые знаки, и

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

если знаки этих определителей противоположны.

Аналогично найдем, что биссектриса внутреннего угла A между второй и третьей прямыми имеет уравнение

$$\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=\pm\frac{A_3x+B_3y+C_3}{\sqrt{A_3^2+B_3^2}},$$

причем знак плюс или минус берется в зависимости от того, будут ли определители

$$\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

одного или разных знаков.

Уравнение биссектрисы внутреннего угла B, образованного третьей и первой прямыми, будет

$$\frac{A_3x+B_3y+C_3}{\sqrt{A_3^2+B_3^2}}=\pm\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}};$$

знак плюс берется, если определители

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$$

имеют одинаковые знаки, и знак минус, если знаки определителей различны.

Задача 20. Даны две пересекающиеся прямые

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

и точка $M_0=(x_0, y_0)$, не принадлежащая ни одной из данных прямых. Найти косинус того угла между данными прямыми, в котором лежит данная точка. (Система координат прямоугольная.)

Решение. Согласно замечанию, сделанному в § 9 главы V на стр. 109, угол между векторами

$$\mathbf{n}_1=\{A_1, B_1\} \quad \text{и} \quad \mathbf{n}_2=\{A_2, B_2\}$$

равен тому из углов между данными прямыми, в котором лежат точки, принадлежащие разноименным полуплоскостям, определяемым данными прямыми.

Поэтому, (1) если числа

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1 \quad \text{и} \quad A_2x_0+B_2y_0+C_2$$

имеют разные знаки, то угол α, образованный данными прямыми и содержащий внутри себя точку M_0, равен углу β между векторами $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, и потому в рассматриваемом случае

$$\cos\alpha=\cos\beta=\frac{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

(2) Если числа

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1,\quad A_2x_0+B_2y_0+C_2$$

имеют одинаковые знаки, то угол β между векторами $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ равен углу между данными прямыми, смежному с тем, в котором лежит точка M_0, т. е. $\beta=\pi-\alpha$, откуда $\alpha=\pi-\beta$. Следовательно, в настоящем случае

$$\cos\alpha=\cos(\pi-\beta)=-\cos\beta=-\frac{(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1|\cdot|\mathbf{n}_2|}=-\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Итак,

$$\cos\alpha=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

причем перед дробью берется знак плюс или минус в зависимости от того, имеют ли числа

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1,\qquad A_2x_0+B_2y_0+C_2$$

разные или одинаковые знаки.

Задача 21. Даны две пересекающиеся не перпендикулярные прямые

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\qquad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Написать уравнение биссектрисы острого угла между ними. (Система координат прямоугольная.)

Решение. Пусть $M=(x,\ y)$ — произвольная точка искомой биссектрисы. Так как ее расстояния до данных прямых равны между собой, то

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Согласно замечанию § 9 главы V, угол между векторами

$$\mathbf{n}_1=\{A_1,\ B_1\}\quad\text{и}\quad\mathbf{n}_2=\{A_2,\ B_2\}$$

равен тому из углов, образованных данными прямыми, внутри которого лежат точки, принадлежащие разноименным полуплоскостям, определяемым данными прямыми.

Поэтому, если угол между векторами $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ острый, т. е. если

$$(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2)=A_1A_2+B_1B_2>0,$$

то все точки, лежащие внутри острых углов, образуемых данными прямыми, и, в частности, точки искомой биссектрисы принадлежат разноименным полуплоскостям, определяемым данными прямыми. Это означает, что числа

$$A_1x+B_1y+C_1,\qquad A_2x+B_2y+C_2$$

имеют противоположные знаки, и потому в рассматриваемом случае уравнение искомой биссектрисы будет

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Если угол между векторами $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ тупой, т. е. если

$$(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2)=A_1A_2+B_1B_2<0,$$

то для точек, лежащих внутри острых углов, образуемых данными прямыми, и, в частности, для точек искомой биссектрисы числа

$$A_1x+B_1y+C_1, \qquad A_2x+B_2y+C_2$$

имеют одинаковые знаки, и потому уравнение искомой биссектрисы в этом случае будет

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Итак, уравнение биссектрисы острого угла между прямыми

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2=0$$

имеет вид

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\mp\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

причем знак минус или плюс берется в зависимости от того, будет ли выражение $A_1A_2+B_1B_2$ больше или меньше нуля.

Задача 22. Определить внутренние углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad (BC)$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0, \qquad (CA)$$
$$A_3x+B_3y+C_3=0. \qquad (AB)$$

(Система координат прямоугольная.)

Решение. Найдем тангенсы внутренних углов треугольника. Занумеруем каким-либо образом стороны треугольника числами 1, 2, 3 и обозначим через φ_{12}, φ_{23} и φ_{31} углы от первой прямой до второй, от второй до третьей и от третьей до первой.

Докажем, что положительные значения всех трех углов φ_{12}, φ_{23}, φ_{31}, заключенные между 0 и π, являются либо значениями внутренних углов треугольника, либо значениями его внешних углов.

При определении угла от первой прямой BC до второй прямой CA за направляющие векторы этих прямых возьмем векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$. Угол от второй прямой CA до третьей прямой AB определим как угол от вектора $\overrightarrow{AC}$ до вектора $\overrightarrow{AB}$. Наконец, угол от третьей прямой AB до первой прямой BC определим как угол от вектора $\overrightarrow{BA}$ до вектора $\overrightarrow{BC}$. Так как упорядоченные пары векторов $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ имеют одну и ту же ориентацию, то все три угла: от $\overrightarrow{CB}$ до $\overrightarrow{CA}$, от $\overrightarrow{AC}$ до $\overrightarrow{AB}$ и от $\overrightarrow{BA}$ до $\overrightarrow{BC}$ — будут положительны, если указанные пары векторов имеют положительную ориентацию, и отрицательны в противном случае.

Если рассматриваемые углы оказываются положительными, то они являются внутренними углами треугольника.

Предположим, что все три угла: от $\overrightarrow{CB}$ до $\overrightarrow{CA}$, от $\overrightarrow{AC}$ до $\overrightarrow{AB}$ и от $\overrightarrow{BA}$ до $\overrightarrow{BC}$ — оказываются отрицательными. Тогда будут положительными углы: от $-\overrightarrow{CB}$ до $\overrightarrow{CA}$, от $-\overrightarrow{AC}$ до $\overrightarrow{AB}$ и от $-\overrightarrow{BA}$ до $\overrightarrow{BC}$, т. е. внешние углы треугольника ABC.

До сих пор мы пользовались специальным выбором направляющих векторов прямых BC, CA и AB. Но тангенс угла от одной прямой до другой не зависит от того, какие направляющие векторы мы берем на рассматриваемых прямых.

Тангенсы углов φ_{12}, φ_{23}, φ_{31} находятся по формулам:

$$\operatorname{tg}\varphi_{12}=\frac{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}{A_1A_2+B_1B_2},\qquad \operatorname{tg}\varphi_{23}=\frac{\begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix}}{A_2A_3+B_2B_3},\qquad \operatorname{tg}\varphi_{31}=\frac{\begin{vmatrix}A_3 & B_3\\ A_1 & B_1\end{vmatrix}}{A_3A_1+B_3B_1}$$

или, если $B_1\neq 0$, $B_2\neq 0$, $B_3\neq 0$, по формулам:

$$\operatorname{tg}\varphi_{12}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2},\qquad \operatorname{tg}\varphi_{23}=\frac{k_3-k_2}{1+k_2k_3},\qquad \operatorname{tg}\varphi_{31}=\frac{k_1-k_3}{1+k_1k_3}.$$

Если все три числа $\operatorname{tg}\varphi_{12}$, $\operatorname{tg}\varphi_{23}$, $\operatorname{tg}\varphi_{31}$ положительны или два из них положительные, а одно отрицательное, то φ_{12}, φ_{23}, φ_{31} — внутренние углы треугольника. Если же все три тангенса $\operatorname{tg}\varphi_{12}$, $\operatorname{tg}\varphi_{23}$, $\operatorname{tg}\varphi_{31}$ или по крайней мере два из них отрицательны, то углы φ_{12}, φ_{23}, φ_{31} будут внешними углами треугольника. В этом случае мы получим тангенсы его внутренних углов, взяв числа $\operatorname{tg}\varphi_{12}$, $\operatorname{tg}\varphi_{23}$, $\operatorname{tg}\varphi_{31}$ с обратными знаками.

Задача 23. Дано уравнение стороны AB

$$2x-y-2=0$$

треугольника ABC, координаты противолежащей вершины $C=(-3, 2)$ и тангенсы внутренних углов, прилежащих к данной стороне, $\operatorname{tg}A=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}B=\frac{4}{3}$. Написать уравнения двух других сторон треугольника. (Система координат прямоугольная.)

Решение. Занумеруем стороны треугольника каким-либо образом числами 1, 2, 3 и будем обозначать угол от первой стороны до второй через φ_{12}, угол от второй стороны до третьей через φ_{23}, угол от третьей стороны до первой через φ_{31}. Тогда все эти углы будут либо внутренними, либо внешними углами треугольника.

Пусть, например, AB — первая стороиа треугольника, AC — вторая, BC — третья его стороны. Возможны два случая.

1) Все три угла φ_{12}, φ_{23}, φ_{31} — внутренние углы треугольника, тогда

$$\operatorname{tg}\varphi_{12}=\frac{1}{2},\qquad \operatorname{tg}\varphi_{31}=\frac{4}{3}.$$

Обозначим через k_1, k_2, k_3 угловые коэффициенты прямых AB, AC и BC. Имеем:

$$k_1 = 2,$$

$$\frac{1}{2} = \frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2},$$

$$k_2 = \infty,$$

$$AC: \quad x + 3 = 0,$$

$$\frac{4}{3} = \frac{2 - k_3}{1 + 2k_3},$$

$$k_3 = \frac{2}{11},$$

$$BC: \quad y - 2 = \frac{2}{11}(x + 3)$$

или

$$2x - 11y + 28 = 0.$$

2) Все углы φ_{12}, φ_{23}, φ_{31} — внешние для треугольника ABC. Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi_{12} = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_{31} = -\frac{4}{3}, \quad k_1 = 2,$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{k_2' - 2}{1 + 2k_2'},$$

$$k_2' = \frac{3}{4},$$

$$CA': \quad y - 2 = \frac{3}{4}(x + 3)$$

или

$$3x - 4y + 17 = 0;$$

$$-\frac{4}{3} = \frac{2 - k_3'}{1 + 2k_3'},$$

$$k_3' = -2,$$

$$CB': \quad y - 2 = -2(x + 3)$$

или

$$2x + y + 4 = 0.$$

К главе VI

Задача 24. Доказать, что длина отрезка, соединяющего центр эллипса с произвольной его точкой, заключена между большой и малой полуосями этого эллипса.

Решение. Пусть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— **каноническое уравнение эллипса**, причем $a > b$, O — его центр и $M=(x,y)$ — произвольная его точка. Тогда

$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{x^2+y^2}{a^2},$$

т. е.

$$x^2+y^2\leqslant a^2,$$

и, следовательно,

$$|\overline{OM}|\leqslant a.$$

Точно так же

$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2+y^2}{b^2},$$

т. е.

$$x^2+y^2\geqslant b^2,$$

и, следовательно,

$$|\overline{OM}|\geqslant b.$$

Задача 25. Вычислить эксцентриситет эллипса, зная, что в эллипс можно вписать равносторонний треугольник, одна из вершин которого совпадает с концом большой оси эллипса, а противолежащая ей сторона проходит через фокус эллипса.

Решение. Пусть ABC — равносторонний треугольник, вписанный в эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>b,$$

так что его вершина A совпадает с вершиной эллипса $(-a, 0)$, а противолежащая ей сторона BC проходит через фокус эллипса F.

Заметим прежде всего, что сторона BC перпендикулярна к большой оси эллипса. Это следует из того, что расстояние от точки $A=(-a, 0)$ до произвольной точки эллипса $M=(x, y)$ есть строго возрастающая функция абсциссы x точки M. Докажем это последнее утверждение. Имеем

$$|\overline{AM}|^2=(x+a)^2+y^2=(x+a)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+2ax+a^2+b^2=$$
$$=e^2x^2+2ax+a^2+b^2,$$

откуда и следует утверждение о том, что расстояние $\rho(A, M)$ есть монотонно возрастающая функция x. Так как

$$\overline{AB}=\overline{AC},$$

то из доказанного утверждения следует, что у точек B и C одинаковые абсциссы и, следовательно, равнопротивоположные ординаты, т. е. что $\overline{BC}\perp\overline{AF}$.

Имеем

$$|\overline{BF}|=\frac{b^2}{a}=\frac{(a+c)(a-c)}{a},\qquad(1)$$

с другой стороны,

$$\overline{BF}=\frac{1}{\sqrt{3}}\overline{AF}.\qquad(2)$$

Теперь надо рассмотреть два случая в зависимости от того, проходит ли сторона BC через фокус, ближайший к вершине A, или через фокус, далекий от нее. В первом случае

$$|\overline{AF}| = a - c$$

и мы имеем в силу равенств (1) и (2)

$$\frac{(a+c)(a-c)}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(a-c),$$

откуда

$$1 + \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

или

$$e = \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 < 0,$$

что невозможно; следовательно, сторона BC не может проходить через фокус, ближайший к вершине A.

Во втором случае

$$|\overline{AF}| = a + c$$

и равенства (1) и (2) дают

$$\frac{(a+c)(a-c)}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(a+c),$$

откуда имеем

$$1 - e = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и, следовательно,

$$e = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Задача 26. Доказать, что отрезок, соединяющий произвольную точку гиперболы с ее фокусом, равен отрезку прямой, параллельной асимптоте гиперболы, заключенному между рассматриваемой точкой и директрисой, соответствующей взятому фокусу.

Доказательство. Пусть M — произвольная точка гиперболы, F — ее фокус, A — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису, соответствующую фокусу F, B — точка пересечения прямой, проходящей через точку M параллельно асимптоте гиперболы, с этой директрисой. Требуется доказать, что

$$\overline{MF} = \overline{MB}.$$

В силу директориального свойства гиперболы

$$\frac{\overline{MF}}{\overline{MA}} = e.$$

Так как прямая MA параллельна действительной оси, а прямая MB — асимптоте гиперболы, то угол AMB равен острому углу α, образуемому

асимптотой гиперболы с ее действительной осью. Поэтому

$$\cos \angle AMB = \cos \alpha = \frac{a}{c} = \frac{1}{e}.$$

Но

$$\cos \angle AMB = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}},$$

следовательно,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} = e.$$

Из двух соотношений

$$\frac{\overline{MF}}{\overline{MA}} = e, \quad \frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} = e$$

выводим, что

$$\overline{MF} = \overline{MB}.$$

Задача 27. Доказать, что если две вершины параллелограмма лежат на гиперболе, а его стороны параллельны асимптотам этой гиперболы, то прямая, соединяющая две другие вершины параллелограмма, проходит через центр гиперболы.

Доказательство. Возьмем уравнение гиперболы в виде

$$xy = c,$$

принимая за оси координат ее асимптоты. Пусть $A = (x_1, y_1)$, $C = (x_2, y_2)$ — две вершины параллелограмма, лежащие на гиперболе. Имеем:

$$x_1 y_1 = c, \qquad x_2 y_2 = c. \tag{1}$$

Так как стороны параллелограмма параллельны осям координат, то две другие его вершины будут

$$B = (x_1, y_2), \quad D = (x_2, y_1).$$

Напишем уравнение прямой BD по двум точкам в виде

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(y_2 - y_1)\, x + (x_2 - x_1)\, y + x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0.$$

В силу соотношений (1)

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0.$$

Следовательно, в уравнении прямой BD отсутствует свободный член, и, значит, прямая BD проходит через начало координат, являющееся центром гиперболы.

Задача 28. Две вершины треугольника закреплены в точках A и B, а третья его вершина C перемещается так, что угол при вершине A остается все время вдвое больше угла при вершине B. Найти линию, описываемую вершиной C, если длина стороны $\overline{AB}=l$.

Решение. Введем полярные координаты, принимая за полюс вершину A, а за направление полярной оси направление $\overrightarrow{AB}$. Положим

$$|\overline{AC}|=r, \quad \angle A=\varphi,$$

тогда

$$\angle B=\frac{\varphi}{2}, \quad \angle C=\pi-\frac{3}{2}\varphi.$$

По теореме синусов имеем

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}$$

или

$$\frac{r}{\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{l}{\sin\left(\pi-\frac{3}{2}\varphi\right)},$$

откуда

$$r=\frac{l\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{3}{2}\varphi}.$$

Преобразуя правую часть уравнения, приведем его к виду

$$r=\frac{l}{1+2\cos\varphi}.$$

Изменим направление полярной оси на противоположное, оставляя полюс в вершине A. Обозначим новый полярный угол через θ. Тогда

$$\varphi=\theta+\pi,$$
$$\cos\varphi=\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta.$$

В новой системе уравнение искомой линии имеет вид

$$r=\frac{l}{1-2\cos\theta}.$$

Сопоставляя это уравнение с уравнением линии второго порядка в полярных координатах

$$r=\frac{p}{1-e\cos\theta},$$

видим, что найденное уравнение определяет ветвь гиперболы, фокальная ось которой — прямая AB, фокус — вершина A, параметр — длина стороны $\overline{AB}$, а эксцентриситет равен 2.

Задача 29. Доказать, что если оси двух парабол взаимно перпендикулярны, то четыре точки их пересечения лежат на одной окружности.

Решение. Если за оси прямоугольной **системы координат принять** оси данных **парабол, то их уравнения** в этой **системе координат будут**

$$y^2 = 2p\,(x-a), \tag{1}$$

$$x^2 = 2q\,(y-b). \tag{2}$$

Складывая уравнения (1) и (2), получим

$$x^2+y^2-2px-2qy+2ap+2bq=0. \tag{3}$$

В этом уравнении (3) коэффициенты при квадратах координат одинаковы, а член с произведением координат отсутствует. Следовательно, это уравнение определяет окружность. Но если координаты точки удовлетворяют уравнениям (1) и (2), то они удовлетворяют и уравнению (3), а это и значит, что точки пересечения данных парабол (1) и (2) лежат на окружности (3).

Задача 30. Через фокус параболы проводятся всевозможные хорды, и на каждой из них от фокуса в направлении более удаленного конца хорды откладывается отрезок, равный разности отрезков, на которые фокус делит хорду. Найти геометрическое место концов этих отрезков.

Решение. Пусть F — фокус параболы, $\overline{AB}$ — проходящая через него хорда, не перпендикулярная к оси параболы. Предположим, что

$$\overline{FA} > \overline{FB}.$$

Обозначим через φ угол от оси параболы до луча $\overrightarrow{FA}$. Тогда угол от оси параболы до луча $\overrightarrow{FB}$ будет $\varphi+\pi$. Пользуясь полярным уравнением параболы, будем иметь:

$$|\overline{FA}|=\frac{p}{1-\cos\varphi}, \quad |\overline{FB}|=\frac{p}{1+\cos\varphi},$$

где

$$-\frac{\pi}{2}<\varphi<0, \qquad 0<\varphi<\frac{\pi}{2}.$$

Пусть M — точка искомого геометрического места, лежащая на хорде $\overline{AB}$. Тогда

$$r=|\overline{FM}|=|\overline{FA}|-|\overline{FB}|=\frac{p}{1-\cos\varphi}-\frac{p}{1+\cos\varphi}=\frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Итак,

$$r=\frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi},$$

$$-\frac{\pi}{2}<\varphi<0, \qquad 0<\varphi<\frac{\pi}{2}.$$

Перейдем к декартовым координатам. Имеем:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Вставляя эти значения ρ, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ в найденное полярное уравнение, получим после преобразований

$$y^2 = 2px.$$

Таким образом, искомое геометрическое место есть парабола, получающаяся из данной параболы сдвигом в направлении оси, переводящим вершину параболы в ее фокус.

К главе VIII

Задача 31. На плоскости даны две системы координат с общим началом O и единичными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ у первой системы и $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ у второй системы, причем эти векторы связаны соотношениями

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_k) = \delta_{ik},$$

т. е.

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1) = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2) = 1, \qquad (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2) = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_1) = 0.$$

Найти формулы перехода от одной системы координат к другой, если $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \omega$.

Решение. Пусть $\mathbf{u}$ — произвольный вектор, имеющий в первой системе координаты X, Y, а во второй системе координаты X', Y'. Тогда

$$\mathbf{u} = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 = X'\mathbf{e}'_1 + Y'\mathbf{e}'_2.$$

Умножая это равенство скалярно сначала на $\mathbf{e}_1$, а затем на $\mathbf{e}_2$, получим:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1) = X(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + Y(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = X'(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_1) + Y'(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_1),$$
$$(\mathbf{u}, \mathbf{e}_2) = X(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + Y(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = X'(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_2) + Y'(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_2)$$

или

$$X' = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_1) = X + \cos\omega \cdot Y,$$
$$Y' = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_2) = \cos\omega \cdot X + Y.$$

Отсюда найдем выражения старых координат через новые:

$$X = \frac{X' - \cos\omega \cdot Y'}{\sin^2\omega}, \qquad Y = \frac{-\cos\omega \cdot X' + Y'}{\sin^2\omega}.$$

Задача 32. Найти формулы перехода от одной прямоугольной системы координат в пространстве к другой прямоугольной системе, если начала этих систем различны, а концы единичных векторов-реперов совпадают.

Решение. Начала O и O' обеих систем находятся в точках, симметричных относительно плоскости, проходящей через общие концы A, B, C их единичных векторов. Точки A, B, C в обеих системах имеют координаты:

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (0, 1, 0), \quad C = (0, 0, 1),$$

а плоскость, проходящая через точки A, B, C, определяется уравнением

$$x + y + z = 1$$

в первой системе,

$$x' + y' + z' = 1$$

во второй системе.

Начало второй системы O' имеет в первой системе координаты $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$; единичные векторы второй системы имеют относительно первой системы следующие координаты:

$$\mathbf{e}_1' = \overrightarrow{O'A} = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\},$$
$$\mathbf{e}_2' = \overrightarrow{O'B} = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\},$$
$$\mathbf{e}_3' = \overrightarrow{O'C} = \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}.$$

Поэтому для координат точек в одной системе мы получаем следующие выражения через координаты во второй системе:

$$x = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' - \frac{2}{3}z' + \frac{2}{3},$$
$$y = -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z' + \frac{2}{3},$$
$$z = -\frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z' + \frac{2}{3}.$$

Задача 33. Новые оси координат $O'y'$ и $O'x'$ относительно старой системы Oxy заданы соответственно уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Найти формулы, выражающие новые координаты x', y' произвольной точки через ее старые координаты x, y.

Какой вид примут эти формулы, если точке E, имеющей в старой системе координаты x_0, y_0, приписать в новой системе координаты 1, 1?

Решение. Формулы, выражающие новые координаты x', y' через старые координаты x, y, имеют вид

$$x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13},$$
$$y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}.$$

Отсюда видно, что $x' = 0$, когда

$$c_{11}x + c_{12}y + c_{13} = 0.$$

Так как, с другой стороны, прямая

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

должна быть осью $O'y'$, то для ее точек $x' = 0$. Следовательно, уравнения

$$c_{11}x + c_{12}y + c_{13} = 0$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

выражают одну и ту же прямую $O'y'$, а это возможно лишь в том случае, если коэффициенты одного уравнения пропорциональны соответствующим

коэффициентам другого, т. е. если

$$c_{11}=k_1A_1, \quad c_{12}=k_1B_1, \quad c_{13}=k_1C_1.$$

Поэтому при всех значениях x и y выполняется тождество

$$c_{11}x+c_{12}y+c_{13}\equiv k_1(A_1x+B_1y+C_1).$$

Точно так же можно показать, что

$$c_{21}x+c_{22}y+c_{23}\equiv k_2(A_2x+B_2y+C_2).$$

Отсюда следует, что искомые формулы преобразования координат могут быть записаны в следующем виде:

$$x'=k_1(A_1x+B_1y+C_1), \quad y'=k_2(A_2x+B_2y+C_2).$$

Значения k_1 и k_2 определяются выбором единичных векторов на осях $O'y'$ и $O'x'$.

Если какой-нибудь точке E, не лежащей ни на одной из данных прямых и имеющей в старой системе координаты x_0, y_0, приписать координаты 1, 1 в системе $O'x'y'$, то для k_1 и k_2 получим соответственно значения

$$k_1=\frac{1}{A_1x_0+B_1y_0+C_1}, \quad k_2=\frac{1}{A_2x_0+B_2y_0+C_2}.$$

Формулы преобразования координат в этом случае принимают вид

$$x'=\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_1x_0+B_1y_0+C_1}, \quad y'=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{A_2x_0+B_2y_0+C_2}.$$

Задача 34. Относительно прямоугольной системы координат Oxy даны уравнения двух взаимно перпендикулярных прямых:

$$O'y': \quad A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$O'x': \quad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Принимая эти прямые за новые оси прямоугольной системы координат и выбирая за положительное направление оси $O'x'$ направление вектора $\mathbf{n}_1=\{A_1, B_1\}$, а за положительное направление оси $O'y'$ направление вектора $\mathbf{n}_2=\{A_2, B_2\}$, найти формулы, выражающие новые координаты произвольной точки плоскости через ее старые координаты.

Решение. Так как прямоугольные координаты точки по абсолютной величине равны расстояниям этой точки до осей координат, то

$$|x'|=\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}, \quad |y'|=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Но для точек, лежащих по ту же сторону от прямой

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$

где находится конец вектора $\mathbf{n}_1$, отложенного от точки O', должно быть $x'>0$. С другой стороны, для точек этой полуплоскости

$$A_1x+B_1y+C_1>0.$$

Для точек другой полуплоскости оба числа x' и $A_1x+B_1y+C_1$ должны быть отрицательны. Поэтому окончательно имеем

$$x'=\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}$$

и точно так же

$$y'=\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

К главе IX

Задача 35. Даны три некомпланарных вектора:

$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a},\quad \overrightarrow{OB}=\mathbf{b},\quad \overrightarrow{OC}=\mathbf{c},$$

отложенные от одной точки O и направленные по ребрам трехгранного угла $OABC$. Найти (какой-нибудь) вектор $\mathbf{d}$, который, будучи отложен от точки O, находился бы внутри трехгранного угла $OABC$ и образовывал с его ребрами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ равные углы.

Решение. Рассмотрим векторы

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OA'}&=\mathbf{a'}=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|},\\ \overrightarrow{OB'}&=\mathbf{b'}=\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},\\ \overrightarrow{OC'}&=\mathbf{c'}=\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

и найдем вектор $\mathbf{d'}$, перпендикулярный к плоскости $A'B'C'$.

Для того чтобы вектор $\mathbf{d'}$ был перпендикулярен к плоскости $A'B'C'$, достаточно, чтобы он был перпендикулярен к векторам

$$\overrightarrow{A'B'}=\mathbf{b'}-\mathbf{a'}$$

и

$$\overrightarrow{A'C'}=\mathbf{c'}-\mathbf{a'}.$$

Поэтому в качестве искомого вектора можно взять, например, вектор

$$\mathbf{d'}=[(\mathbf{b'}-\mathbf{a'}),\ (\mathbf{c'}-\mathbf{a'})].$$

Но

$$[(\mathbf{b'}-\mathbf{a'}),\ (\mathbf{c'}-\mathbf{a'})]=[\mathbf{a'},\ \mathbf{b'}]+[\mathbf{b'},\ \mathbf{c'}]+[\mathbf{c'},\ \mathbf{a'}].$$

Поэтому

$$\mathbf{d'}=[\mathbf{a'},\ \mathbf{b'}]+[\mathbf{b'},\ \mathbf{c'}]+[\mathbf{c'},\ \mathbf{a'}].\qquad(2)$$

Вектор $\mathbf{d'}$ составляет равные углы с векторами $\mathbf{a'}$, $\mathbf{b'}$ и $\mathbf{c'}$. Так как эти последние — орты, то для того, чтобы убедиться в равенстве указанных углов, достаточно показать, что

$$(\mathbf{d'},\ \mathbf{a'})=(\mathbf{d'},\ \mathbf{b'})=(\mathbf{d'},\ \mathbf{c'}).$$

Но

$$(\mathbf{d}', \mathbf{a}') = ([\mathbf{a}', \mathbf{b}'] + [\mathbf{b}', \mathbf{c}'] + [\mathbf{c}', \mathbf{a}'], \mathbf{a}') = \langle \mathbf{b}', \mathbf{c}', \mathbf{a}' \rangle$$

и точно так же

$$(\mathbf{d}', \mathbf{b}') = \langle \mathbf{c}', \mathbf{a}', \mathbf{b}' \rangle,$$
$$(\mathbf{d}', \mathbf{c}') = \langle \mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}' \rangle.$$

Так как

$$\langle \mathbf{b}', \mathbf{c}', \mathbf{a}' \rangle = \langle \mathbf{c}', \mathbf{a}', \mathbf{b}' \rangle = \langle \mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}' \rangle,$$

то

$$(\mathbf{d}', \mathbf{a}') = (\mathbf{d}', \mathbf{b}') = (\mathbf{d}', \mathbf{c}').$$

Для того чтобы вектор $\mathbf{d}'$, будучи отложен от точки O, находился внутри трехгранного угла $OA'B'C'$, нужно, чтобы равные между собой углы вектора $\mathbf{d}'$ с векторами $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ были острыми, для чего в свою очередь необходимо выполнение равенства

$$(\mathbf{d}', \mathbf{a}') = (\mathbf{d}', \mathbf{b}') = (\mathbf{d}', \mathbf{c}') = \langle \mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}' \rangle > 0.$$

Это неравенство будет выполнено, если ориентация пространства выбрана так, что тройка $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ оказывается положительной. В этом случае вектор $\mathbf{d}'$ удовлетворяет всем требованиям задачи.

Возвращаясь к первоначальным обозначениям, подставим в равенство (2) вместо $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ их значения из равенства (1). Тогда для вектора $\mathbf{d}'$ получим выражение

$$\mathbf{d}' = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} + \frac{[\mathbf{b}, \mathbf{c}]}{|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}|} + \frac{[\mathbf{c}, \mathbf{a}]}{|\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{a}|}.$$

Положим, наконец,

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}' \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}|.$$

Тогда будем иметь

$$\mathbf{d} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \cdot |\mathbf{c}| + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \cdot |\mathbf{a}| + [\mathbf{c}, \mathbf{a}] \cdot |\mathbf{b}|$$

при условии, что тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ имеет положительную ориентацию.

Задача 36. Даны два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$, причем вектор $\mathbf{n}$ перпендикулярен к вектору $\mathbf{a}$ и равен по длине 1. Найти вектор $\mathbf{b}$, получающийся поворотом вектора $\mathbf{a}$ на угол φ вокруг оси, направление которой определяется вектором $\mathbf{n}$.

Решение. Вектор $[\mathbf{n}, \mathbf{a}]$ получается из вектора $\mathbf{a}$ поворотом вокруг оси $\mathbf{n}$ на угол $+\frac{\pi}{2}$. Так как $|\mathbf{n}| = 1$ и $\mathbf{n} \perp \mathbf{a}$, то $|[\mathbf{n}, \mathbf{a}]| = |\mathbf{a}|$.

Положим

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}, \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{[\mathbf{n}, \mathbf{a}]}{|\mathbf{a}|}.$$

Имеем

$$|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1.$$

Представим искомый вектор $\mathbf{b}$ в виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 x + \mathbf{e}_2 y.$$

Так как $|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$, то

$$x = |\mathbf{a}| \cos\varphi, \qquad y = |\mathbf{a}| \sin\varphi,$$

и потому

$$\mathbf{b}=\mathbf{e}_1 x+\mathbf{e}_2 y=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}|\cos\varphi+\frac{[\mathbf{n},\ \mathbf{a}]}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}|\sin\varphi=\mathbf{a}\cos\varphi+[\mathbf{n},\ \mathbf{a}]\sin\varphi.$$

Задача 37. Вычислить объем параллелепипеда, зная длины трех его ребер, выходящих из одной вершины, и углы между ними.

Решение. Пусть a, b, c—длины ребер параллелепипеда, выходящих из вершины O:

$$|\overrightarrow{OA}|=a,\qquad |\overrightarrow{OB}|=b,\qquad |\overrightarrow{OC}|=c;$$

α, β, γ—углы между ними:

$$\angle BOC=\alpha,\qquad \angle COA=\beta,\qquad \angle AOB=\gamma.$$

Введем прямоугольную систему координат с началом в точке O, и пусть в этой системе

$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}=\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\},$$
$$\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}=\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\},$$
$$\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}=\{X_3,\ Y_3,\ Z_3\}.$$

Объем V параллелепипеда вычисляется по формуле:

$$V=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}.$$

Возводя это равенство в квадрат и применяя теорему об умножении определителей, получим

$$V^2=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3\\ Y_1 & Y_2 & Y_3\\ Z_1 & Z_2 & Z_3\end{vmatrix}=$$
$$=\begin{vmatrix} X_1X_1+Y_1Y_1+Z_1Z_1 & X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2 & X_1X_3+Y_1Y_3+Z_1Z_3\\ X_2X_1+Y_2Y_1+Z_2Z_1 & X_2X_2+Y_2Y_2+Z_2Z_2 & X_2X_3+Y_2Y_3+Z_2Z_3\\ X_3X_1+Y_3Y_1+Z_3Z_1 & X_3X_2+Y_3Y_2+Z_3Z_2 & X_3X_3+Y_3Y_3+Z_3Z_3\end{vmatrix}.$$

Каждый член последнего детерминанта представляет собою скалярное произведение двух из трех векторов, направленных по его ребрам $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Имеем

$$V^2=\begin{vmatrix} (\mathbf{a},\ \mathbf{a}) & (\mathbf{a},\ \mathbf{b}) & (\mathbf{a},\ \mathbf{c})\\ (\mathbf{b},\ \mathbf{a}) & (\mathbf{b},\ \mathbf{b}) & (\mathbf{b},\ \mathbf{c})\\ (\mathbf{c},\ \mathbf{a}) & (\mathbf{c},\ \mathbf{b}) & (\mathbf{c},\ \mathbf{c})\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta\\ ba\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha\\ ca\cos\beta & cb\cos\alpha & c^2\end{vmatrix}=$$
$$=a^2b^2c^2\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta\\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha\\ \cos\beta & \cos\alpha & 1\end{vmatrix},$$

откуда

$$V=abc\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}.$$

Задача 38. Доказать, что сумма векторов, перпендикулярных к граням тетраэдра, равных по абсолютной величине площадям этих граней и направленных в сторону вершин, противолежащих граням, равна нулю.

Доказательство. Пусть $OABC$ — данный тетраэдр. Будем считать положительной ориентацию пространства, определяемую упорядоченной тройкой векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. При этом условии следующие упорядоченные тройки векторов имеют положительную ориентацию:

$$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC};\qquad \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OA};\qquad \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB};\qquad \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AO}.$$

Проверим это, например, хотя бы для последней тройки. Для этого разложим векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AO}$ по векторам $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Имеем:

$$\overrightarrow{OA}=\{1, 0, 0\},\qquad \overrightarrow{OB}=\{0, 1, 0\},\qquad \overrightarrow{OC}=\{0, 0, 1\},$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\{-1, 0, 1\},$$
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\{-1, 1, 0\},$$
$$\overrightarrow{AO}=\{-1, 0, 0\}.$$

Детерминант, составленный из координат векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AO}$, будет

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1>0.$$

Четыре тройки векторов

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{OA}, & \overrightarrow{OB}, & [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}], \\ \overrightarrow{OB}, & \overrightarrow{OC}, & [\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}], \\ \overrightarrow{OC}, & \overrightarrow{OA}, & [\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}], \\ \overrightarrow{AC}, & \overrightarrow{AB}, & [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}] \end{array}$$

ориентированы соответственно так же, как тройки

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{OA}, & \overrightarrow{OB}, & \overrightarrow{OC}, \\ \overrightarrow{OB}, & \overrightarrow{OC}, & \overrightarrow{OA}, \\ \overrightarrow{OC}, & \overrightarrow{OA}, & \overrightarrow{OB}, \\ \overrightarrow{AC}, & \overrightarrow{AB}, & \overrightarrow{AO}. \end{array}$$

Так как первые пары векторов соответственных троек одинаковы, то третьи векторы этих троек расположены по одну сторону от граней тетраэдра, определяемых первыми двумя векторами троек. Таким образом, векторы

$$\mathbf{n}_1=\frac{1}{2}[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}],\quad \mathbf{n}_2=\frac{1}{2}[\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}],\quad \mathbf{n}_3=\frac{1}{2}[\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}],\quad \mathbf{n}_4=\frac{1}{2}[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}]$$

перпендикулярны к граням тетраэдра, равны по абсолютной величине их площадям и направлены в сторону противолежащих вершин. Докажем, что их сумма равна нулю. Имеем:

$$\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3+\mathbf{n}_4=$$
$$=\frac{1}{2}[\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}]+\frac{1}{2}[\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}]+\frac{1}{2}[\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OA}]+\frac{1}{2}[\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB}]=$$
$$=\frac{1}{2}\{[\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}]+[\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}]+[\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OA}]+[(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}),\ (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})]\}=$$
$$=\frac{1}{2}\{[\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}]+[\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}]+[\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OA}]+[\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OB}]-[\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}]-$$
$$-[\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OA}]+[\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OA}]\}=0.$$

К главе X

Задача 39. Найти отношение, в котором плоскость, проведенная через концы трех ребер параллелепипеда, исходящих из одной вершины, делит диагональ параллелепипеда, исходящую из той же вершины.

Решение. Примем три ребра параллелепипеда, исходящих из одной вершины O, за единичные векторы аффинной системы координат. Тогда уравнение плоскости, проходящей через концы ребер, будет

$$x+y+z=1,$$

а уравнение диагонали OD, исходящей из той же вершины, будет

$$x=y=z.$$

Точка пересечения диагонали и плоскости будет $M=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$; начальная точка диагонали $O=(0, 0, 0)$, конец диагонали $D=(1, 1, 1)$. Следовательно,

$$\frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{MD}}=\frac{1}{2}.$$

Задача 40. Найти вектор $\mathbf{v}$, являющийся ортогональной проекцией вектора $\mathbf{u}=\{X, Y, Z\}$ на плоскость, заданную уравнением

$$Ax+By+Cz=0.$$

(Система координат прямоугольная.)

Решение. Представим вектор $\mathbf{u}$ как сумму его проекции $\mathbf{v}$ на данную плоскость и вектора $\mathbf{w}$, перпендикулярного к этой плоскости:

$$\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}.$$

Так как вектор $\mathbf{w}$ ортогонален к данной плоскости, то он коллинеарен с вектором $\mathbf{n}=\{A, B, C\}$, нормальным к данной плоскости. Поэтому

$$\mathbf{w}=\lambda\mathbf{n}$$

и

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}-\mathbf{w}=\mathbf{u}-\lambda\mathbf{n}.$$

Но вектор $\mathbf{v}$ лежит в данной плоскости и, значит, нормален к $\mathbf{n}$, а потому

$$0=(\mathbf{n},\ \mathbf{v})=(\mathbf{n},\ \mathbf{u}-\lambda\mathbf{n})=(\mathbf{n},\ \mathbf{u})-\lambda\mathbf{n}^2,$$

откуда

$$\lambda=\frac{(\mathbf{n},\ \mathbf{u})}{\mathbf{n}^2}=\frac{AX+BY+CZ}{A^2+B^2+C^2}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}-\lambda\mathbf{n}=\{X-\lambda A,\quad Y-\lambda B,\quad Z-\lambda C\},$$

где

$$\lambda=\frac{AX+BY+CZ}{A^2+B^2+C^2}.$$

Задача 41. Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей

$$x+5y+z=0,\quad x-z+4=0$$

и образующей с плоскостью

$$x-4y-8z+12=0$$

угол $\frac{\pi}{4}$. (Система координат прямоугольная.)

Решение. Уравнение искомой плоскости можно записать в виде

$$\alpha(x+5y+z)+\beta(x-z+4)=0$$

или

$$(\alpha+\beta)\,x+5\alpha y+(\alpha-\beta)\,z+4\beta=0.$$

По формуле для косинуса угла между двумя плоскостями находим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\alpha+\beta-20\alpha-8\alpha+8\beta}{9\sqrt{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+25\alpha^2+\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}}$$

или

$$3\alpha^2+4\alpha\beta=0,$$

откуда

$$\alpha_1=0,\quad \beta_1=1,$$
$$\alpha_2=4,\quad \beta_2=-3.$$

Условию задачи удовлетворяют две плоскости:

$$x-z+4=0,$$
$$x+20y+7z-12=0.$$

Задача 42. Даны две прямые

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z-4}{1},\qquad \frac{x+10}{11}=\frac{y+8}{10}=\frac{z-1}{2}.$$

Доказать, что эти прямые пересекаются, и написать уравнения биссектрисы тупого угла между ними. (Система координат прямоугольная.)

Решение. Первая прямая проходит через точку $A=(3, 0, 4)$ и имеет направляющий вектор $\mathbf{u}=\{2, -2, 1\}$; вторая прямая проходит через точку $B=(-10, -8, 1)$ и имеет направляющий вектор $\mathbf{v}=\{11, 10, 2\}$.

Чтобы устаиовить, что данные прямые пересекаются, надо показать, что они удовлетворяют условию компланарности двух прямых:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0.$$

В рассматриваемом случае это условие принимает вид

$$\begin{vmatrix} 13 & 8 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 11 & 10 & 2 \end{vmatrix}=0;$$

следовательно, данные прямые пересекаются и система уравнений, определяющих данные прямые, совместна. Решая эту систему, найдем точку пересечения данных прямых $M=(1, 2, 3)$.

Направляющие векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ данных прямых образуют острый угол, так как их скаляриое произведение

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})=4>0.$$

Значит, векторы $-\mathbf{u}=\{-2, 2, -1\}$, $\mathbf{v}=\{11, 10, 2\}$ образуют тупой угол.

Найдем единичные векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, имеющие соответственно те же направления, как векторы $-\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Имеем:

$$\mathbf{e}_1=\frac{-\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}=\left\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\},$$

$$\mathbf{e}_2=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\left\{\frac{11}{15}, \frac{10}{15}, \frac{2}{15}\right\}.$$

Вектор $\mathbf{b}=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$ направлен по биссектрисе тупого угла, образованного данными прямыми (как диагональ ромба, построенного на векторах $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$). Найдем вектор $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b}=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2=\left\{-\frac{2}{3}+\frac{11}{15}, \frac{2}{3}+\frac{10}{15}, -\frac{1}{3}+\frac{2}{15}\right\}=\left\{\frac{1}{15}, \frac{20}{15}, -\frac{3}{15}\right\}.$$

В качестве направляющего вектора искомой прямой можно взять любой вектор $\mathbf{b}'$, коллинеарный с вектором $\mathbf{b}$. Возьмем, например, вектор $\mathbf{b}'=\{1, 20, -3\}$; тогда уравнения биссектрисы тупого угла примут вид

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{20}=\frac{z-3}{-3}.$$

Задача 43. Доказать, что три плоскости

$$\begin{aligned} x-2y+2z+3&=0, \\ 2x+2y+z-6&=0, \\ 5x+14y-2z-21&=0 \end{aligned}$$

образуют призму; иайти уравнения оси и радиус круглого цилиндра, вписанного в эту призму. (Система координат прямоугольная.)

Решение. Так как три плоскости попарно пересекаются и не имеют общей точки, то они образуют призму.

Осью цилиндра будет линия пересечения биссекторных плоскостей внутренних двугранных углов призмы.

Уравнение биссекторной плоскости внутреннего двугранного угла призмы, образуемого первой и второй плоскостью, определяется одним из уравнений

$$\frac{x-2y+2z+3}{3}=\pm\frac{2x+2y+z-6}{3}.$$

Чтобы определить, с какими знаками нужно приравнивать дроби, стоящие в левой и правой частях этого уравнения, возьмем какую-нибудь точку на линии пересечения первой и третьей плоскостей, например точку $\left(0, \frac{3}{2}, 0\right)$, и подставим ее координаты в левую часть уравнения второй плоскости. В результате получится отрицательное число; следовательно, подставляя координаты точек биссекторной плоскости внутреннего двугранного угла между первой и второй плоскостями в левую часть уравнения второй плоскости, мы будем получать отрицательные числа.

Беря какую-нибудь точку на линии пересечения второй и третьей плоскостей, например точку $\left(0, \frac{11}{6}, \frac{7}{3}\right)$, и подставляя ее координаты в левую часть уравнения первой плоскости, получим положительное число; значит, положительным будет результат подстановки координат любой точки биссекторной плоскости, лежащей внутри двугранного угла между первой и второй плоскостями. Таким образом, в уравнении биссекторной плоскости перед дробями надо брать разные знаки. Следовательно уравнение биссекторной плоскости внутреннего двугранного угла между первой и второй плоскостями будет

$$-\frac{x-2y+2z+3}{3}=\frac{2x+2y+z-6}{3}.$$

Уравнение биссекторной плоскости внутреннего двугранного угла призмы, определяемого первой и третьей плоскостями, будет

$$\frac{x-2y+2z+3}{3}=\frac{5x+14y-2z-21}{15}.$$

Упрощая найденные уравнения биссекторных плоскостей, получим уравнения оси цилиндра:

$$x+z-1=0, \quad 2y-z-3=0.$$

Возьмем на оси цилиндра произвольную точку, например (0, 2, 1), и найдем ее расстояние до какой-нибудь из граней призмы. Это и будет радиус цилиндра $r=\frac{1}{3}$.

К главе XI

Задача 44. Найти неподвижную точку собственного ортогонального преобразования

$$x'=x\cos\varphi-y\sin\varphi+x_0,$$
$$y'=x\sin\varphi+y\cos\varphi+y_0, \quad \varphi\neq 0.$$

(Система координат прямоугольная.)

Решение. Координаты неподвижной точки определяются из системы уравнений

$$x = x\cos\varphi - y\sin\varphi + x_0,$$
$$y = x\sin\varphi + y\cos\varphi + y_0$$

или

$$(1-\cos\varphi)\,x + \sin\varphi\,y = x_0,$$
$$-\sin\varphi\,x + (1-\cos\varphi)\,y = y_0.$$

Детерминант системы

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & 1-\cos\varphi \end{vmatrix} = 2-2\cos\varphi = 4\sin^2\frac{\varphi}{2} > 0;$$

$$x = \frac{(1-\cos\varphi)\cdot x_0 - \sin\varphi\cdot y_0}{2-2\cos\varphi} = \frac{x_0 - \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot y_0}{2},$$

$$y = \frac{\sin\varphi\cdot x_0 + (1-\cos\varphi)\cdot y_0}{2-2\cos\varphi} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot x_0 + y_0}{2}.$$

Если перенести начало координат в неподвижную точку O^*, сохранив положительное направление осей, то в новой системе $O^*x^*y^*$ формулы преобразования будут иметь вид

$$x'^* = x^*\cos\varphi - y^*\sin\varphi,$$
$$y'^* = x^*\sin\varphi + y^*\cos\varphi.$$

Задача 45. Найти ось симметрии и вектор переноса вдоль оси симметрии несобственного ортогонального преобразования

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi + x_0,$$
$$y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi + y_0.$$

(Система координат прямоугольная.)

Решение. Направляющий вектор $\{X, Y\}$ оси симметрии находится из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} X &= X\cos\varphi + Y\sin\varphi, \\ Y &= X\sin\varphi - Y\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

которую можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} (1-\cos\varphi)\cdot X - \sin\varphi\cdot Y &= 0, \\ -\sin\varphi\cdot X + (1+\cos\varphi)\cdot Y &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Детерминант системы (2)

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & 1+\cos\varphi \end{vmatrix}$$

равен нулю; следовательно, эта система имеет ненулевое решение. Решением этой системы могут служить, например, координаты вектора

$$\{1+\cos\varphi,\ \sin\varphi\}$$

или координаты коллинеарного ему вектора

$$e = \left\{\cos\frac{\varphi}{2},\ \sin\frac{\varphi}{2}\right\}.$$

Вектор $\mathbf{v}$ переноса в направлении оси симметрии найдем, как ортогональную проекцию вектора $\mathbf{u}_0=\{x_0, y_0,\}$ на ось симметрии. Направляющий вектор оси симметрии

$$\mathbf{e}=\left\{\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\right\}.$$

Искомый вектор переноса

$$\mathbf{v}=(\mathbf{e}, \mathbf{u}_0)\,\mathbf{e}=\left(x_0\cos\frac{\varphi}{2}+y_0\sin\frac{\varphi}{2}\right)\mathbf{e}$$

или в координатах

$$\mathbf{v}=\left\{x_0\cos^2\frac{\varphi}{2}+y_0\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2},\ x_0\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+y_0\sin^2\frac{\varphi}{2}\right\}.$$

Если $M=(x, y)$ — какая-нибудь точка оси симметрии и $M'=(x', y')$ — ее образ при данном преобразовании, то

$$\overrightarrow{MM'}=\mathbf{v},$$

т. е.

$$x'-x=x_0\cos^2\frac{\varphi}{2}+y_0\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2},$$

$$y'-y=x_0\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+y_0\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

откуда

$$x'=x+x_0\cos^2\frac{\varphi}{2}+y_0\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2},$$

$$y'=y+x_0\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+y_0\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Вставляя в эти равенства вместо x' и y' их значения из формул преобразования, получим

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi+x_0=x+x_0\cos^2\frac{\varphi}{2}+y_0\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2},$$

$$x\sin\varphi-y\cos\varphi+y_0=y+x_0\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+y_0\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Каждое из этих эквивалентных друг другу уравнений и определяет искомую ось симметрии.

Упрощая какое-нибудь одно из них, мы получим для оси симметрии данного преобразования следующее уравнение:

$$\left(x-\frac{x_0}{2}\right)\sin\frac{\varphi}{2}-\left(y-\frac{y_0}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}=0.$$

Если принять за новую ось абсцисс прямоугольной системы координат ось симметрии O^*x^* и в качестве ее положительного направления взять направление вектора переноса в направлении оси симметрии (ось ординат O^*y^* может быть выбрана при этом произвольно), то в новой системе формулы преобразования будут иметь вид

$$x'^*=x^*+\left|x_0\cos\frac{\varphi}{2}+y_0\sin\frac{\varphi}{2}\right|,\quad y'^*=-y^*.$$

Задача 46. Относительно прямоугольной системы координат даны четыре прямые:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{1}$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0, \tag{2}$$
$$A_1x+B_1y+D_1=0, \tag{3}$$
$$A_2x+B_2y+D_2=0. \tag{4}$$

Найти площадь параллелограмма, образованного этими прямыми.

Решение. Рассмотрим аффинное преобразование

$$x'=A_1x+B_1y+C_1, \qquad y'=A_2x+B_2y+C_2.$$

Это преобразование переводит данные прямые соответственно в прямые

$$x'=0, \tag{1'}$$
$$y'=0, \tag{2'}$$
$$x'-C_1+D_1=0, \tag{3'}$$
$$y'-C_2+D_2=0. \tag{4'}$$

Обозначим через S площадь параллелограмма, образованного данными прямыми (1), (2), (3), (4), а через S' — площадь прямоугольника, образованного прямыми (1'), (2'), (3'), (4'). Стороны этого прямоугольника равны

$$|C_1-D_1| \quad \text{и} \quad |C_2-D_2|,$$

поэтому его площадь

$$S'=|C_1-D_1|\cdot|C_2-D_2|.$$

Но площадь образа какой-либо фигуры равна площади прообраза этой фигуры, умноженной на детерминант преобразования:

$$S'=S\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

откуда

$$S=\frac{S'}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}=\frac{|C_1-D_1|\cdot|C_2-D_2|}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Задача 47. Найти двойные плоскости аффинного преобразования

$$x'=6x-2y-3z+1,$$
$$y'=-2x+3y-6z+4,$$
$$z'=-3x-6y-2z+5$$

трехмерного аффинного пространства.

(Плоскость называется *двойной*, если она совпадает со своим образом при данном аффинном преобразовании.)

Решение. Прообразом плоскости

$$Ax'+By'+Cz'+D=0 \tag{1}$$

служит плоскость

$$A(6x-2y-3z+1)+B(-2x+3y-6z+4)+C(-3x-6y-2z+5)+D=0$$

или

$$(6A-2B-3C)\,x+(-2A+3B-6C)\,y+$$
$$+(-3A-6B-2C)\,z+(A+4B+5C+D)=0. \qquad (2)$$

Если плоскость (1) двойная, то она совпадает со своим прообразом (2). Необходимым и достаточным условием совпадения двух плоскостей является пропорциональность соответствующих коэффициентов их уравнений. Применяя эту теорему к плоскостям, определяемым уравнениями (1) и (2), получим:

$$\begin{aligned} 6A-2B-3C&=\lambda A,\\ -2A+3B-6C&=\lambda B,\\ -3A-6B-2C&=\lambda C,\\ A+4B+5C+D&=\lambda D, \end{aligned}$$

или

$$\left.\begin{aligned} (6-\lambda)\,A-2B-3C&=0,\\ -2A+(3-\lambda)\,B-6C&=0,\\ -3A-6B+(-2-\lambda)\,C&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$A+4B+5C+(1-\lambda)\,D=0. \qquad (4)$$

Так как числа A, B, C не могут равняться нулю одновременно, то детерминант, составленный из коэффициентов уравнений системы (3), должен быть равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & -3\\ -2 & 3-\lambda & -6\\ -3 & -6 & -2-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (5)$$

или

$$-\lambda^3+7\lambda^2+49\lambda-343=0. \qquad (5')$$

Из уравнения (5′) находим $\lambda_1=-7$, $\lambda_2=\lambda_3=7$. Полагая в системе (3) $\lambda=-7$, получим:

$$\left.\begin{aligned} 13A-2B-3C&=0,\\ -2A+10B-6C&=0,\\ -3A-6B+5C&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

откуда находим:

$$A_1=1,\quad B_1=2,\quad C_1=3.$$

Вставляя эти значения λ_1, A_1, B_1, C_1 в уравнение (4), найдем $D_1=-3$. Таким образом, имеем двойную плоскость, соответствующую корню $\lambda_1=-7$:

$$x+2y+3z-3=0.$$

Полагая теперь в системе (3) $\lambda=7$, получим систему

$$\begin{aligned} -A-2B-3C&=0,\\ -2A-4B-6C&=0,\\ -3A-6B-9C&=0 \end{aligned}$$

трех равносильных уравнений. Уравнение (4) при $\lambda=7$ принимает вид

$$A+4B+5C-6D=0,$$

откуда

$$D=\frac{A+4B+5C}{6}.$$

Следовательно, уравнения всех двойных плоскостей, соответствующих корню $\lambda=7$, могут быть написаны в виде

$$Ax+By+Cz+\frac{A+4B+5C}{6}=0$$

или

$$A\left(x+\frac{1}{6}\right)+B\left(y+\frac{2}{3}\right)+C\left(z+\frac{5}{6}\right)=0.$$

Последнее уравнение показывает, что все двойные плоскости, соответствующие корню $\lambda=7$, проходят через точку $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}\right)$, а из равенства

$$A+2B+3C=0$$

заключаем, что все они параллельны вектору $\{1, 2, 3\}$.

Итак, семейство двойных плоскостей, соответствующих корню $\lambda=7$, образует пучок плоскостей, проходящих через прямую

$$\frac{x+\frac{1}{6}}{1}=\frac{y+\frac{2}{3}}{2}=\frac{z+\frac{5}{6}}{3}$$

Задача 48. Найти общий вид аффинных преобразований, при которых гипербола

$$xy=c \tag{1}$$

переходит в себя.

Решение. Пусть

$$\left.\begin{aligned} x'&=a_{11}x+a_{12}y+a_1,\\ y'&=a_{21}x+a_{22}y+a_2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

— аффинное преобразование, переводящее гиперболу (1) в себя. Так как преобразование (2) оставляет на месте центр гиперболы, совпадающий с началом координат, то отсюда следует, что

$$a_1=a_2=0,$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} x'&=a_{11}x+a_{12}y,\\ y'&=a_{21}x+a_{22}y. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Преобразование (3) переводит асимптоты гиперболы, совпадающие с осями координат, в асимптоты этой же гиперболы. Однако возможны два случая:

1) каждая асимптота переходит сама в себя,

2) каждая асимптота переходит в другую асимптоту.

Рассмотрим первый случай. Так как ось Ox в рассматриваемом случае переходит сама в себя, то отсюда следует, что когда $y=0$, то и $y'=0$ при любом значении x, а отсюда в свою очередь вытекает, что $a_{21}=0$. Из того, что ось Oy является двойной прямой, точно так же выводим, что $a_{12}=0$. Таким образом, в разбираемом случае формулы (3) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} x'&=a_{11}x,\\ y'&=a_{22}y. \end{aligned}\right\} \tag{4$_1$}$$

Если точка $M=(x, y)$ лежит на гиперболе, то и ее образ $M'=(x' \; y')$ лежит на той же гиперболе, т. е. равенства $xy=c$ и $x'y'=c$ имеют место одновременно. Поэтому, воспользовавшись равенствами (4_1), имеем

$$c=x'y'=(a_{11}x)\,(a_{22}y)=(a_{11}a_{22})\,(xy)=a_{11}a_{22}c,$$

откуда следует, что

$$a_{11}a_{22}=1.$$

Полагая

$$a_{11}=k,$$

будем иметь

$$a_{22}=\frac{1}{k}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае искомое аффинное преобразование имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x'&=kx,\\ y'&=\frac{1}{k}y. \end{aligned}\right\} \tag{5_1}$$

Во втором случае искомое аффинное преобразование переводит ось Ox в ось Oy. Отсюда следует, что при $y=0$ и при любом x значение x' обращается в нуль. Первое из равенств (3) в этом случае дает $a_{11}=0$. Точно так же из того, что ось Oy переходит в ось Ox, вытекает, что $y'=0$ при любом y, если только $x=0$. Поэтому во втором равенстве (3) $a_{22}=0$. Таким образом, в рассматриваемом случае имеем

$$\left.\begin{aligned} x'&=a_{12}y,\\ y'&=a_{21}x. \end{aligned}\right\} \tag{4_2}$$

Как и в первом случае, доказывается, что

$$a_{12}a_{21}=1,$$

и потому, полагая

$$a_{12}=k,$$

имеем

$$a_{21}=\frac{1}{k},$$

и формулы (3) в этом случае принимают вид

$$\left.\begin{aligned} x'&=ky,\\ y'&=\frac{1}{k}x. \end{aligned}\right\} \tag{5_2}$$

Задача 49. Найти общий вид линейных преобразований трехмерного пространства, при которых каждый вектор переходит в вектор, ему ортогональный.

Решение. Если

$$\mathbf{u}'=\mathcal{A}\mathbf{u} \tag{1}$$

— искомое преобразование, то

$$(\mathbf{u},\ \mathcal{A}\mathbf{u})=0. \tag{2}$$

Применяя это соотношение к вектору $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, выведем отсюда

$$(\mathbf{u}, \mathcal{A}\mathbf{v}) = -(\mathbf{v}, \mathcal{A}\mathbf{u}). \tag{3}$$

Введем в пространстве ортонормированный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, и пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{4}$$

— матрица рассматриваемого преобразования в этом базисе. Это значит, что

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_1 = \{a_{11}, a_{21}, a_{31}\},$$
$$\mathcal{A}\mathbf{e}_2 = \{a_{12}, a_{22}, a_{32}\},$$
$$\mathcal{A}\mathbf{e}_3 = \{a_{13}, a_{23}, a_{33}\}.$$

Применяя равенство (2) к векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, найдем, что

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0.$$

Применяя к этим же векторам равенство (3), увидим, что

$$a_{21} = -a_{12}, \quad a_{31} = -a_{13}, \quad a_{32} = -a_{23}.$$

Таким образом, оказывается, что матрица (4) преобразования (1) во всяком ортонормированном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

т. е.

$$A = -A^*.$$

Положим

$$-a_{23} = \alpha, \quad -a_{31} = \beta, \quad -a_{12} = \gamma$$

и рассмотрим вектор $\mathbf{a} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Пусть

$$\mathbf{u} = \{x, y, z\}$$

— произвольный вектор,

$$\mathbf{u}' = \{x', y', z'\}$$

— образ вектора $\mathbf{u}$ при преобразовании $\mathcal{A}$. Тогда, используя принятые нами обозначения, можем записать преобразование (1) в виде

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\gamma y + \beta z = \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ y & z \end{vmatrix}, \\ y' &= \gamma x - \alpha z = \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ z & x \end{vmatrix}, \\ z' &= -\beta x + \alpha y = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x & y \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Равенства (6) могут быть заменены одним равенством

$$\mathbf{u}' = [\mathbf{a}, \mathbf{u}]. \tag{7}$$

Таким образом, преобразование $\mathcal{A}$, переводящее каждый вектор $\mathbf{u}$ в вектор, ему ортогональный, сводится к векторному умножению постоянного вектора $\mathbf{a}$ на переменный вектор $\mathbf{u}$.

К главе XII

Задача 50. Дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+\ 4x_3-\ 3x_4&=0,\\ 3x_1+5x_2+\ 6x_3-\ 4x_4&=0,\\ 4x_1+5x_2-\ 2x_3+\ 3x_4&=0,\\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4&=0. \end{aligned}$$

Найти фундаментальную систему ее решений; проверить, что система чисел $\{-2,\ 0,\ 5,\ 6\}$ является решением данной системы уравнений; представить это решение как линейную комбинацию фундаментальной системы решений.

Решение. Вычислим ранг матрицы, составленной из коэффициентов уравнений этой системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3\\ 3 & 5 & 6 & -4\\ 4 & 5 & -2 & 3\\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}.$$

Для этого найдем минор этой матрицы наивысшего порядка, определитель которого отличен от нуля. Левый верхний элемент этой матрицы равен $1\neq 0$. Определитель минора, окаймляющего этот элемент, $\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 3 & 5 \end{vmatrix}=-1\neq 0$. Определители всех миноров третьего порядка, окаймляющих этот определитель второго порядка, равны нулю. Следовательно, ранг матрицы данной системы равен 2. (Можно было бы проверить, что третья строка матрицы есть линейная комбинация первых двух ее строк с коэффициентами -5 и 3, а четвертая строка — линейная комбинация тех же строк с коэффициентами 9 и -2.) Поэтому все решения системы, составленной из первых двух уравнений, будут в то же время решениями исходной системы.

Найдем фундаментальную систему решений системы уравнений

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3-3x_4&=0,\\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4&=0. \end{aligned}$$

Так как определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 3 & 5 \end{vmatrix}$, составленный из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2, отличен от нуля, то x_3 и x_4 можно принять за свободные неизвестные.

Перепишем последнюю систему в виде

$$\begin{aligned} x_1+2x_2&=-4x_3+3x_4,\\ 3x_1+5x_2&=-6x_3+4x_4; \end{aligned}$$

решая ее относительно x_1 и x_2, найдем

$$\begin{aligned} x_1&=8x_3-7x_4,\\ x_2&=-6x_3+5x_4. \end{aligned}$$

Полагая сначала $x_3=1$, $x_4=0$, а затем $x_3=0$, $x_4=1$, получим фундаментальную систему решений данной системы уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1&=\{8,\ -6,\ 1,\ 0\},\\ \mathbf{a}_2&=\{-7,\ 5,\ 0,\ 1\}. \end{aligned}$$

Подстановкой убеждаемся, что вектор $\mathbf{x}=\{-2,\ 0,\ 5,\ 6\}$ действительно является решением системы. Так как $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ образуют фундаментальную систему решений, то

$$\mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2,$$

или

$$\{-2,\ 0,\ 5,\ 6\}=\lambda_1\{8,\ -6,\ 1,\ 0\}+\lambda_2\{-7,\ 5,\ 0,\ 1\},$$

откуда находим

$$\lambda_1=5,\ \lambda_2=6,$$

и, следовательно,

$$\mathbf{x}=5\mathbf{a}_1+6\mathbf{a}_2.$$

Задача 51. Доказать: для того чтобы **две системы** векторов n-мерного линейного пространства

$$\mathbf{a}_1=\{a_{11},\ \ldots,\ a_{1n}\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{a}_r=\{a_{r1},\ \ldots,\ a_{rn}\}$$

и

$$\mathbf{b}_1=\{b_{11},\ \ldots,\ b_{1n}\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{b}_r=\{b_{r1},\ \ldots,\ b_{rn}\},$$

каждая из которых линейно независима, определяли одно и то же r-мерное подпространство, необходимо и достаточно, чтобы соответственные детерминанты миноров порядка r матриц

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r1} & \ldots & b_{rn} \end{pmatrix},$$

составленных из координат этих векторов, были пропорциональны.

Доказательство необходимости. Если векторы $\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_r$ и $\mathbf{b}_1,\ \ldots,\ \mathbf{b}_r$ обеих систем определяют одно и то же r-мерное линейное подпространство, то, в силу линейной независимости векторов

$$\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_r,$$

они образуют базис этого подпространства, и потому векторы

$$\mathbf{b}_1,\ \ldots,\ \mathbf{b}_r$$

через векторы $\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_r$ линейно выражаются:

$$\mathbf{b}_1=c_{11}\mathbf{a}_1+\ldots+c_{1r}\mathbf{a}_r,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{b}_r=c_{r1}\mathbf{a}_1+\ldots+c_{rr}\mathbf{a}_r$$

или в координатах:

$$\left.\begin{aligned} b_{11} &= c_{11}a_{11} + \ldots + c_{1r}a_{r1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{1n} &= c_{11}a_{1n} + \ldots + c_{1r}a_{rn}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{r1} &= c_{r1}a_{11} + \ldots + c_{rr}a_{r1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{rn} &= c_{r1}a_{1n} + \ldots + c_{rr}a_{rn}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{r1} & \ldots & c_{rr} \end{pmatrix};$$

тогда равенства (1) могут быть переписаны в виде

$$B = CA. \quad (2)$$

Так как матрицы A и B имеют один и тот же ранг r, то из равенства (2) следует, что матрица C невырожденная, т. е. что $\det C \neq 0$. Из равенства (2), далее, следует, что если мы возьмем детерминант порядка r, составленный из каких-нибудь r столбцов матрицы B, то он будет равен детерминанту матрицы C, умноженному на детерминант, составленный из r столбцов матрицы A с такими же номерами. Необходимость условия, таким образом, доказана.

Доказательство достаточности. Без ограничения общности можно предположить, что детерминант, составленный из первых r столбцов матрицы A, отличен от нуля. Но тогда, в силу пропорциональности детерминантов матриц A и B, составленных из столбцов с одинаковыми номерами, детерминант, составленный из первых r столбцов матрицы B, также будет отличен от нуля.

Линейное подпространство, натянутое на векторы

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r,$$

определяется следующей системой $n-r$ линейно независимых уравнений [1]:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1,r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{r,r+1} \\ x_1 & \ldots & x_r & x_{r+1} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rn} \\ x_1 & \ldots & x_r & x_n \end{vmatrix} = 0.$$

Коэффициентами этих уравнений являются детерминанты порядка r, составленные из столбцов матрицы A.

Аналогичной системой уравнений определяется подпространство, натянутое на векторы $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$, причем коэффициентами этих уравнений будут детерминанты r-го порядка, составленные из столбцов матрицы B.

---

[1]) См. второе доказательство теоремы 13, § 8, гл. XII.

Коэффициенты соответственных уравнений при одинаковых неизвестных суть детерминанты, составленные из столбцов матриц A и B с одинаковыми номерами. Но, по предположению, такие детерминанты пропорциональны; следовательно, подпространства, натянутые соответственно на векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ и $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$, определяются системами уравнений, в которых коэффициенты соответственных уравнений при одинаковых неизвестных пропорциональны. Следовательно, эти подпространства совпадают.

Задача 52. Найти матрицу линейного преобразования $\mathscr{C}$, которое линейно независимые векторы

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \{a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}\},\\
\mathbf{a}_2 &= \{a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}\},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathbf{a}_n &= \{a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}\}
\end{aligned}$$

переводит соответственно в векторы

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= \{b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{n1}\},\\
\mathbf{b}_2 &= \{b_{12}, b_{22}, \ldots, b_{n2}\},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathbf{b}_n &= \{b_{1n}, b_{2n}, \ldots, b_{nn}\}.
\end{aligned}$$

Решение. Обозначим через A матрицу, столбцами которой являются координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, через B — матрицу, имеющую своими столбцами координаты векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, а через C — матрицу искомого линейного преобразования. Тогда будем иметь

$$\mathscr{C}\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1, \quad \mathscr{C}\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2, \quad \ldots, \quad \mathscr{C}\mathbf{a}_n = \mathbf{b}_n$$

или

$$CA = B,$$

откуда

$$C = B\,(A)^{-1}.$$

К главе XIII

Задача 53. Доказать: для того чтобы ненулевая билинейная форма представлялась в виде произведения двух линейных форм необходимо и достаточно, чтобы ранг этой билинейной формы был равен 1.

Доказательство необходимости. Пусть билинейная форма

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {} & a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \ldots + a_{1n}x_1y_n +\\
& + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \ldots + a_{2n}x_2y_n +\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
& + a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \ldots + a_{nn}x_ny_n, \qquad (1\\
& \mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\},\\
& \mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\},
\end{aligned}$$

с матрицей

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

представляется в виде произведения двух линейных форм:

$$b(\mathbf{x})=b_1x_1+b_2x_2+\dots+b_nx_n$$

и

$$c(\mathbf{y})=c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n.$$

В таком случае матрица A этой билинейной формы представляется в виде

$$A=\begin{pmatrix} b_1c_1 & b_1c_2 & \dots & b_1c_n \\ b_2c_1 & b_2c_2 & \dots & b_2c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_nc_1 & b_nc_2 & \dots & b_nc_n \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что все строки матрицы A получаются умножением системы чисел

$$c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n$$

последовательно на числа

$$b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n.$$

Так как форма

$$a(\mathrm{x},\ \mathrm{y})$$

ненулевая, то в каждой системе чисел

$$b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n,$$

$$c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n$$

имеются числа, отличные от нуля; следовательно, ранг матрицы A равен 1.

Доказательство достаточности. Предположим, что ранг матрицы билинейной формы равен 1. Это значит, что найдутся две системы чисел

$$c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n$$

и

$$b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n,$$

каждая из которых содержит числа, отличные от нуля и такие, что

$$\begin{aligned} &a_{11}=c_1b_1, && a_{12}=c_2b_1, && \dots, && a_{1n}=c_nb_1, \\ &a_{21}=c_1b_2, && a_{22}=c_2b_2, && \dots, && a_{2n}=c_nb_2, \\ &\dots\dots\dots

Задача 54. Доказать: для того чтобы неиулевая квадратичная форма с вещественными коэффициентами представлялась в виде произведения двух линейных форм (с вещественными или комплексными коэффициентами), необходимо и достаточно, чтобы ранг этой квадратичной формы не превосходил 2.

Доказательство необходимости. Пусть $a(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ — ненулевая квадратичная форма, представляющаяся в виде произведения двух линейных форм:

$$a(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (b_1x_1 + \ldots + b_nx_n)(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n).$$

Тогда по крайней мере одно из чисел

$$b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и по крайней мере одно из чисел

$$c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

отлично от нуля.

Могут представиться два случая.

1° Числа

$$c_1, c_2, \ldots, c_n$$

пропорциональны соответственно числам

$$b_1, b_2, \ldots, b_n.$$

Без ограничения общности можем считать, что

$$b_1 \neq 0,$$

но тогда и

$$c_1 = \lambda b_1 \neq 0.$$

Рассмотрим преобразование координат

$$\begin{aligned} x'_1 &= b_1x_1 + \ldots + b_nx_n, \\ x'_2 &= x_2, \\ &\ldots\ldots \\ x'_n &= x_n. \end{aligned}$$

В новой системе координат квадратичная форма примет вид

$$a(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda x'^2_1,$$

откуда следует, что ранг ее в этом случае равен 1.

2° Числа

$$c_1, c_2, \ldots, c_n$$

не пропорциональны числам

$$b_1, b_2, \ldots, b_n.$$

Это значит, что для некоторых $i < j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$

$$\begin{vmatrix} b_i & b_j \\ c_i & c_j \end{vmatrix} \neq 0.$$

Рассмотрим снова преобразование координат

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1,\\
&\dots\dots\\
x_{i-1}' &= x_{i-1},\\
x_i' &= b_1x_1 + \dots + b_nx_n,\\
x_{i+1}' &= x_{i+1},\\
&\dots\dots\\
x_{j-1}' &= x_{j-1},\\
x_j' &= c_1x_1 + \dots + c_nx_n,\\
x_{j+1}' &= x_{j+1},\\
&\dots\dots\\
x_n' &= x_n
\end{aligned}$$

(детерминант этого преобразования, равный $\begin{vmatrix} b_i & b_j \\ c_i & c_j \end{vmatrix}$, отличен от нуля).

В новой системе координат квадратичная форма будет иметь вид

$$a(x, x) = x_i' x_j';$$

ее матрица $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ имеет ранг 2.

Доказательство достаточности. 1° Предположим, что ранг квадратичной формы равен 1. Тогда существует базис, в котором эта квадратичная форма имеет вид

$$a(x, x) = \lambda x_1'^2.$$

Возвращаясь к старым координатам, будем иметь

$$a(x, x) = \lambda (c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n)^2,$$

и наше утверждение доказано.

2° Предположим теперь, что ранг квадратичной формы равен 2. Тогда существует базис, в котором эта квадратичная форма имеет вид

$$a(x, x) = x_1'^2 \pm x_2'^2.$$

Рассмотрим подробнее случай

$$a(x, x) = x_1'^2 + x_2'^2 = (x_1' + i x_2')(x_1' - i x_2').$$

Возвращаемся к старым координатам. Пусть

$$\begin{aligned}
x_1' &= c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n,\\
x_2' &= c_{21}x_1 + \dots + c_{2n}x_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
x_n' &= c_{n1}x_1 + \dots + c_{nn}x_n
\end{aligned}$$

В исходной системе квадратичная форма принимает вид

$$\begin{aligned}
a(x, x) = &\left[(c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n) + i(c_{21}x_1 + \dots + c_{2n}x_n)\right] \times\\
&\times\left[(c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n) - i(c_{21}x_1 + \dots + c_{2n}x_n)\right],
\end{aligned}$$

откуда и следует наше утверждение.

Если ранг квадратичной формы равен 2, а положительный индекс инерции равен 1, то форма представляется в виде произведения двух линейных форм с вещественными коэффициентами.

Задача 55. Доказать: для того чтобы существовал базис, в котором ненулевая квадратичная форма не содержит членов с квадратами координат, необходимо и достаточно, чтобы эта форма принимала как положительные, так и отрицательные значения.

Доказательство необходимости. Предположим, что квадратичная форма в некотором базисе не содержит членов с квадратами координат. Так как форма ненулевая, то в этом базисе по крайней мере один ее коэффициент a_{ij}, $i \neq j$, отличен от нуля.

Без ограничения общности можно предположить, что $a_{12} \neq 0$. Тогда на векторах

$$\{1, 1, 0, \ldots, 0\}$$

и

$$\{1, -1, 0, \ldots, 0\}$$

наша функция принимает значения, противоположные по знаку.

Доказательство достаточности. Предположим, что форма принимает как положительные, так и отрицательные значения. Тогда в ее нормальном виде встречаются как положительные, так и отрицательные квадраты.

Пусть

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$$

— базис, в котором квадратичная форма имеет нормальный вид

$$x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_r^2$$

(здесь n — размерность пространства, r — ранг формы, k — положительный индекс инерции).

Положим

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{k+1},\\
\mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_{k+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{e}'_k &= \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k+1},\\
\mathbf{e}'_{k+1} &= \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k+1},\\
\mathbf{e}'_{k+2} &= \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{e}'_r &= \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_r,\\
\mathbf{e}'_{r+1} &= \mathbf{e}_{r+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{e}'_n &= \mathbf{e}_n.
\end{aligned}$$

Векторы $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ образуют базис, так как определитель матрицы перехода отличен от нуля (его абсолютная величина равна двум).

Покажем, что каждый из векторов $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ обращает форму в 0. Этим будет показано, что в новом базисе форма не содержит членов с квадратами координат.

Пусть сначала $1 \leqslant i \leqslant k$. Тогда

$$a(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_i) = a(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{k+1}) =$$
$$= a(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) + 2a(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{k+1}) + a(\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_{k+1}) = 1 + 0 - 1 = 0.$$

Точно так же покажем, что если

$$k+1 \leqslant i \leqslant r,$$

то

$$a(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_i) = 0.$$

Наконец, если

$$r+1 \leqslant i \leqslant n,$$

то

$$a(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_i) = a(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 0.$$

Задача 56. Доказать, что если p и q — положительный и отрицательный индексы инерции невырожденной квадратичной формы в n-мерном пространстве, то существует линейное подпространство размерности, равной меньшему из индексов инерции, все векторы которого обращают эту форму в нуль, и не существует подпространства большей размерности, обладающего тем же свойством.

Доказательство. Предположим, что в базисе

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$$

квадратичная форма имеет вид

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2.$$

Пусть, например,

$$p \geqslant q = n - p.$$

Рассмотрим подпространства, определяемые следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 - x_{p+1} &= 0, \\ x_2 - x_{p+2} &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_q - x_{p+q} &= 0, \\ x_{q+1} &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_p &= 0. \end{aligned}$$

Эта система состоит из $p = n - q$ линейно независимых уравнений и, следовательно, определяет подпространство размерности q. Каждый вектор, являющийся решением этой системы, обращает квадратичную форму в 0.

Предположим, что существует подпространство размерности $r > q$, векторы которого обращают форму в 0. Такое подпространство может быть задано системой из $n - r$ линейно независимых уравнений.

Наряду с этой системой рассмотрим вторую систему уравнений, получающуюся добавлением к $n - r$ уравнениям прежней системы еще q уравнений

$$\begin{aligned} x_{p+1} &= 0, \\ &\ldots\ldots \\ x_n &= 0. \end{aligned}$$

Новая система состоит из $n-r+q$ уравнений. Но $n-r+q<n$, следовательно, эта система уравнений имеет ненулевое решение. Это решение является решением и первых $n-r$ уравнений и потому обращает форму в 0.

С другой стороны, так как в этом решении

$$x_{p+1}=\ldots=x_n=0,$$

то подстановка его значений в форму дает положительное число. Полученное противоречие показывает, что не существует подпространства размерности $r>q$, векторы которого обращают форму в 0.

К главе XIV

Задача 57. Даны три плоскости:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

В зависимости от рангов r и R матриц

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

и

$$B=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

выяснить взаимное расположение плоскостей, заданных уравнениями (1).

Решение. 1°. Пусть $r=3$, т. е.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

В этом случае и $R=3$. Система (1) имеет единственное решение; это значит, что три плоскости, задаваемые уравнениями (1), имеют единственную общую точку.

Векторное многообразие, определяемое системой

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z=0,\\ A_3x+B_3y+C_3z=0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

состоит из нулевого вектора.

2°. $r=2$, $R=2$. В этом случае система (1) совместна, а система (2) определяет одномерное векторное многообразие. Данные три плоскости имеют единственную общую прямую — принадлежат одному собственному пучку. Эта прямая проходит через какую-нибудь точку, определяемую системой (1), и параллельна вектору, определяемому системой (2),

Если никакие две строки матрицы B не пропорциональны, то плоскости (1) попарно различны. В противном случае какие-нибудь две плоскости совпадают, а третья плоскость их пересекает.

3°. $r=2$, $R=3$. Система (1) несовместна, система (2) определяет одномерное векторное многообразие. Этот случай содержит в себе два подслучая.

3°а. Никакие две строки матрицы A не пропорциональны. В этом случае каждые две плоскости пересекаются, причем линия их пересечения параллельна третьей плоскости, а все три плоскости общей точки не имеют. Плоскости образуют призму.

3°б. Какие-нибудь две строки матрицы A пропорциональны. Соответствующие строки матрицы B не могут быть пропорциональны, так как в противном случае мы находились бы в условиях случая 2°. В этом случае две плоскости, задаваемые уравнениями (1), параллельны, а третья их пересекает.

4°. $r=1$, $R=1$. Уравнения (1) определяют одну и ту же плоскость; уравнения (2) — одно и то же двумерное векторное многообразие.

5°. $r=1$, $R=2$. Система (1) несовместна; система (2) определяет двумерное векторное многообразие.

В матрице A каждые две строки пропорциональны. Поэтому три плоскости, определяемые уравнением (1), параллельны в широком смысле слова. При этом возможны два подслучая.

5°а. Никакие две строки в матрице B не пропорциональны: каждые две плоскости (1) параллельны в узком смысле слова.

5°б. Какие-нибудь две строки матрицы B пропорциональны; тогда третья строка не может быть им пропорциональна, так как $R=2$. В этом случае две плоскости совпадают, а третья им параллельна в узком смысле слова.

Задача 58. Написать параметрические уравнения плоскости, заданной системой уравнений

$$\begin{aligned} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5&=3,\\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5&=6,\\ 3x_1+3x_2-x_3+3x_4+2x_5&=-3. \end{aligned}$$

Решение. Выясним прежде всего, является ли система совместной; для этого вычислим ранг матрицы из коэффициентов при неизвестных и ранг расширенной матрицы. Ранги обеих матриц оказываются одинаковыми: оба они равны 2. (Третье уравнение получается вычитанием из первого уравнения второго.) Поэтому рассмотрим систему, состоящую из первых двух уравнений:

$$\begin{aligned} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5&=3,\\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5&=6. \end{aligned}$$

Определитель $\begin{vmatrix}5&6\\2&3\end{vmatrix}$, составленный из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2, отличен от нуля: он равен 3. Поэтому систему можно разрешить относительно неизвестных x_1 и x_2, принимая за свободные неизвестные x_3, x_4, x_5. Имеем

$$\begin{aligned} 5x_1+6x_2&=3+2x_3-7x_4-4x_5,\\ 2x_1+3x_2&=6+x_3-4x_4-2x_5. \end{aligned}$$

Найдем частное решение этой системы, полагая

$$x_3=x_4=x_5=0;$$

тогда

$$x_1=-9,\quad x_2=8.$$

Следовательно, плоскость проходит через точку $(-9, 8, 0, 0, 0)$.

Найдем теперь фундаментальную систему решений однородной системы уравнений

$$\begin{aligned}5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5&=0,\\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5&=0,\end{aligned}$$

соответствующей данной неоднородной системе. Полагая последовательно

$$\begin{aligned}x_3&=1,\quad x_4=0,\quad x_5=0,\\ x_3&=0,\quad x_4=1,\quad x_5=0,\\ x_3&=0,\quad x_4=0,\quad x_5=1,\end{aligned}$$

получим следующую фундаментальную систему решений:

$$\left.\begin{aligned}&\left\{0,\ \frac{1}{3},\ 1,\ 0,\ 0\right\},\\ &\{1,\ -2,\ 0,\ 1,\ 0\},\\ &\left\{0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ 0,\ 1\right\}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Таким образом, данная плоскость содержит векторы (1). Параметрические уравнения плоскости можно записать в виде

$$\begin{aligned}x_1&=-9+t_2,\\ x_2&=8+\frac{1}{3}t_1-2t_2-\frac{2}{3}t_3,\\ x_3&=t_1,\\ x_4&=t_2,\\ x_5&=t_3.\end{aligned}$$

Задача 59. Даны параметрические уравнения плоскости

$$\begin{aligned}x_1&=1+t_1+t_2,\\ x_2&=-2+2t_1-3t_2,\\ x_3&=-1-3t_1+2t_2,\\ x_4&=3+t_1-3t_2,\\ x_5&=3t_1-2t_2.\end{aligned}$$

Написать систему линейно независимых уравнений, определяющих эту плоскость.

Решение. Составим матрицу из координат векторов, компланарных данной плоскости:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 1 & 3\\ 1 & -3 & 2 & -3 & -2\end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 2, следовательно, векторы

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1&=\{1,\ 2,\ -3,\ 1,\ 3\},\\ \mathbf{a}_2&=\{1,\ -3,\ 2,\ -3,\ -2\}\end{aligned}$$

линейно независимы, и данная плоскость является двумерной. Так как она находится в пятимерном пространстве, то для ее задания необходимы три уравнения с неизвестными x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Плоскость проходит через точку $M_0=(1, -2, -1, 3, 0)$. Для того чтобы произвольная точка $M=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ лежала на данной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы три вектора

$$\mathbf{a}_1=\{1, 2, -3, 1, 3\}, \quad \mathbf{a}_2=\{1, -3, 2, -3, -2\},$$

$$\overrightarrow{M_0M}=\{x_1-1, x_2+2, x_3+1, x_4-3, x_5\}$$

были линейно зависимы. Следовательно, ранг матрицы, составленной из координат этих векторов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -3 & -2 \\ x_1-1 & x_2+2 & x_3+1 & x_4-3 & x_5 \end{pmatrix},$$

равен 2. Значит, определители всех миноров третьего порядка этой матрицы равны нулю. Но детерминант, стоящий в левом верхнем углу этой матрицы, отличен от нуля: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-5$. Беря детерминанты окаймляющих его миноров и приравнивая их нулю, получаем три линейно независимых уравнения данной плоскости:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ x_1-1 & x_2+2 & x_3+1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ x_1-1 & x_2+2 & x_4-3 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ x_1-1 & x_2+2 & x_5 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+2&=0, \\ 3x_1-4x_2+5x_4-26&=0, \\ x_1+x_2-x_5+1&=0. \end{aligned}$$

Задача 60. Доказать, что если плоскость L_1 имеет размерность r, а плоскость L_2 — размерность s, то существует плоскость L, содержащая как L_1, так и L_2, размерность которой $\leqslant r+s+1$. В частности, две прямые всегда содержатся в плоскости, размерность которой $\leqslant 3$; прямая и двумерная плоскость — в плоскости, размерность которой $\leqslant 4$; две двумерные плоскости — в плоскости, размерность которой $\leqslant 5$, и т. д.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда плоскости L_1 и L_2 «скрещиваются», т. е. сами они не имеют общих точек, а соответствующие им векторные многообразия не имеют общих ненулевых векторов.

Пусть плоскость L_1 проходит через точку A и ей компланарны линейно независимые векторы

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r,$$

плоскость L_2 проходит через точку B и компланарна линейно независимым векторам

$$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s.$$

Введем еще вектор $\mathbf{c}=\overrightarrow{AB}$ и рассмотрим плоскость L, проходящую через точку A и компланарную векторам

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s, \quad \mathbf{c}.$$

Плоскости L_1 и L_2 содержатся в плоскости L. Докажем, что плоскость L имеет размерность $r+s+1$. Для этого надо показать, что компланарные ей векторы

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s, \quad \mathbf{c}$$

линейно независимы. Векторы

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s$$

линейно независимы. В самом деле, из соотношения

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\ldots+\lambda_r\mathbf{a}_r+\mu_1\mathbf{b}_1+\ldots+\mu_s\mathbf{b}_s=0$$

следует, что

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\ldots+\lambda_r\mathbf{a}_r=-\mu_1\mathbf{b}_1-\ldots-\mu_s\mathbf{b}_s.$$

Вектор

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\ldots+\lambda_r\mathbf{a}_r$$

принадлежит векторному многообразию, соответствующему L_1, а вектор

$$-\mu_1\mathbf{b}_1-\ldots-\mu_s\mathbf{b}_s$$

— многообразию, соответствующему L_2. Но у этих многообразий общим является только нуль-вектор; поэтому

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\ldots+\lambda_r\mathbf{a}_r=0, \quad -\mu_1\mathbf{b}_1-\ldots-\mu_s\mathbf{b}_s=0,$$

а так как векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ линейно независимы, так же как и векторы $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s$, то

$$\lambda_1=\ldots=\lambda_r=0, \quad \mu_1=\ldots=\mu_s=0,$$

и, следовательно, векторы

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s$$

линейно независимы.

Если бы все векторы

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s, \quad \mathbf{c}$$

были линейно зависимы, то вектор $\mathbf{c}$ можно было бы представить в виде

$$\mathbf{c}=\alpha_1\mathbf{a}_1+\ldots+\alpha_r\mathbf{a}_r-\beta_1\mathbf{b}_1-\ldots-\beta_s\mathbf{b}_s.$$

Отложим от точки B вектор

$$\overrightarrow{BM}=\beta_1\mathbf{b}_1+\ldots+\beta_s\mathbf{b}_s.$$

Точка M принадлежит плоскости L_2. Рассмотрим вектор

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\mathbf{c}+\beta_1\mathbf{b}_1+\ldots+\beta_s\mathbf{b}_s=\alpha_1\mathbf{a}_1+\ldots+\alpha_r\mathbf{a}_r.$$

Мы видим, что конец вектора $\overrightarrow{AM}$ принадлежит плоскости L_1. Итак, вопреки предположению оказывается, что плоскости L_1 и L_2 имеют общую точку M. Следовательно, вектор $\mathbf{c}$ не может быть представлен как линейная комбинация векторов

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s.$$

Значит, векторы

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s, \quad \mathbf{c}$$

линейно независимы и размерность плоскости L равна $r+s+1$.

При сделанных предположениях плоскости L_1 и L_2 не могут содержаться в плоскости меньшей размерности, так как иначе $r+s+1$ векторов

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s, \quad \mathbf{c}$$

оказались бы линейно зависимыми. Если же одно из условий будет нарушено, то размерность плоскости L, содержащей L_1 и L_2, будет меньше, чем $r+s+1$.

Задача 61. Доказать, что если плоскость α не имеет общих точек с гиперплоскостью π, то плоскость α параллельна гиперплоскости π.

(Две плоскости называются *параллельными*, если они не имеют общих точек и векторное многообразие, соответствующее одной из этих плоскостей, содержится в векторном многообразии, соответствующем другой плоскости, или совпадает с ним.)

Доказательство. Пусть

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n+b=0$$

— уравнение гиперплоскости π. Мы должны показать, что всякий вектор, принадлежащий векторному многообразию, соответствующему плоскости α, принадлежит и векторному многообразию, соответствующему гиперплоскости π. Предположим, что это не так; тогда в многообразии, соответствующем плоскости α, найдется вектор $\mathbf{c}=\{c_1, \ldots, c_n\}$, не принадлежащий многообразию, соответствующему π, т. е. вектор, удовлетворяющий неравенству

$$a_1c_1+\ldots+a_nc_n\neq 0.$$

Возьмем в плоскости α точку $B=(b_1, \ldots, b_n)$ и рассмотрим прямую, проходящую через точку B и имеющую своим направляющим вектором вектор $\mathbf{c}$. Она определяется системой параметрических уравнений

$$x_1=b_1+c_1t, \ \ldots, \ x_n=b_n+c_nt.$$

Эта прямая принадлежит плоскости α и пересекает плоскость π, так как в силу неравенства

$$a_1c_1+\ldots+a_nc_n\neq 0$$

система уравнений

$$\begin{gathered} a_1x_1+\ldots+a_nx_n+b=0, \\ x_1=b_1+c_1t, \\ \ldots\ldots \\ x_n=b_n+c_nt \end{gathered}$$

совместна. Значит, плоскости α и π имеют общую точку, что противоречит предположению. Отсюда следует, что не существует вектора, компланарного плоскости α и не компланарного плоскости π. Следовательно, векторное многообразие, соответствующее плоскости α, содержится в векторном многообразии, соответствующем гиперплоскости π, или совпадает с этим последним, т. е. плоскость α параллельна плоскости π.

Задача 62. Доказать: для того чтобы две плоскости L_1 и L_2, не имеющие общих точек, были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы обе они содержались в плоскости, размерность которой равна $r+1$, где r — наибольшая из размерностей плоскостей L_1 и L_2, если эти размерности различны, и является их общим значением, если размерности плоскостей L_1 и L_2 одинаковы.

Доказательство необходимости. Пусть размерность r плоскости L_1 больше или равна размерности плоскости L_2. Это значит, что существует r линейно независимых векторов

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r,$$

компланарных плоскости L_1 и порождающих соответствующее этой плоскости векторное многообразие.

Возьмем точку A в плоскости L_1 и точку B в плоскости L_2. Вектор $\mathbf{c}=\overrightarrow{AB}$ не принадлежит векторному многообразию, порожденному векторами $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$, так как в противном случае его конец B принадлежал бы плоскости L_1, а плоскости L_1 и L_2 общих точек не имеют. Следовательно, векторы

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{c}$$

линейно независимы и вместе с точкой A определяют $(r+1)$-мерную плоскость L, содержащую как плоскость L_1, так и плоскость L_2, так как в силу параллельности плоскостей L_1 и L_2 векторы, компланарные L_2, содержатся в векторном многообразии, порожденном векторами $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$.

Доказательство достаточности. Предположим, что плоскости L_1 и L_2 не имеют общих точек и обе содержатся в плоскости L размерности $r+1$, где r — наибольшая из размерностей плоскостей L_1 и L_2, если их размерности различны, и является их общим значением, если размерности плоскостей одинаковы. Пусть плоскость L_1 имеет размерность r. Мы можем рассматривать плоскость L как $(r+1)$-мерное аффинное пространство; тогда r-мерная плоскость L_1 будет его гиперплоскостью, а плоскость L_2, не имеющая с L_1 общих точек, в силу предыдущей задачи будет параллельна L_1.

Задача 63. Доказать, что если через концы ребер n-мерного параллелепипеда, исходящих из одной вершины O, провести плоскость π, а затем через все вершины параллелепипеда провести плоскости, ей параллельные, то они разобьют диагональ OA параллелепипеда, выходящую из вершины O, на n равных частей.

Доказательство. Примем вершину O за начало, а выходящие из нее ребра за единичные векторы осей аффинной системы координат. В этой системе уравнение плоскости π будет

$$x_1+\ldots+x_n=1,$$

а уравнение диагонали OA —

$$x_1=\ldots=x_n.$$

Уравнения плоскостей, проходящих через вершины параллелепипеда и параллельных плоскости π, будут

$$x_1+\ldots+x_n=k,$$

$k=0, 1, 2, \ldots, n$, где k — число координат вершины параллелепипеда, равных 1. При $k=0$ получаем плоскость, проходящую через вершину O;

при $k=n$ — плоскость, проходящую через вершину A. Остальные $n-1$ плоскостей пересекут диагональ в точках

$$A_1=\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right),$$

$$A_2=\left(\frac{2}{n}, \ldots, \frac{2}{n}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{n-1}=\left(\frac{n-1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right),$$

разбивающих диагональ OA на n равных частей.

К главе XV

Задача 64. Даны две точки F_1 и F_2 на расстоянии $2a$ друг от друга: $|\overline{F_1F_2}|=2a$. Найти геометрическое место точек, произведение расстояний которых до точек F_1 и F_2 равно a^2.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, принимая за ось абсцисс прямую F_1F_2, а за ось ординат перпендикуляр к прямой F_1F_2, проведенный через середину O отрезка F_1F_2. В этой системе

$$F_1=(-a, 0), \quad F_2=(a, 0).$$

Пусть $M=(x, y)$ — произвольная точка искомого геометрического места. Тогда

$$|\overline{MF_1}|\cdot|\overline{MF_2}|=a^2$$

или, в координатах,

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}\,\sqrt{(x-a)^2+y^2}=a^2.$$

Преобразуя это уравнение, приведем его к виду

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2). \tag{1}$$

Перейдем к полярным координатам, принимая за полюс точку O, а за полярную ось луч $\overrightarrow{OF_2}$. Имеем

$$x=r\cos\varphi, \qquad y=r\sin\varphi.$$

Вставляя эти значения x и y в уравнение (1), получим

$$r^4=2a^2r^2\cos 2\varphi,$$

или

$$r^2=2a^2\cos 2\varphi \tag{2}$$

(сокращая на r^2, мы не потеряли ни одной точки, так как значение $r=0$ получается при $\varphi=\frac{\pi}{4}$).

По уравнению (2) нетрудно составить себе представление о полученной кривой. Она изображена на рис. 255. Эта кривая носит название *лемнискаты Бернулли*.

Задача 65. Дана точка O и прямая d на расстоянии $|\overline{OA}| = a$ от точки O (рис. 256). Вокруг точки O вращается луч, пересекающий прямую d в переменной точке B. На этом луче по обе стороны от точки B откладываются отрезки

$$\overline{BM_1} = \overline{BM_2} = \overline{AB},$$

где A — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую d. Составить уравнение линии, описываемой точками M_1 и M_2, в полярной системе координат, принимая за полюс точку O, а за полярную ось луч $\overrightarrow{OA}$.

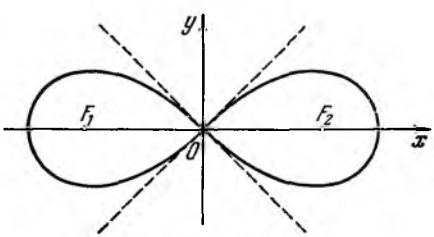


Рис. 255.

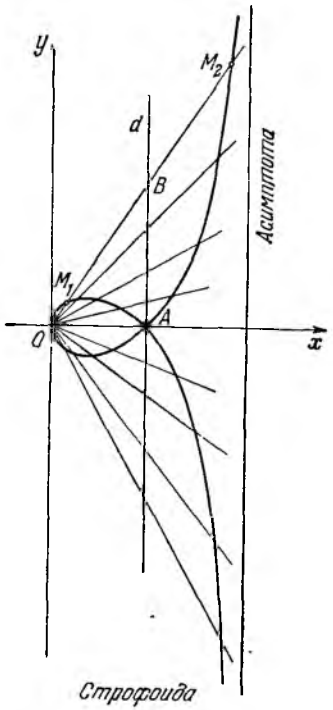


Рис. 256.

Перейти затем к декартовым координатам, взяв прямоугольную систему координат, соответствующую данной полярной системе.

Решение. Точки кривой будут получаться для значений φ, лежащих в интервале

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2};$$

пусть сначала

$$0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Обозначим через $M_1=(\varphi, r_1)$ точку луча $\overrightarrow{OB}$, ближайшую к точке O, а через $M_2=(\varphi, r_2)$ — точку, лежащую за прямой d. Тогда

$$r_1=|\overline{OM_1}|=|\overline{OB}|-|\overline{AB}|=\frac{a}{\cos\varphi}-a\operatorname{tg}\varphi=\frac{a}{\cos\varphi}(1-\sin\varphi),$$

$$r_2=|\overline{OM_2}|=|\overline{OB}|+|\overline{AB}|=\frac{a}{\cos\varphi}+a\operatorname{tg}\varphi=\frac{a}{\cos\varphi}(1+\sin\varphi).$$

Итак,

$$r_1=\frac{a}{\cos\varphi}(1-\sin\varphi), \tag{1}$$

$$r_2=\frac{a}{\cos\varphi}(1+\sin\varphi). \tag{2}$$

Оба уравнения можно объединить в одно, записав их в виде

$$r=\frac{a}{\cos\varphi}\mp a\operatorname{tg}\varphi. \tag{3}$$

При $\varphi=0$

$$r_1=r_2=a;$$

точки M_1 и M_2 совпадают с точкой A.

Когда φ возрастает, оставаясь положительным, r_1 монотонно убывает и при $\varphi\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

$$r_1\longrightarrow 0.$$

В самом деле, в равенстве

$$r_1=\frac{a}{\cos\varphi}(1-\sin\varphi)$$

умножим и разделим правую часть на $1+\sin\varphi$; тогда это равенство после упрощений примет вид

$$r_1=\frac{a\cos\varphi}{1+\sin\varphi},$$

откуда и следует, что r_1 монотонно убывает с возрастанием φ и стремится к нулю при

$$\varphi\longrightarrow\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, когда φ возрастает от нуля до $\frac{\pi}{2}$, точка M_1 описывает дугу, начинающуюся в точке A, концом которой является точка O, предельная для этой дуги, но ей не принадлежащая.

Посмотрим теперь, как ведет себя точка M_2, когда φ, оставаясь положительным, возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Из выражения для r_2 непосредственно видно, что r_2 монотонно возрастает с возрастанием φ и при $\varphi\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

$$r_2\longrightarrow\infty.$$

Выясним, не будет ли у нашей кривой асимптот. Найдем абсциссу x_2 точки M_2:

$$x_2=r_2\cos\varphi=a(1+\sin\varphi).$$

Отсюда следует, что при $\varphi \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ $x_2 \longrightarrow 2a$, т. е. что прямая

$$x = 2a$$

является вертикальной асимптотой нашей кривой.

Из выражений для r_1 и r_2 видно, что, когда φ меняется от 0 до $-\frac{\pi}{2}$, точка M_1 описывает кусок кривой, асимптотически приближающейся к прямой

$$x = 2a,$$

а точка M_2 описывает дугу, начинающуюся в точке A и имеющую точку O своей предельной точкой.

Из этих соображений можно составить себе представление о виде кривой. Она изображена на рис. 256. Эта кривая называется *строфоидой*.

Переходим к декартовым координатам. Положим

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

и подставим эти значения r, $\cos\varphi$ и $\operatorname{tg}\varphi$ в уравнение (3). Мы будем иметь

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{a\sqrt{x^2+y^2}}{x} \mp a\frac{y}{x} \tag{4}$$

или

$$\frac{x-a}{x}\sqrt{x^2+y^2} = \mp a\frac{y}{x}.$$

Возводим это равенство в квадрат:

$$\frac{(x-a)^2}{x^2}(x^2+y^2) = \frac{a^2y^2}{x^2},$$

и освобождаемся от знаменателя, умножая обе части равенства на x^2, получим

$$(x-a)^2(x^2+y^2) = a^2y^2,$$

или (после небольших преобразований)

$$(x^2+y^2)(x^2-2ax)+a^2x^2 = 0,$$

или, наконец, деля обе части равенства на x,

$$(x^2+y^2)(x-2a)+a^2x = 0. \tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) не равносильны: координаты 0, 0, не удовлетворяя уравнению (4), обращают в нуль левую часть уравнения (5). Постороннее решение получилось от умножения обеих частей уравнения на x (мы сначала умножили обе части уравнения на x^2, а потом после преобразований, не нарушающих равносильности, разделили обе части уравнения на x; возведение в квадрат обеих частей уравнения (4) посторонних решений не принесло, так как справа стоял двойной знак $\mp$).

Строфоида — кривая третьего порядка.

Задача 66. По окружности радиуса a с центром в начале прямоугольной системы координат перемещается точка C. Из этой точки опускаются перпендикуляры: CA — на ось Ox, CB — на ось Oy и CM — на прямую AB (рис. 257). Линия, описываемая точкой M при движении точки C по окружности, называется *астроидой*. Составить параметрические уравнения астроиды, принимая за параметр угол t от оси Ox до луча $\overrightarrow{OC}$.

Решение. Опустим из точки M перпендикуляры MP и MQ на оси Ox и Oy. Тогда будем иметь

$$|x| = |\overline{OP}| = |\overline{MQ}| = |\overline{BM}| \cdot |\cos t| \quad (\text{из } \triangle QBM).$$

Далее,

$$|\overline{BM}| = |\overline{BC}| \, |\cos t| \quad (\text{из } \triangle MBC),$$

и, наконец,

$$|\overline{BC}| = |\overline{OC}| \, |\cos t| = a \, |\cos t| \quad (\text{из } \triangle BOC).$$

Сопоставляя полученные равенства, найдем

$$|x| = a \, |\cos t|^3.$$

Точно так же, рассматривая последовательно треугольники PMA, MCA и AOC, найдем:

$$|y| = |\overline{MP}| = |\overline{AM}| \, |\sin t|,$$
$$|\overline{AM}| = |\overline{AC}| \, |\sin t|,$$
$$|\overline{AC}| = |\overline{OC}| \, |\sin t| = a \, |\sin t|,$$

откуда

$$|y| = a \, |\sin t|^3.$$

Так как точки C и M всегда принадлежат одной и той же четверти, то отсюда следует, что знаки x и y совпадают соответственно со знаками $\cos t$

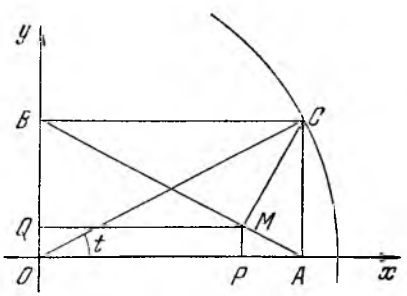


Рис. 257.

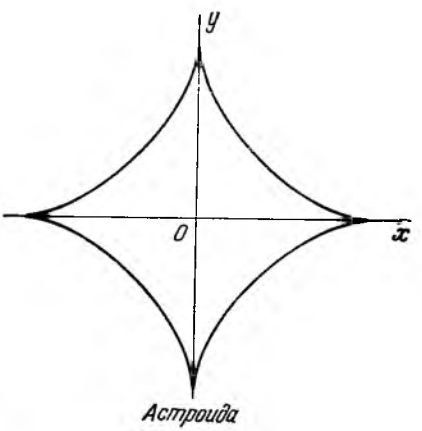


Рис. 258

и $\sin t$. Поэтому для астроиды (рис. 258) получаем следующие параметрические уравнения:

$$x = a \cos^3 t,$$
$$y = a \sin^3 t.$$

Замечание. Возводя каждое из этих равенств в степень с показателем $\frac{2}{3}$ и складывая, исключим параметр t и получим уравнение астроиды в виде

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

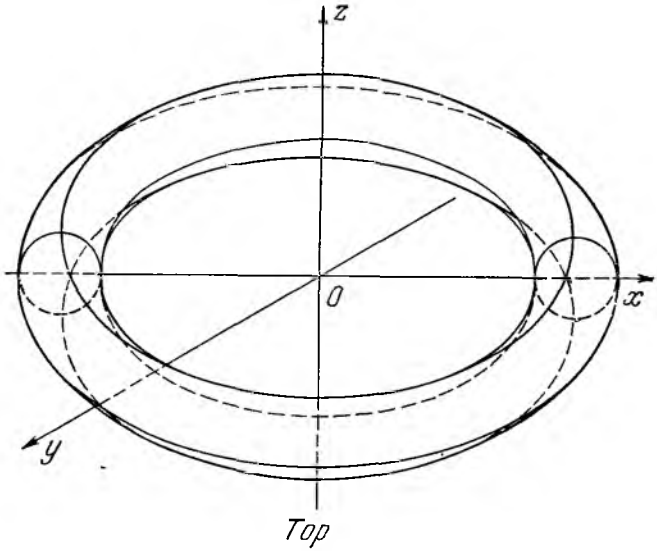
Задача 67. Написать уравнение поверхности, получающейся при вращении окружности

$$(x-a)^2+z^2=r^2, \quad y=0, \quad r<|a|$$

вокруг оси z.

Решение. Пусть $M=(x, y, z)$ — произвольная точка искомой поверхности, d — расстояние точки до оси z.

По определению поверхности вращения вместе с точкой M ей принадлежат и все точки окружности радиуса d с аппликатой z и с центром на



Top

Рис. 259.

оси z. Эта окружность пересекает плоскость xOz в двух точках $(\pm d, 0, z)$. По крайней мере одна из этих точек принадлежит линии, от вращения которой получается данная поверхность, в нашем случае — окружности

$$(x-a)^2+z^2=r^2, \quad y=0.$$

Другая точка принадлежит линии, лежащей в плоскости xOz и симметричной с данной линией относительно оси Oz. В нашем случае это будет окружность

$$(-x-a)^2+z^2=r^2, \quad y=0.$$

По определению при вращении обе линии дают одну и ту же поверхность.

Таким образом, имеют место равенства

$$(\pm d-a)^2+z^2=r^2.$$

Но

$$d=\sqrt{x^2+y^2},$$

поэтому имеем:

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2=r^2,$$
$$x^2+y^2\pm 2a\sqrt{x^2+y^2}+a^2+z^2=r^2,$$
$$\pm 2a\sqrt{x^2+y^2}=r^2-a^2-x^2-y^2-z^2.$$

После возведения в квадрат, что не приносит посторонних решений благодаря двойному знаку $\pm$, и простых преобразований получим окончательно

$$4a^2(x^2+y^2)=(x^2+y^2+z^2+a^2-r^2)^2$$

или

$$(x^2+y^2)^2+2(z^2-a^2-r^2)(x^2+y^2)+z^2+a^2-r^2)^2=0.$$

Эта поверхность называется *тором* (рис. 259).

К главам XVI и XVII

Задача 68. Найти фокусы и директрисы линии второго порядка

$$6xy-8y^2+12x-26y-11=0.$$

(Система координат прямоугольная.)

Решение. Инварианты: $S=-8$, $\delta=-9$, $\Delta=-81$. Это гипербола. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2+8\lambda-9=0, \qquad \lambda_1=-9, \quad \lambda_2=1.$$

Приведенное уравнение

$$-9X^2+Y^2+\frac{-81}{-9}=0.$$

Каноническое уравнение

$$\frac{X^2}{1}-\frac{Y^2}{9}=1, \qquad a=1, \quad b=3, \quad c=\sqrt{10}.$$

Уравнения для определения центра:

$$3y+6=0,$$
$$3x-8y-13=0.$$

Центр $O'=(-1, -2)$.

Угловой коэффициент (тангенс угла наклона) действительной оси $k_1=\operatorname{tg}\alpha=-3$;

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \sin\alpha=\mp\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Здесь верхние или нижние знаки можно выбрать произвольно; от этого будет зависеть положительное направление новой оси абсцисс, совпадающей с фокальной осью гиперболы. Возьмем, например, нижние знаки, т. е. положим

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Координаты фокусов в новой системе:

$$F_1=(\sqrt{10}, 0), \quad F_2=(-\sqrt{10}, 0).$$

Координаты фокуса в старой системе:

$$F_1=(-2,\ 1),\quad F_2=(0,\ -5).$$

Координаты точек пересечения директрис гиперболы с ее действительной осью соответственно будут в новой системе

$$D_1=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\ 0\right),\quad D_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\ 0\right);$$

в старой системе

$$D_1=\left(-\frac{11}{10},\ -\frac{17}{10}\right),\quad D_2=\left(-\frac{9}{10},\ -\frac{23}{10}\right).$$

Угловой коэффициент директрис $k_2=\frac{1}{3}$. Следовательно, уравнения директрис, соответствующих фокусам F_1 и F_2, будут

$$x-3y-4=0,\quad x-3y-6=0.$$

Задача 69. Найти фокусы и директрисы линии второго порядка

$$x^2+4xy+4y^2+8x+6y+2=0.$$

(Система координат прямоугольная.)

Решение. Инварианты: $S=5$, $\delta=0$, $\Delta=-25$. Это парабола.

Параметр $p=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Уравнение оси

$$x+2y+2=0.$$

Система уравнений для определения вершины

$$\left.\begin{aligned}x^2+4xy+4y^2+8x+6y+2=0,\\ x+2y+2=0.\end{aligned}\right\}$$

Решение системы:

$$\left.\begin{aligned}(x+2y)^2+8x+6y+2=0,\\ x+2y=-2,\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}4+8x+6y+2=0,\\ x+2y=-2,\end{aligned}\right\}$$

$$x=0,\quad y=-1.$$

Вершина $O'=(0,\ -1)$.

Угловой коэффициент (тангенс угла наклона) оси параболы $k=\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$.

Определение направления луча оси, идущего внутри параболы:

$$\cos\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin\alpha=\mp\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Из условия $(a_1\cos\alpha+a_2\sin\alpha)S<0$ находим

$$\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Координаты фокуса в новой системе

$$F=\left(\frac{1}{2\sqrt{5}},\ 0\right).$$

Координаты фокуса в старой системе

$$F=\left(-\frac{1}{5},\ -\frac{9}{10}\right).$$

Точка пересечения директрисы с осью параболы в новой системе

$$D=\left(-\frac{1}{2\sqrt{5}},\ 0\right);$$

в старой системе

$$D=\left(\frac{1}{5},\ -\frac{11}{10}\right).$$

Угловой коэффициент директрисы $k'=2$. Уравнение директрисы

$$4x-2y-3=0.$$

Задача 70. Общее уравнение второй степени с двумя неизвестными

$$F(x, y)=0$$

определяет эллипс. Написать уравнение эллипса, гомотетичного данному, с центром гомотетии в центре эллипса и с коэффициентом гомотетии k. (Система координат аффинная.)

Решение. Уравнение искомого эллипса может быть записано в виде

$$F(x, y)+C=0.$$

В самом деле, если это уравнение определяет эллипс, то его центр и направления осей те же, что и у данного эллипса, так как они не зависят от свободного члена. Этот эллипс гомотетичен данному, так как отношение квадратов их полуосей одно и то же, а именно:

$$\frac{a'^2}{a^2}=\frac{b'^2}{b^2}=\frac{\Delta'}{\Delta},$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix},\quad \Delta'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0+C \end{vmatrix}=\Delta+C\delta.$$

Подберем теперь C так, чтобы отношение квадратов соответственных полуосей равнялось k^2,

$$\frac{a'^2}{a^2}=\frac{b'^2}{b^2}=\frac{\Delta'}{\Delta}=\frac{\Delta+C\delta}{\Delta}=1+C\frac{\delta}{\Delta}=k^2,$$

откуда

$$C=(k^2-1)\frac{\Delta}{\delta}.$$

Поэтому уравнение искомого эллипса будет

$$F(x, y)+(k^2-1)\frac{\Delta}{\delta}=0.$$

Задача 71. Доказать, что все ромбы, вписанные в один и тот же эллипс, описаны около одной окружности.

Решение. Диагонали ромба, вписанного в эллипс, проходят через его центр. Следовательно, центр окружности, вписанной в ромб, совпадает с центром эллипса, описанного около этого ромба. Остается показать, что, каков бы ни был ромб, вписанный в данный эллипс, радиус вписанной в ромб окружности будет один и тот же.

Примем диагонали ромба, вписанного в эллипс, за оси прямоугольной системы координат. В этой системе уравнение эллипса будет иметь вид

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=1, \quad a_{11}>0, \quad a_{22}>0.$$

Вершинами ромба будут точки пересечения эллипса с осями координат, следовательно, они имеют координаты

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}, 0\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\right).$$

Уравнения сторон ромба будут

$$\sqrt{a_{11}}x+\sqrt{a_{22}}y=1, \quad -\sqrt{a_{11}}x+\sqrt{a_{22}}y=1,$$
$$-\sqrt{a_{11}}x-\sqrt{a_{22}}y=1, \quad \sqrt{a_{11}}x-\sqrt{a_{22}}y=1.$$

Расстояние r от центра эллипса до всех сторон ромба будет одно и то же, а именно:

$$r=\frac{1}{\sqrt{a_{11}+a_{22}}}=\frac{1}{\sqrt{S}}.$$

Отсюда видно, что радиус r не зависит от выбора ромба, так как он является инвариантом эллипса относительно поворота прямоугольных осей.

Задача 72. Общее уравнение второй степени с двумя неизвестными

$$F(x, y)=0 \tag{1}$$

определяет гиперболу. Написать уравнение пары ее асимптот. (Система координат аффинная.)

Решение. Напишем уравнение искомой линии в виде

$$F(x, y)+C=0 \tag{1'}$$

и подберем C так, чтобы это уравнение определяло линию, распадающуюся на пару прямых. Для этого нужно, чтобы детерминант Δ', составленный из всех коэффициентов уравнения линии (1'), был равен нулю:

$$\Delta'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0+C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}+C\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\Delta+C\delta=0,$$

откуда $C=-\frac{\Delta}{\delta}$. Искомое уравнение принимает вид

$$F(x, y)=\frac{\Delta}{\delta}.$$

Это — уравнение пары прямых, являющихся асимптотами гиперболы, так как точка их пересечения совпадает с центром гиперболы и прямые имеют асимптотические направления относительно этой гиперболы.

Задача 73. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы ветви гиперболы лежали в острых углах, образуемых ее асимптотами. (Система координат прямоугольная.)

Решение. Следующие утверждения (1) — (8) эквивалентны между собой:
(1) ветви гиперболы лежат в острых углах, образуемых ее асимптотами;
(2) острый угол α между действительной осью гиперболы и ее асимптотой меньше $\frac{\pi}{4}$;

(3) $\operatorname{tg}\alpha < 1$;

(4) $\frac{b}{a} < 1$;

(5) $\frac{b^2}{a^2} < 1$;

но

$$a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 \delta}, \quad b^2 = \frac{\Delta}{\lambda_2 \delta},$$

где

$$\lambda_1 \Delta > 0, \qquad \lambda_2 \Delta < 0;$$

(6) $-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 1$;

(7) $\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2} > 0$;

но

$$\lambda_1 + \lambda_2 = S, \qquad \lambda_2 \Delta < 0;$$

поэтому

(8) $S\Delta < 0$.

Это и есть искомое условие.

Задача 74. Доказать, что если в уравнениях парабол все коэффициенты, кроме свободных членов, пропорциональны, то эти параболы имеют общую ось и получаются одна из другой параллельным переносом по направлению их общей оси.

Доказательство. Параметры у всех таких парабол одинаковы, так как в формуле, по которой определяется параметр

$$p = \sqrt{\frac{-\Delta}{S^3}},$$

правая часть не зависит от свободного члена a_0, в чем можно убедиться, разлагая определитель Δ по третьей строке и принимая во внимание, что алгебраическое дополнение элемента a_0 есть определитель δ, равный нулю.

Уравнение оси параболы, а также условие, определяющее направление луча оси, идущего внутри параболы, от a_0 не зависит.

Задача 75. Доказать, что если из точки M проведены две касательные к линии второго порядка, то диаметр, проходящий через точку M, делит пополам хорду, соединяющую точки касания.

Доказательство. Примем диаметр, проходящий через точку M, за ось абсцисс, а какую-нибудь прямую сопряженного к нему направления — за ось ординат. Уравнение линии в этой системе будет иметь вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + a_0 = 0,$$
$$a_{22} \neq 0.$$

Пусть x_0 — абсцисса точки M в этой системе координат. Обозначая через ξ и η координаты точек касания касательных, проведенных из точки M, можем уравнения этих касательных записать в виде

$$(a_{11}\xi + a_1)\,x + a_{22}\,\eta\,y + a_1\xi + a_0 = 0.$$

Так как точка $M = (x_0, 0)$ принадлежит этим касательным, то

$$(a_{11}\xi + a_1)\,x_0 + a_1\xi + a_0 = 0,$$

откуда

$$\xi = -\frac{a_1x_0 + a_0}{a_{11}x_0 + a_1}.$$

Чтобы найти ординаты точек касания, нужно полученное значение абсцисс ξ вставить в уравнение линии. Так как это уравнение содержит только квадрат ординаты, то значения ординат точек касания равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Поэтому, если A и B — точки касания, то $A = (\xi, \eta)$, $B = (\xi, -\eta)$. Середина C отрезка $\overline{AB}$ имеет координаты ξ, 0, т. е. лежит на диаметре, проходящем через точку M.

Задача 76. Найти геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что две касательные, проведенные из точки геометрического места к действительной нераспадающейся линии второго порядка, не являющейся окружностью, равны между собой.

Решение. Пусть M — точка искомого геометрического места, A и B — точки касания касательных, проведенных из точки M к линии второго порядка, C — середина отрезка $\overline{AB}$. Прямая MC является диаметром линии второго порядка, а так как по условию

$$\overline{MA} = \overline{MB},$$

то диаметр MC перпендикулярен к сопряженной ему хорде $\overline{AB}$; следовательно, этот диаметр — ось симметрии кривой.

Итак, точки искомого геометрического места лежат на осях симметрии линии. В случае эллипса искомое геометрическое место состоит из четырех лучей, являющихся продолжениями осей эллипса за его вершины; в случае гиперболы это геометрическое место состоит из точек отрезка действительной оси, заключенного между ее вершинами, и всех точек мнимой оси, за исключением центра; в случае параболы это луч оси симметрии, лежащий вне параболы.

Задача 77. Доказать, что диагонали параллелограмма, описанного около эллипса, являются сопряженными диаметрами этого эллипса.

Доказательство. Преобразуем аффинно эллипс в окружность. Тогда описанный около эллипса параллелограмм преобразуется в ромб, описанный около окружности. Диагонали этого ромба, будучи взаимно перпендикулярными диаметрами окружности, при обратном аффинном преобразовании перейдут в сопряженные диаметры эллипса, являющиеся диагоналями описанного около него параллелограмма.

Задача 78. Доказать, что гипотенузы всех прямоугольных треугольников с общей вершиной прямых углов, вписанных в кривую второго порядка, проходят через одну и ту же точку, лежащую на нормали [1]) к кривой в точке, являющейся общей вершиной прямых углов.

Доказательство. Примем точку кривой, в которой находятся вершины прямых углов вписанных в нее прямоугольных треугольников, за начало координат, нормаль к кривой в этой точке — за ось абсцисс, а касательную в ней — за ось ординат. В этой системе уравнение кривой будет иметь вид

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x=0, \qquad (1)$$
$$a_{22}\neq 0,$$

а уравнение линии, распадающейся на пару прямых, являющихся катетами вписанного в кривую прямоугольного треугольника с вершиной прямого угла в начале координат, может быть записано в виде

$$x^2+2bxy-y^2=0\ ^2). \qquad (2)$$

Умножая уравнение (2) на a_{22} и складывая с (1), получим

$$(a_{11}+a_{22})\,x^2+2\,(a_{12}+ba_{22})\,xy+2a_1x=0,$$

или

$$x\,[(a_{11}+a_{22})\,x+2\,(a_{12}+ba_{22})\,y+2a_1]=0. \qquad (3)$$

Так как уравнение (3) получено как линейная комбинация уравнений (1) и (2), то всякое решение системы, состоящей из уравнений (1) и (2), будет решением и уравнения (3). Но это означает, что линии, определяемой урав-

---

[1]) Нормалью к кривой в лежащей на ней точке называется прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная к касательной кривой в рассматриваемой точке.

[2]) В самом деле, уравнения катетов всегда могут быть записаны в виде

$$y=k_1x, \qquad y=k_2x,$$

так как $k_1\neq 0$, $k_2\neq 0$; уравнение линии, распадающейся на эти прямые, поэтому будет

$$(y-k_1x)\,(y-k_2x)=0, \quad \text{или} \quad y^2-(k_1+k_2)\,xy-x^2=0,$$

так как $k_1k_2=-1$. Умножая это уравнение на -1 и полагая $k_1+k_2=2b$, получим уравнение (2).

нением (3), принадлежат все три вершины вписанного в кривую (1) прямоугольного треугольника с вершиной прямого угла в начале координат.

Линия (3) распадается на пару прямых: прямую $x=0$, т. е. касательную к кривой в начале координат, и прямую

$$(a_{11}+a_{22})\,x+2\,(a_{12}+ba_{22})\,y+2a_1=0,$$

являющуюся, гипотенузой прямоугольного треугольника.

Точка пересечения этой прямой с осью абсцисс имеет абсциссу

$$x=-\frac{2a_1}{a_{11}+a_{22}},$$

не зависящую от b, т. е. от выбора пары прямых, являющихся катетами. Следовательно, гипотенузы всех рассматриваемых треугольников проходят через одну и ту же точку, лежащую на нормали к кривой в общей вершине прямых углов.

К главе XVIII

Задача 79. Дан эллипсоид

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$$

и плоскость

$$2x+2y+z-3=0.$$

1) Выяснить, пересекает ли плоскость эллипсоид.

2) Найти центр линии пересечения.

Решение. Первый способ. 1) Найдем уравнение цилиндра, проектирующего линию пересечения эллипсоида и плоскости на плоскость xOy. Для этого исключим z из уравнений эллипсоида и плоскости. Сделаем это следующим образом: найдем z из уравнения плоскости и подставим полученное выражение для z в уравнение эллипсоида:

$$z=3-2x-2y,$$

$$x^2+y^2+\frac{(3-2x-2y)^2}{4}=1$$

или, после преобразований,

$$8x^2+8xy+8y^2-12x-12y+5=0.$$

Это и есть уравнение цилиндра, проектирующего линию пересечения эллипсоида и плоскости на плоскость xOy. Вместе с уравнением $z=0$ оно определяет проекцию линии пересечения на плоскость xOy. Так как проектирование есть аффинное отображение, то линия пересечения эллипсоида и плоскости и ее проекция на плоскость xOy относятся к одному и тому же аффинному классу. Определим аффинный класс проекций. Имеем:

$$S=16,\ \delta=48,\ \Delta=-48.$$

Проекция — эллипс; значит, плоскость пересекает эллипсоид по эллипсу.

2) *При проектировании* центр сечения проектируется в центр проекции. Найдем центр проекции. Имеем:

$$8x+4y-6=0,$$
$$4x+8y-6=0,$$

центр проекции $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Так как проектирование производится параллельно оси z, то первые две координаты у центра проекции те же, что и у центра сечения. Чтобы найти третью координату центра сечения, подставим в уравнение плоскости координаты центра проекции $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$; тогда найдем, что $z=1$. Итак, центр сечения $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

Замечание. Этим же способом решается следующая задача: 1) установить, по какой линии данная плоскость пересекает данную поверхность второго порядка; 2) если в сечении получается центральная линия, найти координаты ее центра.

Второй способ. 1) Рассмотрим аффинное преобразование

$$x'=x,$$
$$y'=y,$$
$$z'=\frac{z}{2}.$$

Это преобразование переводит эллипсоид в сферу

$$x'^2+y'^2+z'^2=1,$$

а данную плоскость — в плоскость

$$2x'+2y'+2z'-3=0.$$

Так как расстояние от центра сферы до преобразованной плоскости равное $\frac{3}{\sqrt{12}}<1$, то преобразованная плоскость пересекает сферу по окружности. Следовательно, данная плоскость пересекает данный эллипсоид по эллипсу.

2) Найдем основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на преобразованную плоскость. Уравнения этого перпендикуляра будут

$$x=y=z.$$

Следовательно, основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на преобразованную плоскость, имеет координаты

$$x'=\frac{1}{2},\ y'=\frac{1}{2},\ z'=\frac{1}{2}.$$

Это и есть центр сечения сферы плоскостью.

Производя обратное аффинное преобразование

$$x=x',$$
$$y=y',$$
$$z=2z',$$

найдем координаты центра линии пересечения эллипсоида и плоскости:

$$x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2},\ z=1.$$

Задача 80. Доказать, что если p и q — большая и малая полуоси эллипса, получающегося в сечении эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad a\geqslant b\geqslant c$$

плоскостью α, проходящей через его центр, то всегда имеют место неравенства

$$a\geqslant p\geqslant b\geqslant q\geqslant c.$$

Доказательство. Заменяя в левой части уравнения эллипсоида все знаменатели дробей на наибольший из них a^2, получим неравенство

$$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,$$

а при замене всех знаменателей наименьшим из них c^2 приходим к неравенству

$$x^2+y^2+z^2\geqslant c^2.$$

Из этих неравенств вытекает, что a есть наибольшее, а c — наименьшее из расстояний от точек эллипсоида до его центра и, в частности, что

$$a\geqslant p\geqslant q\geqslant c.$$

Остается показать, что

$$p\geqslant b\geqslant q.$$

Обозначим через r длину отрезка прямой пересечения плоскости α с плоскостью xOy, заключенного между эллипсоидом и его центром, а через s длину отрезка прямой пересечения плоскости α с плоскостью yOz, заключенный между эллипсоидом и его центром. На основании задачи 24 из рассмотрения сечения эллипсоида плоскостью xOy заключаем, что $r\geqslant b$, а применяя тот же результат к эллипсу, получающемуся в сечении эллипсоида плоскостью α, находим, что $p\geqslant r$, следовательно, $p\geqslant b$.

Точно так же, применяя задачу 24 сначала к сечению эллипсоида плоскостью yOz, а затем плоскостью α, находим последовательно $b\geqslant s$, $s\geqslant q$, откуда выводим, что $b\geqslant q$.

Задача 81. Доказать, что через центр трехосного эллипсоида [1]) проходят две и только две плоскости, пересекающие его по окружностям.

Доказательство. Пусть

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

— уравнение эллипсоида, причем

$$a>b>c. \tag{2}$$

На основании предыдущей задачи можно утверждать, что если существует плоскость, проходящая через центр эллипсоида (1) и пересекающая его по окружности, то радиус этой окружности равен b.

Рассмотрим сферу

$$x^2+y^2+z^2=b^2$$

[1]) Эллипсоид называется трехосным, если длины его полуосей попарно различны.

и перепишем ее уравнение в виде

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1. \tag{3}$$

Вычитая из уравнения (3) уравнение (1), получим уравнение

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x^2-\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)z^2=0. \tag{4}$$

В силу неравенств (2)

$$\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}>0, \quad \frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}>0;$$

поэтому можно положить

$$\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}=A^2, \quad \frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}=C^2.$$

Тогда уравнение (4) принимает вид

$$A^2x^2-C^2z^2=0,$$

следовательно, оно определяет пару плоскостей:

$$Ax+Cz=0, \quad Ax-Cz=0. \tag{5}$$

Точки пересечения эллипсоида и сферы, координаты которых удовлетворяют одновременно уравнениям (1) и (3), принадлежат плоскостям (4), так как уравнение (4) есть линейная комбинация (1) и (3). Но эти плоскости, проходя через центр сферы, пересекают ее по окружности радиуса b. Таким образом, у эллипсоида имеется два круговых сечения, проходящих через его среднюю ось, радиус которых равен средней полуоси.

Задача 82. Написать уравнение конуса, вершина которого находится в точке $S=(0, 0, p)$, а направляющей служит парабола

$$y^2=2px, \quad z=0.$$

Пользуясь преобразованием координат, привести полученные уравнения к каноническому виду. (Система координат прямоугольная.)

Решение. Пусть $M=(x, y, z)$ — произвольная точка поверхности конуса и $A=(x_1, y_1, z_1)$ — такая точка направляющей, что точка M принадлежит образующей SA. Следовательно, координаты точки A удовлетворяют уравнениям направляющей

$$y_1^2=2px_1, \quad z_1=0,$$

а координаты точки M — уравнениям образующей SA

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z-p}{-p}.$$

Из трех соотношений

$$y_1^2=2px_1, \tag{1}$$

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z-p}{-p} \tag{2}$$

исключим два переменных x_1 и y_1.

Для этого выразим x_1 и y_1 из соотношений (2) и подставим найденные для них выражения в соотношение (1):

$$x_1 = \frac{-px}{z-p}, \quad y_1 = \frac{-py}{z-p},$$

$$\frac{p^2y^2}{(z-p)^2} = \frac{-2p^2x}{z-p}$$

или

$$\frac{y^2}{(z-p)^2} = \frac{-2x}{z-p}, \tag{3}$$

откуда

$$y^2 + 2x(z-p) = 0. \tag{4}$$

(Заметим, что уравнения (3) и (4) не равносильны: наряду с точками, удовлетворяющими уравнению (3), полученному непосредственно из условия задачи, уравнению (4) удовлетворяют еще точки прямой

$$y = 0, \quad z = p,$$

не получающиеся из условия задачи.)

Итак, уравнение искомого конуса имеет вид

$$y^2 + 2x(z-p) = 0.$$

Перенеся начало координат в вершину конуса, приведем его уравнение к виду

$$y'^2 + 2x'z' = 0. \tag{5}$$

Применим к последнему уравнению формулы поворота системы координат вокруг оси Sy' на угол $\frac{\pi}{4}$:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'' = \frac{x''-z''}{\sqrt{2}}, \\ y' &= y'', \\ z' &= \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'' = \frac{x''+z''}{\sqrt{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Вставляя в уравнение (5) вместо x', y', z' их значения из формул (6), получим каноническое уравнение конуса

$$x''^2 + y''^2 - z''^2 = 0.$$

Задача 83. Найти направляющие векторы прямолинейных образующих однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

проходящих через точку гиперболоида (x_0, y_0, z_0).

Решение. Пусть $\{l, m, n\}$ — координаты искомых направляющих векторов. Тогда параметрические уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точку (x_0, y_0, z_0), будут

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt.$$

Так как каждая точка образующей принадлежит гиперболоиду, то, вставляя в его уравнение вместо x, y, z их выражения из параметрических уравнений образующей, получим равенство, справедливое при всех значениях t:

$$\frac{(x_0+lt)^2}{a^2}+\frac{(y_0+mt)^2}{b^2}-\frac{(z_0+nt)^2}{c^2}=1$$

или, раскрывая скобки и принимая во внимание, что точка (x_0, y_0, z_0) принадлежит гиперболоиду, т. е. что

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1,$$

будем иметь

$$\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}\right)t^2+2\left(\frac{lx_0}{a^2}+\frac{my_0}{b^2}-\frac{nz_0}{c^2}\right)t=0.$$

Последнее равенство справедливо при всех значениях t, что возможно лишь, когда оба коэффициента (при t^2 и при t) равны нулю:

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}=0,$$

$$\frac{lx_0}{a^2}+\frac{my_0}{b^2}-\frac{nz_0}{c^2}=0.$$

Так как прямая, параллельная плоскости xy, пересекает гиперболоид не более чем в двух точках, то для всякой прямолинейной образующей $n\neq 0$, и поэтому можно всегда положить

$$n=c.$$

Тогда получим два уравнения для определения двух оставшихся координат l и m искомого вектора:

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{lx_0}{a^2}+\frac{my_0}{b^2}=\frac{z_0}{c}.$$

Для решения этой системы подвергнем гиперболоид аффинному преобразованию

$$X=\frac{x}{a}, \quad Y=\frac{y}{b}, \quad Z=\frac{z}{c}$$

и введем обозначения:

$$X_0=\frac{x_0}{a}, \quad Y_0=\frac{y_0}{b}, \quad Z_0=\frac{z_0}{c}, \tag{1}$$

$$L=\frac{l}{a}, \quad M=\frac{m}{b}, \quad N=\frac{n}{c}. \tag{2}$$

Тогда получим следующие уравнения для определения L и M:

$$L^2+M^2=1,$$

$$LX_0+MY_0=Z_0$$

и, кроме того, для координат X_0, Y_0 будем иметь равенство

$$X_0^2+Y_0^2-Z_0^2=1.$$

Далее, воспользуемся тождеством

$$(LX_0+MY_0)^2+\begin{vmatrix} L & M \\ X_0 & Y_0 \end{vmatrix}^2=(L^2+M^2)(X_0^2+Y_0^2)\ ^1).$$

Но так как

$$LX_0+MY_0=Z_0,\quad L^2+M^2=1,\quad X_0^2+Y_0^2=1+Z_0^2,$$

то из последнего тождества получаем

$$Z_0^2+\begin{vmatrix} L & M \\ X_0 & Y_0 \end{vmatrix}^2=1+Z_0^2,$$

откуда

$$\begin{vmatrix} L & M \\ X_0 & Y_0 \end{vmatrix}=\pm 1.$$

Вместе с уравнением

$$LX_0+MY_0=Z_0$$

полученное равенство дает следующую систему уравнений для определения L и M:

$$Y_0L-X_0M=\pm 1,$$

$$X_0L+Y_0M=Z_0.$$

Решая ее, найдем

$$L=\frac{X_0Z_0\pm Y_0}{X_0^2+Y_0^2},\quad M=\frac{Y_0Z_0\mp X_0}{X_0^2+Y_0^2}.$$

---

[1]) Это тождество можно доказать, например, так: если $\{L, M\}$ и $\{X_0, Y_0\}$ — два вектора, образующие угол α, то

$$\cos^2\alpha=\frac{(LX_0+MY_0)^2}{(L^2+M^2)(X_0^2+Y_0^2)},\quad \sin^2\alpha=\frac{\begin{vmatrix} L & M \\ X_0 & Y_0 \end{vmatrix}^2}{(L^2+M^2)(X_0^2+Y_0^2)},$$

но $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, поэтому

$$\frac{(LX_0+MY_0)^2}{(L^2+M^2)(X_0^2+Y_0^2)}+\frac{\begin{vmatrix} L & M \\ X_0 & Y_0 \end{vmatrix}^2}{(L^2+M^2)(X_0^2+Y_0^2)}=1,$$

или

$$(LX_0+MY_0)^2+\begin{vmatrix} L & M \\ X_0 & Y_0 \end{vmatrix}^2=(L^2+M^2)(X_0^2+Y_0^2).$$

Вставляя в эти равенства вместо X_0, Y_0, Z_0, L, M их значения из равенств (1), (2), получим

$$\frac{l}{a}=\frac{\frac{x_0}{a}\frac{z_0}{c}\pm\frac{y_0}{b}}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}},\qquad \frac{m}{b}=\frac{\frac{y_0}{b}\frac{z_0}{c}\mp\frac{x_0}{a}}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}},$$

откуда получим окончательно выражения для координат направляющих векторов образующих, проходящих через точку (x_0, y_0, z_0) гиперболоида:

$$l=a\frac{\frac{x_0}{a}\frac{z_0}{c}\pm\frac{y_0}{b}}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}},\quad m=b\frac{\frac{y_0}{b}\frac{z_0}{c}\mp\frac{x_0}{a}}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}},\quad n=c.$$

Задача 84. Доказать, что параболоид вращения и круглый цилиндр, оси которых параллельны, пересекаются по эллипсу. Большая ось этого эллипса лежит в плоскости, проходящей через оси цилиндра и параболоида, малая его ось перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство. Принимая за начало прямоугольной системы координат вершину параболоида, за ось z — ось параболоида, а за плоскость xz — плоскость, проходящую через оси обеих поверхностей, мы можем уравнения параболоида и цилиндра написать соответственно в виде

$$x^2+y^2=2pz,\quad (x-a)^2+y^2=r^2.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$2ax-2pz-a^2+r^2=0.$$

Это уравнение определяет плоскость, в которой лежат точки пересечения параболоида и цилиндра. Так как плоскость, не параллельная оси круглого цилиндра, пересекает его по эллипсу, то, значит, и линия пересечения рассматриваемых параболоида и цилиндра есть эллипс.

Проекция этого эллипса на плоскость xy, есть окружность; плоскость, в которой лежит эллипс, параллельна оси y (это непосредственно следует из отсутствия в уравнении плоскости члена, содержащего y). Следовательно, линия пересечения плоскости эллипса и плоскости окружности, являющейся его проекцией, параллельна оси y. А так как малая ось эллипса параллельна линии пересечения секущей плоскости и плоскости, ортогональной к образующим цилиндра, то в рассматриваемом случае малая ось эллипса параллельна оси y.

Плоскость xz является плоскостью симметрии цилиндра, а плоскость, в которой лежит эллипс, к ней перпендикулярна, следовательно, в нашем случае большая ось эллипса лежит в плоскости xz. Но плоскость xz проходит через оси параболоида и цилиндра.

Таким образом, доказано, что большая ось эллипса лежит в плоскости, проходящей через оси параболоида и цилиндра, а малая его ось перпендикулярна к этой плоскости.

К главам XIX и XX

Задача 85. Дана поверхность второго порядка

$$x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+18=0.$$

Определить вид этой поверхности, доказать, что она является поверхностью вращения, написать ее каноническое уравнение и найти ось вращения. (Система координат прямоугольная.)

Решение. Имеем

$$\delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix}=54,$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & -7 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 & 7 \\ -7 & -2 & 7 & 18 \end{vmatrix}=108.$$

Поверхность невырожденная центральная.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

или

$$\lambda^3-27\lambda-54=0.$$

Так как $\Delta>0$ и среди корней характеристического уравнения имеются как положительные, так и отрицательные (согласно правилу Декарта один корень положительный и два отрицательных), то поверхность — однополостный гиперболоид.

Для того чтобы поверхность второго порядка была поверхностью вращения, необходимо и достаточно, чтобы ее характеристическое уравнение имело кратный корень, для чего в свою очередь необходимо и достаточно, чтобы корень характеристического многочлена был в то же время и корнем его производной. Производная характеристического многочлена

$$3\lambda^2-27.$$

Корни производной ± 3. Подвергаем проверке только корень -3, так как у характеристического многочлена только один положительный корень. Действительно,

$$\lambda=-3$$

оказывается корнем характеристического многочлена, поэтому можно положить

$$\lambda_1=\lambda_2=-3;$$

по теореме Виетта найдем, что $\lambda_3=6$.

Приведенное уравнение поверхности

$$-3x'^2-3y'^2+6z'^2+\frac{108}{54}=0.$$

Каноническое уравнение поверхности

$$\frac{x'^2}{\frac{2}{3}}+\frac{y'^2}{\frac{2}{3}}-\frac{z'^2}{\frac{1}{3}}=1.$$

Уравнения для определения центра

$$\begin{aligned} x+2y-4z-7&=0,\\ 2x-2y-2z-2&=0,\\ -4x-2y+z+7&=0. \end{aligned}$$

Центр $O'=(1,\ 1,\ -1)$.

Направляющий вектор оси вращения — собственный вектор, соответствующий простому корню $\lambda_3=6$. Уравнения для определения координат направляющего вектора оси вращения:

$$\begin{aligned} -5\alpha+2\beta-4\gamma&=0,\\ 2\alpha-8\beta-2\gamma&=0,\\ -4\alpha-2\beta-5\gamma&=0, \end{aligned}$$

откуда находим направляющие косинусы оси вращения:

$$\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}$$

или

$$-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}.$$

Уравнение оси вращения

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-2}.$$

Задача 86. Пользуясь методом Лагранжа, доказать, что поверхность второго порядка

$$2x^2+12xy+16y^2+5xz+12yz+2z^2+x+4y+2z=0$$

распадается на пару плоскостей, и найти эти плоскости.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения поверхности:

$$\begin{aligned} &2x^2+12xy+5xz+x+\\ &\quad+16y^2+12yz+4y+\\ &\qquad+2z^2+2z=\\ &=\frac{1}{2}\left(2x+6y+\frac{5}{2}z+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(6y+\frac{5}{2}z+\frac{1}{2}\right)^2+16y^2+12yz+4y+2z^2+\\ &\quad+2z=\frac{1}{2}\left(2x+6y+\frac{5}{2}z+\frac{1}{2}\right)^2-2y^2-3yz+y-\frac{9}{8}z^2+\frac{3}{4}z-\frac{1}{8}=\\ &\qquad=\frac{1}{2}\left(2x+6y+\frac{5}{2}z+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(-2y-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}\right)^2+\\ &\quad+\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{8}z^2+\frac{3}{4}z-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\left(2x+6y+\frac{5}{2}z+\frac{1}{2}\right)^2-\\ &-\frac{1}{2}\left(-2y-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\left[\left(2x+6y+\frac{5}{2}z+\frac{1}{2}\right)+\left(-2y-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}\right)\right]\times\\ &\qquad\times\left[\left(2x+6y+\frac{5}{2}z+\frac{1}{2}\right)-\left(-2y-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}\right)\right]=\\ &\qquad\qquad=\frac{1}{2}(2x+4y+z+1)(2x+8y+4z). \end{aligned}$$

Таким образом, данная поверхность второго порядка распадается на две плоскости:

$$2x+4y+z+1=0,$$
$$x+4y+2z=0.$$

Задача 87. Составить уравнение поверхности второго порядка, пересекающей плоскость Oxy по параболе, а плоскости Oxz и Oyz по окружностям радиуса r, касающимся положительных полуосей координат. Пользуясь преобразованием координат, привести полученное уравнение к каноническому виду. (Система координат прямоугольная.)

Решение. Пусть

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0 \quad (1)$$

— уравнение искомой поверхности.

Линия ее пересечения с плоскостью yOz определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x&=0,\\ a_{22}y^2+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_2y+2a_3z+a_0&=0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

По условию эта линия есть окружность

$$\left.\begin{aligned} x&=0,\\ y^2+z^2-2ry-2rz+r^2&=0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

По теореме единственности для линий второго порядка коэффициенты уравнений (2) пропорциональны соответствующим коэффициентам уравнений (3), т. е.

$$a_{22}=\lambda,\quad a_{23}=0,\quad a_{33}=\lambda,\quad a_2=-\lambda r,\quad a_3=-\lambda r,\quad a_0=\lambda r^2.$$

Точно так же, рассматривая сечение поверхности плоскостью xOz, получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y&=0,\\ a_{11}x^2+2a_{13}xz+a_{33}z^2+2a_1x+2a_3z+a_0&=0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Эта линия есть окружность

$$\left.\begin{aligned} y&=0,\\ x^2+z^2-2rx-2rz+r^2&=0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Системы (4) и (5) определяют одну и ту же линию, поэтому

$$a_{11}=\mu,\quad a_{33}=\mu,\quad a_{13}=0,\quad a_1=-r\mu,\quad a_3=-\mu r,\quad a_0=\mu r^2.$$

Так как $a_{33}=\lambda$ и $a_{33}=\mu$, то $\mu=\lambda$, и потому уравнение (1) можно написать теперь в виде

$$\lambda x^2+2a_{12}xy+\lambda y^2+\lambda z^2-2r\lambda x-2r\lambda y-2r\lambda z+\lambda r^2=0,$$

или, деля на λ и полагая

$$\frac{a_{12}}{\lambda}=b,$$

получим

$$x^2+2bxy+y^2+z^2-2rx-2ry-2rz+r^2=0. \tag{6}$$

Линия пересечения этой поверхности с плоскостью xOy будет

$$\left.\begin{aligned} z&=0,\\ x^2+2bxy+y^2-2rx-2ry+r^2&=0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Так как по условию эта линия есть парабола, то детерминант, составленный из коэффициентов старших членов ее уравнения, должен быть равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{vmatrix}=0,$$

откуда

$$b=\pm 1.$$

При $b=+1$ система (7) определяет пару слившихся прямых; при $b=-1$ — параболу. Таким образом, годится лишь значение $b=-1$. При $b=-1$ уравнение (6) принимает вид

$$x^2+2xy+y^2+z^2-2rx-2ry-2rz+r^2=0. \tag{8}$$

Приведем полученное уравнение к каноническому виду. Для этого перепишем уравнение (8) в виде

$$(x-y)^2-2r(x+y)+(z-r)^2=0. \tag{9}$$

Положим

$$x'=\frac{x-y}{\sqrt{2}},$$

$$y'=\frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

$$z'=z.$$

Тогда уравнение (9) примет вид

$$2x'^2+z'^2=2ry'\sqrt{2}$$

или

$$\frac{x'^2}{\frac{r}{\sqrt{2}}}+\frac{z'^2}{r\sqrt{2}}=2y'$$

— эллиптический параболоид.

Задача 88. Доказать, что плоскость, проходящая через две образующие конуса, является диаметральной плоскостью этого конуса, сопряженной хордам, параллельным линии пересечения плоскостей, касающихся конуса вдоль этих образующих.

Решение. Примем образующие конуса, о которых идет речь в условии задачи, за оси Ox и Oy, а линию пересечения плоскостей, касающихся конуса вдоль этих образующих, — за ось Oz. Пусть

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2=0 \tag{1}$$

— уравнение конуса в этой системе координат. Уравнение плоскости,

касательной к конусу в точке (x_0, y_0, z_0), отличной от вершины, имеет вид

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0)\,x+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0)\,y+$$
$$+(a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0)\,z=0. \qquad (2)$$

Плоскость xOz можно рассматривать как касательную плоскость к конусу, проведенную в точке (1, 0, 0). С одной стороны, в силу (2) ее уравнение будет

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0,$$

а с другой стороны, уравнение этой плоскости

$$y=0,$$

откуда следует, что

$$a_{11}=a_{13}=0, \quad a_{12}\neq 0.$$

Точно так же, принимая во внимание, что плоскость yOz есть касательная плоскость к конусу, найдем

$$a_{22}=a_{23}=0, \quad a_{12}\neq 0.$$

Таким образом, уравнение конуса в нашей системе координат имеет вид

$$2a_{12}xy+a_{33}z^2=0.$$

Отсюда следует, что всякая прямая, параллельная оси Oz, пересекает конус в двух точках (x_0, y_0, z_0) и $(x_0, y_0, -z_0)$, т. е. что плоскость xOy делит пополам хорды, параллельные оси Oz.

К главе XXI

Задача 89. Написать уравнения несобственной прямой относительно проективной системы координат, базисными точками которой являются вершины треугольника ABC, а единичной точкой — точка M пересечения его медиан.

Решение. Пусть

$$A=(1:0:0), \quad B=(0:1:0), \quad C=(0:0:1), \quad M=(1:1:1).$$

Обозначим через D, E, F середины сторон $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ треугольника ABC и найдем координаты этих точек в проективной системе координат $ABCM$.

Координаты точки D найдем, рассматривая ее как точку пересечения прямых BC и AM. Уравнение прямой BC

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

или

$$x_1=0;$$

уравнение прямой AM

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

или

$$x_2-x_3=0.$$

Точка пересечения прямых BC и AM

$$D=(0.1:1).$$

Точно так же найдем, что

$$E=(1:0:1).$$

Так как D — середина отрезка $\overline{BC}$, то четвертой гармонической к точкам B, C, D будет несобственная точка D' прямой BC. С другой стороны, так как $(BCDD')=-1$, то

$$D'=(0:1:-1).$$

Подобным же образом найдем, что несобственной точкой прямой AC является точка

$$E'=(1:0:-1).$$

Напишем теперь уравнение несобственной прямой $D'E'$ по двум ее точкам D' и E':

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$$

или

$$x_1+x_2+x_3=0.$$

Задача 90. Найти проективное преобразование, которое точки

$$(1:0:0),\quad (0:1:0),\quad (0:0:1),\quad (1:1:1)$$

переводит соответственно в точки

$$(0:1:0),\quad (0:0:1),\quad (1:0:0),\quad (1:1:1).$$

Решение. Пусть

$$\begin{aligned} \lambda x_1' &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3, \\ \lambda x_2' &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3, \\ \lambda x_3' &= a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{aligned}$$

— искомое преобразование. Так как (1:0:0) переходит в (0:1:0), то

$$a_{11}=0,\ a_{21}\neq 0,\ a_{31}=0.$$

Из того, что (0:1:0) переходит в (0:0:1), следует, что

$$a_{12}=0,\ a_{22}=0,\ a_{32}\neq 0.$$

Наконец, так как (0:0:1) переходит в (1:0:0), то

$$a_{13}\neq 0,\ a_{23}=0,\ a_{33}=0.$$

Таким образом, формулы проективного преобразования принимают вид

$$\lambda x_1'=a_{13}x_3,\ \lambda x_2'=a_{21}x_1,\ \lambda x_3'=a_{32}x_2$$

Наконец, принимая во внимание, что точка (1:1:1) остается на месте, находим, что

$$a_{13}=a_{21}=a_{32}=1,$$

и формулы преобразования окончательно принимают вид

$$\lambda x_1' = x_3,\ \lambda x_2' = x_1,\ \lambda x_3' = x_2.$$

Задача 91. Относительно системы однородных координат проективное преобразование задано соотношениями:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - 2x_2 + 3x_3, \\ x_2' &= 2x_1 + x_2 + 2x_3, \\ x_3' &= 4x_1 - 2x_2 + 5x_3. \end{aligned}$$

Найти несобственную точку плоскости, прообразом которой является также несобственная точка.

Решение. Пусть $(x_1' : x_2' : 0)$ — искомая несобственная точка, $(x_1 : x_2 : 0)$ — ее прообраз при данном проективном преобразовании. Так как при $x_3 = 0$ должно быть $x_3' = 0$, то из последнего из равенств, определяющих данное проективное преобразование, находим

$$4x_1 - 2x_2 = 0,$$

откуда

$$x_1 : x_2 = 1 : 2.$$

Следовательно, прообразом искомой точки будет точка

$$(1:2:0),$$

и, значит, искомая точка будет

$$(-3:4:0).$$

Задача 92. Найти общий вид проективных преобразований, оставляющих на месте каждую точку несобственной прямой. Какие аффинные преобразования соответствуют проективным преобразованиям этого рода?

Решение. Введем на плоскости систему однородных координат, и пусть в этой системе уравнением несобственной прямой будет

$$x_3 = 0.$$

Запишем искомое преобразование в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \lambda (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3), \\ x_2' &= \lambda (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3), \\ x_3' &= \lambda (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Так как образом каждой несобственной точки снова является несобственная точка, то при $x_3 = 0$ также и $x_3' = 0$ при любых x_1 и x_2. Поэтому, подставляя в третье из равенств (1)

$$x_3 = 0$$

и

$$x_3' = 0,$$

получим равенство

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = 0,$$

выполняющееся при всех значениях x_1 и x_2. Но это возможно лишь тогда,

когда

$$a_{31}=a_{32}=0.$$

При этом

$$a_{33}\neq 0,$$

так как иначе линейное преобразование (1) было бы вырожденным.

Так как при рассматриваемом проективном преобразовании каждая несобственная точка остается на месте, то отсюда следует, что при $x_3=0$

$$x_1'=\alpha x_1,$$
$$x_2'=\alpha x_2,$$

т. е.

$$\alpha x_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2,$$
$$\alpha x_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2$$

при любых x_1 и x_2. Но это возможно, лишь если

$$\alpha=a_{11}=a_{22},$$
$$a_{12}=a_{21}=0.$$

Таким образом, формулы искомого преобразования имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x_1'&=\lambda(\alpha x_1+a_{13}x_3),\\ x_2'&=\lambda(\alpha x_2+a_{23}x_3),\\ x_3'&=\lambda a_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Деля первое и второе из этих равенств (2) на третье и полагая

$$\frac{x_1}{x_3}=x,\quad \frac{x_2}{x_3}=y,\quad \frac{x_1'}{x_3'}=x',\quad \frac{x_2'}{x_3'}=y',$$

$$\frac{\alpha}{a_{33}}=k,\quad \frac{a_{13}}{a_{33}}=a,\quad \frac{a_{23}}{a_{33}}=b,$$

получим следующие формулы для аффинного преобразования собственной плоскости, соответствующего данному проективному преобразованию:

$$\left.\begin{aligned} x'&=kx+a,\\ y'&=ky+b. \end{aligned}\right\}$$

При $k=1$ это перенос; при $k\neq 1$ — это гомотетия с центром в точке $O'=\left(\frac{a}{1-k},\ \frac{b}{1-k}\right)$ и с коэффициентом гомотетии k, быть может, отрицательным.

Задача 93. Найти неподвижные точки проективного преобразования

$$x_1'=x_3,$$
$$x_2'=2x_1,$$
$$x_3'=4x_2$$

проективной плоскости.

Решение. Если $(x_1:x_2:x_3)$ — неподвижная точка проективного преобразования, то координаты ее образа будут λx_1, λx_2, λx_3, и потому имеем:

$$\begin{aligned}\lambda x_1 &= x_3,\\ \lambda x_2 &= 2x_1,\\ \lambda x_3 &= 4x_2,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}-\lambda x_1 \qquad\quad + x_3 &= 0,\\ 2x_1 - \lambda x_2 \qquad &= 0,\\ 4x_2 - \lambda x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Так как числа x_1, x_2, x_3 не равны нулю одновременно, то

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$-\lambda^3 + 8 = 0,$$

откуда для λ получаем единственное действительное значение

$$\lambda = 2,$$

а для определения координат неподвижной точки получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}-2x_1 \qquad\quad + x_3 &= 0,\\ 2x_1 - 2x_2 \qquad &= 0,\\ 4x_2 - 2x_3 &= 0,\end{aligned}$$

и, следовательно, неподвижная точка будет (1:1:2).

К главе XXII

Задача 94. Дана парабола

$$x^2 - 2y = 0$$

и гипербола

$$2xy - 1 = 0.$$

Найти точку, поляры которой относительно обеих кривых совпадают.

Решение. Пусть (x_0, y_0) — искомая точка. Поляры этой точки относительно данных кривых будут соответственно

$$\begin{aligned}x_0 x - y - y_0 &= 0,\\ y_0 x + x_0 y - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Так как поляры искомой точки относительно обеих кривых должны совпадать, то

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{-1}{x_0} = \frac{-y_0}{-1},$$

откуда

$$x_0 = -y_0 = 1.$$

Несобственной точки получиться не может, так как диаметры параболы параллельны асимптоте гиперболы.

Задача 95. Написать уравнение линии второго порядка, касающейся сторон базисного треугольника $A_1A_2A_3$ в его вершинах A_1 и A_2 и проходящей через единичную точку E.

Решение. Пусть

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0 \tag{1}$$

— искомая линия. Так как прямая A_1A_2 — поляра точки

$$A_3=(0:0:1),$$

то ее уравнение может быть записано в виде

$$a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3=0.$$

Но эта же прямая определяется уравнением

$$x_3=0.$$

Отсюда следует, что

$$a_{13}=a_{23}=0, \quad a_{33}\neq 0.$$

Поэтому уравнение кривой (1) может быть записано в виде

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0. \tag{2}$$

Так как, далее, точки

$$A_1=(1:0:0), \quad A_2=(0:1:0)$$

принадлежат кривой, то

$$a_{11}=a_{22}=0$$

и уравнение (2) принимает вид

$$2a_{12}x_1x_2+a_{33}x_3^2=0. \tag{3}$$

По предположению точка

$$E=(1:1:1)$$

принадлежит кривой, что дает

$$2a_{12}+a_{33}=0,$$

и потому уравнение (3) переписывается в виде

$$-a_{33}x_1x_2+a_{33}x_3^2=0$$

или, ввиду $a_{33}\neq 0$, уравнение кривой окончательно имеет вид

$$x_1x_2=x_3^2. \tag{4}$$

Задача 96. Около треугольника описана линия второго порядка. В вершинах треугольника к этой линии проведены касательные. Показать, что три точки пересечения сторон треугольника с касательными в противоположных вершинах лежат на одной прямой.

Решение. Примем треугольник $A_1A_2A_3$, вписанный в кривую, за базисный треугольник проективной системы координат. В этой системе уравнение

кривой будет иметь вид

$$a_{12}x_1x_2+a_{23}x_2x_3+a_{31}x_3x_1=0. \tag{1}$$

Так как $a_{12}\neq 0$, $a_{23}\neq 0$, $a_{31}\neq 0$, то разделим обе части уравнения (1) на

$$a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}$$

и напишем полученное уравнение в виде

$$\frac{x_1}{a_{23}}\frac{x_2}{a_{31}}+\frac{x_2}{a_{31}}\frac{x_3}{a_{12}}+\frac{x_3}{a_{12}}\frac{x_1}{a_{23}}=0. \tag{1'}$$

Полагая

$$\frac{x_1}{a_{23}}=y_1,\quad \frac{x_2}{a_{31}}=y_2,\quad \frac{x_3}{a_{12}}=y_3,$$

что соответствует выбору новой единичной точки, перепишем уравнение (1) так:

$$2y_1y_2+2y_2y_3+2y_3y_1=0. \tag{2}$$

Уравнение касательной к этой кривой в точке $A_1=(1:0:0)$ будет

$$y_2+y_3=0,$$

а точка ее пересечения со стороной A_2A_3, противолежащей вершине A_1 и определяющейся уравнением

$$y_1=0,$$

будет

$$B_1=(0:1:-1).$$

Точно так же найдем точку пересечения касательной в вершине A_2 с противолежащей ей стороной A_1A_3. Это будет точка

$$B_2=(1:0:-1).$$

Точка пересечения касательной в вершине A_3 со стороной A_1A_2 будет

$$B_3=(1:-1:0).$$

Чтобы показать, что три точки B_1, B_2, B_3 лежат на одной прямой, составим определитель из их координат:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Он равен нулю, значит, точки B_1, B_2, B_3 лежат на одной прямой.

К главе XXV

Задача 97. Пусть

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

— матрица ортогонального преобразования.

Доказать, что:

1) если это ортогональное преобразование — поворот вокруг прямой, то косинус угла поворота определяется из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{a_{11}+a_{22}+a_{33}-1}{2};$$

2) если данное преобразование является произведением симметрии относительно плоскости на поворот вокруг прямой, перпендикулярной к этой плоскости, то косинус угла поворота определяется из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{a_{11}+a_{22}+a_{33}+1}{2}.$$

Доказательство. 1) Примем ось вращения за ось z новой прямоугольной системы координат xyz. В этой системе формула поворота будет иметь вид

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi,\\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi,\\ z' &= z, \end{aligned}$$

а матрица преобразования будет

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь инвариантностью следа матрицы линейного преобразования при переходе от одной системы координат к другой [1]), можем написать

$$a_{11}+a_{22}+a_{33} = \cos\varphi + \cos\varphi + 1,$$

откуда

$$\cos\varphi = \frac{a_{11}+a_{22}+a_{33}-1}{2}.$$

2) Примем ось вращения за ось z, а плоскость симметрии за плоскость xy новой прямоугольной системы координат xyz. В этой системе формулы преобразования будут иметь вид

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi,\\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi,\\ z' &= -z, \end{aligned}$$

а матрица преобразования будет

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

---

[1]) Следом матрицы A порядка n называется сумма S ее элементов, стоящих на главной диагонали. Характеристический многочлен матрицы A есть

$$\det(A-\lambda E) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}S\lambda^{n-1} + \ldots + \det A.$$

Следовательно, инвариантность следа S матрицы A линейного преобразования относительно изменения базиса вытекает из инвариантности коэффициентов соответствующего ей характеристического многочлена.

Применяя теорему об инвариантности следа матрицы линейного преобразования относительно перехода от одной системы координат к другой, будем иметь

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=\cos\varphi+\cos\varphi-1,$$

откуда

$$\cos\varphi=\frac{a_{11}+a_{22}+a_{33}+1}{2}.$$

Задача 98. Доказать, что если $\mathbf{u}$ — произвольный вектор ориентированного пространства, $\mathbf{u}'$ — его образ при повороте пространства вокруг оси с данным направляющим вектором $\mathbf{a}$, то тройка векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{a}$ имеет одну и ту же ориентацию независимо от выбора вектора $\mathbf{u}$.

Доказательство. Введем в пространстве прямоугольную систему координат, принимая за положительное направление оси z направление вектора $\mathbf{a}$, и обозначим через φ угол поворота. Тогда формулы поворота будут иметь вид

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi,\\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi,\\ z' &= z. \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{u}=\{x, y, z\}$ — произвольный вектор пространства, $\mathbf{u}'=\{x', y', z'\}$ — его образ при данном повороте. Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{a}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z\\ x' & y' & z'\\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = xy'-yx' =$$

$$= x(x\sin\varphi + y\cos\varphi) - y(x\cos\varphi - y\sin\varphi) = \sin\varphi\,(x^2+y^2).$$

Мы видим, что знак определителя, составленного из координат векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{a}$, не зависит от выбора вектора $\mathbf{u}$, причем это верно не только в рассмотренной системе координат, но и во всякой другой, так как этот определитель есть смешанное произведение векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{a}$, инвариантных по самому своему определению. Это означает, что ориентация тройки векторов не зависит от вектора $\mathbf{u}$, а определяется заданным преобразованием и выбором положительного направления на оси вращения.

Будем называть *вращение вокруг оси с направляющим вектором* $\mathbf{a}$ *положительным*, если тройка векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{a}$ имеет положительную ориентацию, в противном случае будем считать *вращение отрицательным*.

Задача 99. Дано ортогональное преобразование

$$\begin{aligned} x' &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z,\\ y' &= \frac{11}{15}x - \frac{10}{15}y - \frac{2}{15}z,\\ z' &= \frac{2}{15}x + \frac{5}{15}y - \frac{14}{15}z. \end{aligned}$$

Найти единичный направляющий вектор неподвижной прямой, опре-

деляющий положительное направление вращения и угол поворота (см. задачи 97 и 98).

Решение. Матрица преобразования

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{11}{15} & -\frac{10}{15} & -\frac{2}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{5}{15} & -\frac{14}{15} \end{pmatrix}$$

является ортогональной с определителем $+1$. Следовательно, данное преобразование — поворот вокруг некоторой прямой. Выберем такой единичный направляющий вектор этой прямой, чтобы рассматриваемое вращение было положительным. Для этого определим сначала какой-нибудь вектор $\mathbf{v}=\{X, Y, Z\}$, лежащий на неподвижной прямой. Так как такой вектор при ортогональном преобразовании остается неизменным, то его координаты удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} X &= \frac{2}{3}X+\frac{2}{3}Y+\frac{1}{3}Z, \\ Y &= \frac{11}{15}X-\frac{10}{15}Y-\frac{2}{15}Z, \\ Z &= \frac{2}{15}X+\frac{5}{15}Y-\frac{14}{15}Z \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}Y+\frac{1}{3}Z &= 0, \\ \frac{11}{15}X-\frac{25}{15}Y-\frac{2}{15}Z &= 0, \\ \frac{2}{15}X+\frac{5}{15}Y-\frac{29}{15}Z &= 0. \end{aligned}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{11}{15} & -\frac{25}{15} & -\frac{2}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{5}{15} & -\frac{29}{15} \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, система имеет ненулевое решение, например, $\mathbf{v}=\{7, 3, 1\}$.

Возьмем какой-нибудь вектор, не коллинеарный вектору $\mathbf{v}=\{7, 3, 1\}$, например вектор $\mathbf{u}=\{1, 0, 0\}$, и найдем его образ $\mathbf{u}'$ при данном преобразовании:

$$\mathbf{u}'=\left\{\frac{2}{3}, \frac{11}{15}, \frac{2}{15}\right\}.$$

Детерминант, составленный из координат векторов **u**, **u′**, **v**,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{11}{15} & \frac{2}{15} \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} > 0.$$

Следовательно, вектор $\mathbf{v} = \{7, 3, 1\}$ определяет такое направление оси, что данное ортогональное преобразование оказывается положительным вращением вокруг этой оси.

Чтобы получить единичный направляющий вектор оси, нормируем вектор **v**:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{59},$$

откуда искомый вектор

$$\mathbf{a} = \left\{ \frac{7}{\sqrt{59}}, \quad \frac{3}{\sqrt{59}}, \quad \frac{1}{\sqrt{59}} \right\}.$$

Косинус угла поворота найдем из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2}.$$

В рассматриваемом случае

$$\cos\varphi = \frac{\frac{2}{3} - \frac{10}{15} - \frac{14}{15} - 1}{2} = -\frac{20}{30},$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{59}}{30}.$$

Если перейти к новому ортонормированному базису

$$\mathbf{e}_1^*, \quad \mathbf{e}_2^*, \quad \mathbf{e}_3^*,$$

приняв в качестве $\mathbf{e}_3^*$ вектор **a**, то в новом базисе формулы преобразования будут иметь вид

$$x'^* = -\frac{29}{30} x^* - \frac{\sqrt{59}}{30} y^*,$$

$$y'^* = \frac{\sqrt{59}}{30} x^* + \frac{29}{30} y^*,$$

$$z'^* = z^*.$$

Задача 100. Выяснить геометрический смысл преобразования

$$x' = \frac{11}{15} x + \frac{2}{15} y + \frac{10}{15} z + 1,$$

$$y' = \frac{2}{15} x + \frac{14}{15} y - \frac{5}{15} z + 3,$$

$$z' = -\frac{2}{3} x + \frac{1}{3} y + \frac{2}{3} z + 5.$$

Решение. Матрица преобразования

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{15} & \frac{2}{15} & \frac{10}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{14}{15} & -\frac{5}{15} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ортогональная с определителем $+1$. Поэтому данное преобразование является композицией поворота вокруг прямой и переноса в направлении этой прямой.

Таким образом, мы должны найти: 1) вектор переноса в направлении оси вращения; 2) точку на оси вращения; 3) определить, будет ли вращение положительным или отрицательным, если за направление оси принять направление вектора переноса, и 4) найти угол поворота.

Найдем сначала какой-нибудь направляющий вектор оси вращения. Его координаты определяются из системы уравнений

$$X=\frac{11}{15}X+\frac{2}{15}Y+\frac{10}{15}Z,$$

$$Y=\frac{2}{15}X+\frac{14}{15}Y-\frac{5}{15}Z,$$

$$Z=-\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}Y+\frac{2}{3}Z$$

или

$$-\frac{4}{15}X+\frac{2}{15}Y+\frac{10}{15}Z=0,$$

$$\frac{2}{15}X-\frac{1}{15}Y-\frac{5}{15}Z=0,$$

$$-\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}Y-\frac{1}{3}Z=0.$$

Решением этой системы будут, например, числа 1, 2, 0. Следовательно, вектор $\mathbf{a}=\{1, 2, 0\}$ является направляющим вектором оси вращения.

1) Вектор переноса $\mathbf{v}$ в направлении оси вращения найдем как ортогональную проекцию на эту ось вектора $\mathbf{u}_0=\{1, 3, 5\}$, координатами которого служат свободные члены в правых частях формул, определяющих данное преобразование:

$$\mathbf{v}=\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{u}_0)}{\mathbf{a}^2}\mathbf{a}=\left\{\frac{7}{5}, \frac{14}{5}, 0\right\}.$$

2) Точку $A=(x, y, z)$ на оси вращения найдем, используя то обстоятельство, что ее образ $A'=(x', y', z')$ также лежит на оси вращения, причем вектор $\overrightarrow{AA'}=\mathbf{v}$. Поэтому

$$x'-x=\frac{7}{5}, \quad y'-y=\frac{14}{5}, \quad z'-z=0,$$

или

$$x'=x+\frac{7}{5}, \quad y'=y+\frac{14}{5}, \quad z'=z.$$

Вставляя эти значения x', y', z' в формулы, определяющие данное преобразование, получим систему уравнений для нахождения координат точки на оси вращения:

$$x+\frac{7}{5}=\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}y+\frac{10}{15}z+1,$$

$$y+\frac{14}{5}=\frac{2}{15}x+\frac{14}{15}y-\frac{5}{15}z+3,$$

$$z=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z+5.$$

Решением этой системы могут служить, например, числа 6, 0, 3. Таким образом, точка A с координатами 6, 0, 3 лежит на оси вращения.

3) Чтобы определить направление вращения, возьмем какой-нибудь вектор, не коллинеарный с вектором переноса, например вектор

$$\mathbf{u}=\{1,\ 0,\ 0\},$$

и найдем его образ:

$$\mathbf{u}'=\left\{\frac{11}{15},\ \frac{2}{15},\ -\frac{2}{3}\right\}.$$

Составим детерминант из координат векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{11}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{5} & \frac{14}{15} & 0 \end{vmatrix}=\frac{28}{15}.$$

Так как детерминант положителен, то и вращение вокруг оси, направляющий вектором которой является вектор переноса, будет положительным.

4) Угол поворота найдем из соотношения

$$\cos\varphi=\frac{a_{11}+a_{22}+a_{33}-1}{2}.$$

В нашем случае

$$\cos\varphi=\frac{\frac{11}{15}+\frac{14}{15}+\frac{2}{3}-1}{2}=\frac{2}{3},\qquad \sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Если за начало новой прямоугольной системы координат $O^*x^*y^*z^*$ принять какую-нибудь точку O^* неподвижной прямой, а за положительное направление новой оси O^*z^* вектор переноса вдоль новой оси, то в новой системе координат формулы преобразования будут иметь вид

$$x'^*=\frac{2}{3}x^*-\frac{\sqrt{5}}{3}y^*,$$

$$y'^*=\frac{\sqrt{5}}{3}x^*+\frac{2}{3}y^*,$$

$$z'^*=z^*+\frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Задача 101. Выяснить геометрический смысл преобразования

$$x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1,$$
$$y' = -\frac{11}{15}x + \frac{10}{15}y + \frac{2}{15}z - 2,$$
$$z' = \frac{2}{15}x + \frac{5}{15}y - \frac{14}{15}z + 3.$$

Решение. Матрица преобразования

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{11}{15} & \frac{10}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{5}{15} & -\frac{14}{15} \end{pmatrix}$$

ортогональная с определителем -1; ее след равен $\frac{6}{15} \neq 1$; следовательно, преобразование представляет собой произведение симметрии относительно плоскости на поворот вокруг оси, перпендикулярной к плоскости симметрии.

Точка пересечения плоскости симметрии и оси вращения остается при данном преобразовании неподвижной, поэтому ее можно найти из системы уравнений

$$x = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1,$$
$$y = -\frac{11}{15}x + \frac{10}{15}y + \frac{2}{15}z + 2,$$
$$z = \frac{2}{15}x + \frac{5}{15}y - \frac{14}{15}z + 3.$$

Решая ее, найдем:

$$x = \frac{10}{3}, \quad y = -\frac{2}{3}, \quad z = \frac{5}{3}.$$

Направляющий вектор $\mathbf{n}$ оси вращения найдем как собственный вектор линейного преобразования

$$x' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z,$$
$$y' = -\frac{11}{15}x + \frac{10}{15}y + \frac{2}{15}z,$$
$$z' = \frac{2}{15}x + \frac{5}{15}y - \frac{14}{15}z,$$

соответствующий собственному значению -1, из следующей системы уравнений:

$$\frac{5}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma = 0,$$
$$-\frac{11}{15}\alpha + \frac{25}{15}\beta + \frac{2}{15}\gamma = 0,$$
$$\frac{2}{15}\alpha + \frac{5}{15}\beta + \frac{1}{15}\gamma = 0.$$

Решением этой системы могут служить, например, числа 1, 1, —7.

Эти же числа могут служить и коэффициентами при неизвестных в уравнении плоскости симметрии. Так как, кроме того, нам известна точка $\left(\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$, то уравнение плоскости симметрии может быть записано в виде

$$\left(x-\frac{10}{3}\right)+\left(y+\frac{2}{3}\right)-7\left(z-\frac{5}{3}\right)=0$$

или

$$x+y-7z+9=0.$$

Угол поворота найдем из соотношения

$$\cos\varphi=\frac{a_{11}+a_{22}+a_{33}+1}{2}.$$

В нашем случае $\cos\varphi=\frac{7}{10}$.

Найдем на оси вращения такой вектор, чтобы вращение вокруг этой оси было положительным. Для этого возьмем какой-нибудь вектор $\mathbf{u}$, не коллинеарный оси вращения, например $\{1, 0, 0\}$, найдем его образ $\mathbf{u}'$ при линейном однородном преобразовании, соответствующем данному преобразованию:

$$\mathbf{u}'=\left\{\frac{2}{3}, -\frac{11}{15}, \frac{2}{15}\right\},$$

составим детерминант из координат векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{n}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{11}{15} & \frac{2}{15} \\ 1 & 1 & -7 \end{vmatrix}=5>0.$$

Значит, для того чтобы вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости симметрии было положительным, нужно за положительное направление этой оси взять вектор

$$\mathbf{n}=\{1, 1, -7\}.$$

Если за начало новой прямоугольной системы координат $O^*x^*y^*z^*$ взять точку $O^*=\left(\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ пересечения плоскости симметрии и оси вращения, а за положительное направление оси O^*z^* принять направление вектора $\mathbf{n}=\{1, 1, -7\}$, то в новой системе координат данное преобразование будет иметь вид

$$x'^*=\frac{7}{10}x^*-\frac{\sqrt{51}}{10}y^*,$$

$$y'^*=\frac{\sqrt{51}}{10}x^*+\frac{7}{10}y^*,$$

$$z'^*=-z^*.$$

Задача 102. Выяснить геометрический смысл преобразования

$$x' = \frac{6}{7}x - \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z + 7,$$

$$y' = -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z + 14,$$

$$z' = -\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z - 7.$$

Решение. Матрица преобразования

$$\begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

ортогональная с определителем -1; ее след равен 1; следовательно, преобразование является произведением симметрии относительно плоскости на перенос в направлении, параллельном плоскости симметрии.

Найдем прежде всего (какой-нибудь) вектор $\mathbf{n}$, перпендикулярный плоскости симметрии, как собственный вектор линейного оператора

$$x' = \frac{6}{7}x - \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z,$$

$$y' = -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z,$$

$$z' = -\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z,$$

соответствующий собственному значению -1, из следующей системы:

$$\frac{6}{7}x - \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}y = -x,$$

$$-\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z = -y,$$

$$-\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z = -z.$$

Решением этой системы могут служить, например, координаты вектора

$$\mathbf{n} = \{1,\ 2,\ 3\}.$$

Вектор переноса $\mathbf{v}$ найдем как ортогональную проекцию на плоскость симметрии вектора

$$\mathbf{u}_0 = \{7,\ 14,\ -7\},$$

координатами которого являются свободные члены правых частей формул данного преобразования. Вектор $\mathbf{n} = \{1, 2, 3\}$ нормален к плоскости симметрии. Представим вектор $\mathbf{u}_0$ в виде

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{n};$$

умножая это равенство скалярно на $\mathbf{n}$ и принимая во внимание, что

$$(\mathbf{v},\ \mathbf{n}) = 0,$$

получим

$$(\mathbf{u}_0,\ \mathbf{n}) = \lambda\mathbf{n}^2,$$

откуда

$$\lambda = \frac{(\mathbf{u}_0,\ \mathbf{n})}{\mathbf{n}^2}.$$

Вставляя сюда координаты векторов $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{n}$, найдем, что $\lambda = 1$ и, следовательно,

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_0 - \lambda\mathbf{n} = \{6,\ 12,\ -10\},$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{280}.$$

Если (x, y, z) — произвольная точка плоскости симметрии $(x', y'\ z')$ — ее образ при данном преобразовании, то

$$x' = x + 6,$$

$$y' = y + 12,$$

$$z' = z - 10.$$

Вставляя эти значения x', y', z' в формулы, определяющие данное преобразование, и упрощая, например, первое из получаемых равенств:

$$x + 6 = \frac{6}{7}x - \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}y + 7,$$

получим уравнение плоскости симметрии

$$x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

Если принять плоскость симметрии за плоскость x^*y^* новой прямоугольной системы координат $x^*y^*z^*$, взяв за положительное направление оси абсцисс направление вектора переноса, то в новой системе формулы преобразования примут вид

$$x'^* = x^* + \sqrt{280},$$

$$y'^* = y^*,$$

$$z'^* = -z^*.$$

Задача 103. Доказать, что при подобном преобразовании n-мерного пространства с коэффициентом подобия $k \neq 1$, всегда существует неподвижная точка, и притом только одна.

Доказательство. Докажем утверждение для случая трехмерного пространства; в общем случае доказательство такое же. Так как преобразование подобия может быть представлено как композиция преобразований гомотетии, поворота и переноса, то в прямоугольных координатах оно может быть записано в следующем виде:

$$x' = k(c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z) + x_0,$$
$$y' = k(c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z) + y_0,$$
$$z' = k(c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z) + z_0,$$

где (c_{ik})—ортогональная матрица.

Если (x, y, z)—неподвижная точка этого преобразования, то для нее

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

и, значит, координаты x, y, z такой точки удовлетворяют системе уравнений

$$x = k(c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z) + x_0,$$
$$y = k(c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z) + y_0,$$
$$z = k(c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z) + z_0,$$

или

$$(kc_{11} - 1)x + kc_{12}y + kc_{13}z + x_0 = 0,$$
$$kc_{21}x + (kc_{22} - 1)y + kc_{23}z + y_0 = 0,$$
$$kc_{31}x + kc_{32}y + (kc_{23} - 1)z + z_0 = 0.$$

Для того чтобы эта система имела решение, и притом единственное, необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} kc_{11} - 1 & kc_{12} & kc_{13} \\ kc_{21} & kc_{22} - 1 & kc_{23} \\ kc_{31} & kc_{32} & kc_{33} - 1 \end{vmatrix} \tag{1}$$

был отличен от нуля. Но если бы этот определитель обратился в нуль, то имело бы место равенство

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \frac{1}{k} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} - \frac{1}{k} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - \frac{1}{k} \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Значит, $\frac{1}{k}$ — собственное значение матрицы (c_{ik}). Но это невозможно, так как матрица (c_{ik}) ортогональная и, следовательно, ее собственные значения по абсолютной величине равны 1, а по предположению

$$k \neq 1,$$

следовательно, и

$$\frac{1}{k} \neq 1.$$

Таким образом, предположение, что определитель (1) равен нулю, привело нас к противоречию, из чего мы должны заключить о справедливости утверждения теоремы.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолют евклидовой геометрии 639
Абсцисса 56
Адъюнкта 159, 174, 180
Аксиома ассоциативности 794
Аксиомы векторного пространства 288
— n-мерного аффинного (точечно-векторного) пространства 343
— понятия группы 788
— равенства 786
— эквивалентности 786
Амплитуда 77
Анпулятор 318, 722
Асимптота алгебраической кривой 428
— кривой второго порядка 428, 439, 444, 450, 637
— поверхности второго порядка 514
Асимптоты гиперболы 134, 437
Астроида 860

Базис 54, 56, 59, 188, 293, 294, 345
— билинейной и квадратичной функции канонический 332
— координатной системы 188
— многообразия векторов 48
— ортогонального преобразования канонический 734
— ортогональный 196, 197
— ортонормальный 196, 713, 717
— репера 188
Базисы одноименные 197, 207, 214
— ортогонально эквивалентные 712
— разноименные 197, 207, 208, 214
Бивектор 225

Вектор 18, 167, 288
— асимптотического направления 426, 435—439, 443, 510, 514, 521, 633, 682
— вещественный 383
Вектор единичный 20, 48, 55, 58
— закрепленный 344, 374, 382
— замыкающий 36, 43
— лежащий в r-мерной плоскости 350
— линейного оператора собственный 724
— мнимый 374, 383, 746, 747
— нулевой 18, 44, 167, 288, 344, 375
—, ортогональный к подпространству 721
—, перпендикулярный к плоскости 249
—, — — прямой 107
— поверхности асимптотический 755
— противоположный 168, 191, 288
— прямой направляющий 87, 90, 92, 348, 378
— свободный 33, 377, 382
Векторы базисные 48
— взаимно противоположные 19
— — сопряженные 450, 451
— инвариантные 285, 286, 738
— коллинеарные 44, 51, 59, 375
— компланарные 44, 51
—, сопряженные относительно поверхности 540
Величина угла между двумя векторами в n-мерном евклидовом пространстве 720
Вершина конической поверхности 387, 395
— кривой второго порядка 119, 123, 133, 472
Вид билинейной формы канонический 332
— квадратичной формы канонический 332, 754

Вид матрицы ортогонального преобразования 734
Вращение плоскости 75, 725, 728
Высота точки 85

Геометрия аффинная 423
Гипербола 129, 133, 192, 410, 663
— равнобочная 137
— равносторонняя 137
Гиперболоид в n-мерном пространстве 760
— вращения 487, 558
— двуполостный 485, 556, 705
— — вращения 558
— — правильный 485
— однополостный 485, 556, 705
— — вращения 487
— — правильный 485
— правильный 485
Гиперплоскость 362, 679
— диаметральная 757
Гомоморфизм групп 794
Гомотетия 280, 281, 741, 886
Группа 788
— абелева 788
— аддитивная 788, 789
— вращений 789
— вычетов 791
— коммутативная 781, 788
— матриц 203
— мультипликативная 789
— перестановок (симметрическая группа) 798
— преобразований 797
— — аффинных 267
— — движений 267
— — проективно-аффинных 608
— — проективных 600, 678
— — растяжений (гомотетий) с общим центром 282
— свободных векторов 789
— циклическая 792

Движение 259, 278, 284—287, 738, 740, 741
— винтовое 739
— несобственное 260, 284, 736, 737, 841
— собственное 260, 284, 736—741
Деление отрезка в данном отношении 23, 25, 62—65, 81, 380, 801
Детерминант матрицы аффинного преобразования 277
— — второго порядка 152
— — порядка n 170, 186
— — третьего порядка 156
— минора 159, 174
Детерминант преобразования 277
— системы линейных уравнений 153, 160, 177
Деформация непрерывная 209, 276
Диагональ многоугольника 134
Диаметр кривой второго порядка 448, 450, 454, 649
Диаметры взаимно сопряженные 453
— гиперболы 456
— главные 468
— параболы 454, 455
— центральной кривой сопряженные 453
— эллипса 455
Директриса параболы 116, 117, 142
Директрисы гиперболы 137, 140, 142
— эллипса 137, 140, 142
Дискриминант квадратичной формы 326
Длина вектора 66, 67, 717
— отрезка 17
Долгота 85
Дополнение алгебраическое 159
— ортогональное 722

Единица измерения длин 17, 20, 66, 77, 84

Зависимость векторов линейная 49—52, 290, 300, 375
— строк и столбцов матрицы линейная 164
Закон инерции для квадратичных форм 336
Замыкание выпуклое 357
— линейное 298
Заряд молнии 155, 170
Знак аффинного преобразования 277
— включения 778
— действительного числа 773
— молнии 155, 170
— перестановки 773
Значение вектора алгебраическое 20
— линейного оператора собственное 724
— проекции вектора алгебраическое 56—59, 69, 71, 76

Изоморфизм аффинных (точечно-векторных) пространств 347
— векторных пространств 290, 295, 306
— групп 791
— проективных плоскостей 581
Инвариант группы преобразований 421
Инвариантность двойного отношения 624

Инварианты многочлена второй степени ортогональные 371, 405, 406, 548
— оператора 728
Инверсия 773
Индекс квадратичной формы 336
— — функции 336
Инцидентность точек, прямых, плоскостей 571, 573, 583, 584, 668, 670, 673

Касательная к кривой второго порядка 440, 441, 635, 636
— — поверхности второго порядка 510, 686
— плоскость 511, 519, 520, 687, 689, 757
Квадрант 57
Класс эквивалентности группы 793
— эквивалентных аффинных систем координат 590, 612, 673
Классификация линий второго порядка аффинная 416
— — — — проективная 666
— — — — проективно-аффинная 663
— поверхностей второго порядка 564
— — — — проективная 695
— — — — проективно-аффинная 700—705
Классы базисов 208
— вычетов 790
Коллинеарность вектора прямой 91, 92
— векторов 44, 51, 59, 375
Коллинеации 601
Комбинация линейная векторов 38, 47, 168
— — нетривиальная 49
— — плоскостей 244, 671
— — прямых 97, 98
— — точек 671
Компланарность вектора плоскости 235
— векторов 44, 51
Композиция преобразований 782
— элементов группы 788
Конус асимптотический 485, 516
— асимптотических направлений 516, 517, 755
— вращения 479, 558
— второго порядка 479, 554, 696, 760
— действительный 479, 555, 696
— круглый 479, 696
— мнимый 482, 555, 697
Координаты барицентрические 355
— вектора в арифметическом n-мерном векторном пространстве 167
— — — комплексном пространстве 382
Координаты вектора в n-мерном аффинном пространстве 345
— — — — векторном пространстве 293
— — — — евклидовом пространстве 718
— — — прямоугольной системы координат 73
— — на комплексной плоскости 374, 376, 377
— — — плоскости и в пространстве 48, 56—58
— — — прямой 20, 23
— гиперплоскости 680
— однородные в пространстве 670, 674, 676
— — на плоскости 573, 594
— — — *прямой 615*
— плоскости в проективном пространстве 670
— — связки 580
— проективные луча связки 575, 592
— — — пучка 612
— — — четырехмерной связки 669, 673, 676
— — плоскости связки 593
— — точки в пространстве 673
— — — на плоскости 593
— — — — прямой 613, 623
— прямой 580
— тангенциальные 657
— точки аффинные 22, 56, 59, 345,374, 382
— — однородные 573, 594, 615, 670, 674, 676
— — полярные 78, 80, 84—86
— — проективные 593, 613, 623, 673
— — прямоугольные 66, 67
— — цилиндрические 85, 86
Коэффициент гомотетии 280, 741
— подобия 280, 741
— пропорциональности 25, 29
— прямой угловой 88
— растяжения 280, 741
Кривая вещественная алгебраическая 381
— второго порядка невырождающаяся 631
— параболическая 459
Кривые аффинно эквивалентные 371
— второго порядка изометрические 422
— — — метрически эквивалентные 466

Лемниската Бернулли 857
Лемма Шаля 21
Линии второго порядка 366, 398

Линии второго порядка аффинно эквивалентные 417
— — — на проективной плоскости 631
— распадающиеся алгебраические 384, 414, 415, 428
— эллиптического, гиперболического и параболического типа 436
Линия 393, 395
— алгебраическая 366, 630
— — вещественная 384
— гладкая 396
— дифференцируемая 396
— центральная 447, 510
Луч пучка 612
— связки 570
— — особый 571

Масштаб 66, 77, 84
Матрица 168
— аффинного преобразования 273
— билинейной формы 324
— — функции 324
— второго порядка квадратная 152
— диагональная 742
— единичная 195
— квадратичной формы 326
— — функции 326
— линейного преобразования 307
— n-го порядка квадратная 168
— невырождающаяся 170
— нулевая 205
— обратная 190, 195
— ортогональная 199, 200, 711
— перехода 189, 200
— поверхности второго порядка большая 504
— — — — малая 504
— преобразования координат 190, 191
— прямоугольная 204
— системы линейных уравнений 357
— — — — расширенная 358
— скалярная 742
— транспонированная 152, 157, 169
— третьего порядка квадратная 154
Меридиан поверхности вращения 391
Минор, дополнительный к минору 179
— матрицы 179
— угловой 179
— элемента матрицы 159, 174
Многообразие алгебраическое 754
— многочлена нулевое 364
— плоскостей одномерное линейное 245
— прямых одномерное линейное 99
— решений алгебраического уравнения 364
Многообразия векторные 52, 167, 232, 288
Многочлен 322
— неприводимый 427
— однородный 322
— характеристический 548, 727
Многочлены пропорциональные 365
Множество 777
— выпуклое 356
— пустое 777
Множитель нормирующий 107, 251
Модуль бивектора 225
Молния 154, 169

Наклон вектора к вектору 76
— — — оси 76
Направление 426
— вращения 75
— — положительное 75
— линии второго порядка особое 452 468
— поверхности второго порядка особое 532, 540, 541, 758
— прямой 426
— самосопряженное 452
Направления асимптотические алгебраической кривой 426, 439
— взаимно сопряженные относительно поверхности 757
— для линий второго порядка сопряженные 450
— — поверхностей второго порядка в n-мерном пространстве сопряженные 757
— — — — — сопряженные 540
— изотропные 437, 438
— кривой второго порядка асимптотические 435—443, 633
— — — — главные 468
— поверхности второго порядка асимптотические 510, 514, 521, 682
— — — — главные 547
Направляющая конуса 387
— цилиндра 385, 482
Направляющие косинусы 71
Начало координат 55, 58,77, 84, 345
Неравенство Коши — Буняковского 719
— треугольника для векторов 720
— — — точек 721
Нормаль 869

Оболочка выпуклая 357
— линейная 298
Образ кривой 371
— множества 780

Образ элемента множества 780
Образующие прямолинейные гиперболического параболоида 501—503
— — однополосного гиперболоида 498—501
— — поверхности второго порядка 491, 518, 686, 688
Объем ориентированного параллелепипеда 223, 275, 828
Одночлен 322
Окружность 67, 68, 411
— мнимая 381
— нулевая 381
Октант 60
Оператор линейный 304, 724
— — самосопряженный 745
— — сопряженный 745
— симметрический 745
Операции над векторами линейные 34—38, 44
Ордината 56, 58
Ориентация 215
— бивектора 225
Орт 66, 72
Ортогонализация 715
Оси гиперболы 129, 130
— эллипса 123
Ось 20
— абсцисс 55, 56, 58
— аппликат 58
— гиперболы вторая 130
— — действительная 130
— — мнимая 130
— — первая 130
— — фокальная 130
— координат 55, 58, 77
— ординат 55, 58
— параболы 118, 468
— — фокальная 118
— перспективы 617
— полярная 77, 84
— пучка плоскостей 245
— симметрии кривой второго порядка 468, 469, 471
— эллипса вторая 119
— — первая 119
— — фокальная 119
Отношение 27, 31
— ангармоническое 620
— векторов 19, 21, 45
— отрезков 17, 23
— четырех лучей пучка двойное 626
— — точек двойное 620, 624
— — — сложное 620, 624
— эквивалентности 785
Отображение аффинное 263
Отображение *в* 780
— векторных пространств линейное 304
— взаимно однозначное 780
— групп гомоморфное 794
— изоморфное 791
— множества в себя 781
— — на себя 781
— *на* 780
— обратное 781
— перспективное плоскости на плоскость 610
— — прямой на прямую 616
— — пучка на пучок 617
— проективное плоскости на плоскость 610
— — прямой на прямую 615, 616, 619
— — — — пучок 615
— — пучка на пучок 615
Отражение относительно плоскости 737
— — прямой 781, 782
— — точки 737
Отрезок 17
— замкнутый 349
— направляющий 18
— открытый 349

Парабола 114—118, 416, 637, 663
Параболоид в n-мерном пространстве 760
— вращения 393, 493
— гиперболический 492, 496, 559, 705
— эллиптический 492
— — вращения 393, 493
Параллелепипед аффинного пространства r-мерный 351
— ориентированный 222
Параллелепипеды n-мерного пространства 351
Параллелограмм ориентированный 149
Параллельность в широком смысле слова, 44, 362
— двух плоскостей 241
— — — в n-мерном пространстве 362
— — прямых в пространстве 97
— — — на комплексной плоскости 377
— — — — плоскости 92, 93
— прямой и плоскости 236
Параметр параболического цилиндра 563
— параболы 118, 119, 416
— фокальный гиперболы 142, 143
— — параболы 118, 119
— — эллипса 142, 143
Параметры параболоидов 492, 559
Пары чисел пропорциональные 25

Переиос начала координат 61, 62
— параллельный 32
Пересечение алгебраической кривой с прямой 425, 427
— двух алгебраических линий 425
— линии второго порядка с прямой 440, 442
— множеств 779
— поверхности второго порядка с плоскостью 506, 507, 684
— — — — — прямой 685
— — — — — — в n-мерном пространстве 755
— подпространств 302
Перестановка 767, 771
— нечетная 773
— обратная 769
— четная 773
Перпендикуляр из точки на прямую 254
— общий к двум прямым 256
Перпендикулярность двух векторов 72
— — плоскостей 254
— — прямых в пространстве 113
— — — на плоскости 109, 112
— прямой и плоскости 253
Плоскости в n-мерном аффинном пространстве 350
— — проективном пространстве 679
Плоскость арифметическая проективная 580
— бесконечно удаленная 246, 675—680
— двойная 836
— диаметральная поверхности второго порядка 529, 692, 757
— комплексная 374
— — проективная 582
— мнимая 383
— несобственная 246, 675—680
— полярная 765
— полярной системы координат в пространстве основная 84
— проективная 100, 101, 572, 581
— проективно-аффинная 605
— связки особая 571
— центров 521
Площадь ориентированного параллелограмма 151, 275
— — треугольника 152
Поверхности аффинно эквивалентные 373
— второго порядка аффинно эквивалентные 564
— — — вырождающиеся 482, 513, 756
— — — изометрические 557
— распадающиеся алгебраические 384
Поверхность 393
Поверхность алгебраическая 366, 680, 754
— — вещественная 383
— вращения 391
— второго порядка 366, 504, 563, 564
— — — в n-мерном аффинном пространстве 755, 759
— — — — — проективном пространстве 766
— — — — проективном пространстве 681
— — — действительная овальная 697
— — — невырождающаяся 482, 687, 699, 760
— кольцевидная 698—700
— коническая 386—394, 755
— мнимая овальная 697
— центральная 525
— — в n-мерном пространстве 727
— цилиндрическая 385, 386, 394, 478
— шаровая 68, 69, 483
Поворот вокруг оси 737
Подмножество 778
— несобственное 778
— собственное 778
Подпространства ортогональные 723
Подпространство векторного пространства 297
— евклидова пространства 721
— инвариантное 724, 728
—, порожденное множеством 298
Подстановка 767
Полуоси гиперболоидов 485
— гиперболы 129, 131
— центральных поверхностей 557
— цилиндрической поверхности 561
— эллипса 119, 121
— эллипсоида 482
Полуось эллипса большая 119
— — малая 121
Полуплоскость положительная 101, 105
Полупространство положительное 84, 247
Полупрямая положительная 23
Полюс плоскости 765
— полярной системы координат 77
— прямой 650
Поляра 649
Порядок алгебраической линии 365, 367, 630
— — поверхности 365, 368, 680, 754
— группы 788
Правило Декарта 555
— замыкающего вектора 36
— Крамера 162, 178
— параллелограмма 35

Правило умножения детерминантов 185
Преобразование аффинных координат 61, 62, 189, 190, 191
— изометрическое 278
— координат в комплексном пространстве 383
— — — n-мерном векторном пространстве 294, 295
— — — — евклидовом пространстве 716
— — на комплексной плоскости 376, 377
— множества 781
— ортогональное 404, 730
— подобия 280, 741
— проективно-аффинное в пространстве 679
— — — на плоскости 605, 608
— проективное проективного пространства, 677, 678
— — проективной плоскости 600, 603
— — — прямой 615, 616
— проективных координат в пространстве 674, 675
— — — на проективной плоскости 595, 596
— прямоугольных координат в пространстве 200
— — — на плоскости 198
— собственное ортогональное 737, 738
— тождественное 736, 783
Преобразования аффинные 261—277, 363, 607, 679, 752
— — несобственные 262
— — n-мерного пространства 473
— — собственные 262
— коллинеарные 601
— линейные 306, 749
Принадлежность прямой плоскости 236
Принцип двойственности для проективного пространства 670
— — — проективной плоскости 583, 584, 658
Проекция вектора на плоскость 39, 40
— — — прямую 39, 40
— ортогональная 39
— точки на плоскость 39
— — — прямую 39
Произведение вектора на число 19, 38, 48, 167, 289, 375
— векторов векторное 226
— — скалярное 72, 74, 717
— — смешанное 228
— детерминантов 185
Произведение матриц 194, 202, 308
— матрицы на число 205
— преобразований 308, 782
— элементов группы 788
Прообраз полный 780
Пропорция 26, 29
Пространство арифметическое n-мерное аффинное 346
— — — векторное 167
— — проективное 669, 679
— аффинное (точечно-векторное) n-мерное 343
— бесконечномерное 292
— векторное 167, 288
— евклидово n-мерное 716
— — — точечно-векторное 718
— комплексное 382, 669
— проективно-аффинное 675
— — — n-мерное 680
— проективное n-мерное 679
— решений системы уравнений 313
Прямая бесконечно удаленная 100, 245, 246, 572
— в комплексном пространстве 383
— — n-мерном аффинном пространстве 349
— вещественная 381, 582
— мнимая 381, 582
— на комплексной плоскости 377—380
— несобственная 100, 245, 246, 572, 579, 675
— паскалева 642
— центров 448, 527
— числовая 22
Прямоугольник гиперболы основной 134
Прямые изотропные 412
— мнимые сопряженные 384, 398
Пучок кривых второго порядка 431, 640
— плоскостей 245
— — несобственный 245
— — — собственный 245
— прямых 99
— — несобственный 99
— — собственный 99

Равенство векторов 20, 32, 374, 800
Радиус-вектор 801
Радиус полярный 78, 85
Радиусы фокальные гиперболы 130
— — эллипса 120
Разбиение множества на классы 784, 785
Разложение вектора 47—49

Разложение детерминанта по элементам строки 160, 174
Размерность векторного многообразия 52
— — пространства 292, 301
Разность векторов 36, 290
Ранг билинейной формы (функции) 330
— квадратичной формы (функции) 330
— матрицы 310, 330, 331
— поверхности второго порядка большой 504, 756
— — — — малый 504, 756
— системы уравнений 314, 358, 359
Расположение двух поверхностей взаимное 24
— — прямых в пространстве взаимное 246
— — — на плоскости взаимное 92, 93
— трех плоскостей взаимное 840
Расстояние между двумя прямыми 258
— — — точками 67, 718, 721
— от точки до плоскости 251, 252
— — — — прямой (в пространстве) 255
— — — — — (на плоскости) 107, 108
— фокусное гиперболы 129
— — эллипса 119
Растяжение 280, 741
Репер 188
— левый 215, 216
— правый 215
— прямоугольный 196
Реперы одноименные 214, 222
Решение системы уравнений 313

Связка комплексная 669
— прямых и плоскостей 570
— — — — — в четырехмерном пространстве 669
Связь прямоугольных координат с полярными в пространстве 86
— — — — — на плоскости 80
Сдвиг 32, 61, 345, 739
— нулевой 33, 35
Середина отрезка 65, 380, 801
Сечение коническое 387, 481
— конуса 387, 481
— цилиндра 129
Сжатие 281, 741
— плоскости к прямой равномерное 126
Симметрия 737, 781, 782
Симплекс 355
— замкнутый 355
— открытый 355
Система векторов максимальная линейно независимая 301
— инвариантов кривой второго порядка полная 423, 466
— координат аффинная 55, 58
— — в проективном пространстве 674
— — — — — проективная 674
— — — пространство однородная 676
— — — — полярная 84, 85
— — — пучке проективная 612, 613
— — — связке проективная 591
— — — четырехмерной связке проективная 674
— — каноническая для гиперболоидов 485
— — — — гиперболы 130
— — — — конуса второго порядка 472
— — — — параболоидов 492
— — — — параболы 116
— — — — эллипса 120
— — — — эллипсоида 482
— — на плоскости и в пространстве 55, 58, 66
— — — — однородная 576, 594
— — — — полярная 77, 80
— — — — проективная 593
— — — проективной плоскости 593
— — — прямой 22
— — — — однородная 614
— — — — проективная 613
— — прямоугольная 66
— линейных уравнений 154, 160—167, 357—360
— — — несовместная 164, 358
— — — однородная 162, 164, 232, 234, 313, 316, 358
— — — совместная 359
— образующих векторного пространства 298
— однородных координат на арифметической проективной плоскости 594, 595
— уравнений линейно независимая 358
Системы координат естественно связанные 576, 676
— — эквивалентные 590, 612, 673
— линейных уравнений эквивалентные 314
След матрицы 889
Сложение матриц 205
Совокупность векторов ортогональная 713
— — ортонормальная 713
Совпадение двух плоскостей 241
— — прямых в пространстве 97

Совпадение двух прямых на комплексной плоскости 377
— — — — плоскости 92
Соответствие взаимно однозначное 781
— коррелятивное 656, 691
— перспективное между плоскостью и связкой 571
— — — прямой и пучком 612
— — — четырехмерной связкой и гиперплоскостью 676
— полярное в пространстве 691
— — на плоскости 653
Спираль Архимеда 79
— гиперболическая 81
— логарифмическая 82
Степени свободы 221
Степень многочлена 322
— однородной функции 394
— одночлена 322
— уравнения 364
Строфоида 860
Сумма векторов 22, 34, 36, 167, 288, 375
— множеств 778
— подпространств 302
— — алгебраическая 302
— — прямая 303
Сфера 68, 69, 483
— действительная 697
— мнимая 697

Теорема Бриантона 658
— взаимности 650, 691
— Дезарга 587—588
— единственности для кривых второго порядка 366, 431, 462, 633, 640
— — — поверхностей второго порядка 366, 543, 544, 683
— — — — — — в n-мерном проективном пространстве 766
— Кронеккера — Капелли 358
— Лапласа 183
— о замене 298
— — плоскости вторая основная 241
— — — первая основная 235
— — проективных преобразованиях плоскости основная 603
— — — пространства основная 678
— — — прямой основная 616
— — ранге матрицы 310
— — структуре линейного преобразования 749
— об аффинных преобразованиях основная 473
— — изоморфизме векторных пространств 295
— Паппа 645—646
Теорема Паскаля 641
— Пифагора (в n-мерном евклидовом пространстве) 721
— Штейкера 646, 647
— Штейница 298
Тетраэдр координатный 674
Тор 863
Точка бесконечно удаленная 28, 64, 100, 577, 677
— вещественная 383, 582
— единичная 591
— кривой внешняя 651
— внутренняя 651
— — второго порядка двойная 636
— — — — особая 636
— мнимая 374, 382, 582
— начальная 22
— неподвижная 284, 285, 899
— несобственная 28, 64, 100, 572, 576, 577, 675, 680
— поверхности второго рода двойная 687
— — — — особая 513, 527, 687, 756, 757
— треугольника внутренняя 809
— угла внутренняя 809
Точки базисные 593, 672
— гармонически сопряженные 623, 654, 692
— геометрически независимые 353
— круговые 638, 639
— фундаментальные 593, 674
— циклические 638
Треугольник автополярный 660
— координатный 593
— ориентированный 149
Трехлепестковая роза 84
Тройка координат базисных точек согласованных 636

Углы Эйлера 220
Угол между двумя векторами 69, 70, 74, 76
— — плоскостями 253, 254
— — прямой и плоскостью 252, 253
— — прямыми 108, 109, 113
— наклона 76, 77
— от вектора до вектора 76, 77
— — прямой до прямой 110—112
— полярный 78
Умножение перестановок 768
Уравнение алгебраическое 364
— гиперболы относительно ее асимптот 192, 199
— каноническое гиперболического параболоида 492

Уравнение каноническое гиперболоида двуполостного 485
— — — однополостного 485
— — гиперболы 133
— — конуса второго порядка 479
— — мнимого конуса второго порядка 482
— — — эллипса 381
— — — эллипсоида 485
— — параболы 116
— — прямой в пространстве 96
— — — на плоскости 96
— — эллипса 121
— — эллипсоида 482
— — эллиптического параболоида 492
— касательной к гиперболе 442
— — — кривой второго порядка 441, 636
— — — параболе 442
— — — эллипсу 442
— — плоскости к поверхности второго порядка 511, 687
— кривой второго порядка общее 409
— — — — относительно ее сопряженных диаметров 459, 460
— линии 68
— — алгебраической 366, 630
— окружности 68, 411
— плоскости 230—237
— — нормальное 250
— — общее 235
— поверхности второго порядка общее 504
— — — — относительно сопряженных осей координат 543
— при вершине эллипса, гиперболы и параболы 145
— прямой 89—97
— — в векторной форме 94
— — — отрезках 94
— — — пространстве общее 243
— — на плоскости общее 93
— — нормальное 106
— —, проходящей через две точки 97
— — с угловым коэффициентом 93
— сферы 68, 483
— тангенциальное 657
— характеристическое 407, 548, 727
— центра кривой второго порядка 446
— центральной кривой приведенное 410
— — поверхности второго порядка 525
— эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах 149
Уравнения параметрические линии 396
— — плоскости 231
Уравнения параметрические поверхности 396
— — прямой 95, 348
— — r-мерной плоскости 351
— — эллипса 125
— прямой приведенные 243
Условие коллинеарности вектора прямой 91
— компланарности вектора плоскости 235
— ортогональности матрицы по строкам и по столбцам 199, 711
— параллельности двух плоскостей 241
— — прямой и плоскости в широком смысле 236
— — прямых 97
— перпендикулярности двух векторов 72
— — — плоскостей 254
— — — прямых в пространстве 113
— — — — на плоскости 109—113
— — прямой и плоскости 253
— распадения билинейной формы 844
— — квадратичной формы 846

Фактор-группа 793
Фигуры эквивалентные 421
Фокус параболы 116
Фокусы гиперболы 119, 120
— эллипса 119
Форма билинейная 324
— — симметричная 324, 332
— квадратичная 322, 326, 332, 754
— линейная 322
— нормальная ортогональных матриц третьего порядка 736
— степени m 332
Функция 782
— билинейная 323
— — симметричная 325, 332, 752
— квадратичная 325, 754
— линейная 321

Хорда кривой 445
— параболы фокальная 119, 142
— поверхности 528
— эллипса фокальная 142

Центр вращения 75
— гиперболы 129
— гомотетии 280
— линии второго порядка 446
— перспективы 610, 616
— поверхности 525
— связки 570, 669

Центр симметрии линии 525
— эллипса 119, 123
Цилиндр 385, 478
— в n-мерном пространстве 761
— гиперболический 478
— круглый 561
— мнимый эллиптический 478
— параболический 478
— эллиптический 478

Четверка точек гармоническая 623, 800
Числа характеристические 548, 727
Число измерений 52, 292, 301

Широта 85

Эквивалентность линий проективная 663
Эквивалентность поверхностей проективная 694
Эксцентриситет гиперболы 130, 140, 142
— параболы 142
— эллипса 120
Элемент аддитивной группы противоположный 793
— группы нейтральный 794
— обратный в группе 787, 795
Эллипс 119—129
— горловой 487
— действительный 402
— мнимый 381
Эллипсоид 482
— в n-мерном пространстве 766
— вращения вытянутый 483
— — сжатый 483
— действительный 482
— мнимый 485, 556, 697, 760

Павел Сергеевич Александров

Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры с приложением собрания задач, снабженных решениями, составленного А. С. Пархоменко

М., 1968 г., 912 стр. с илл.

Редакторы *А. Ф. Лапко, А. С. Пархоменко*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректор *Т. С. Плетнева*

Сдано в набор 6/XI 1967 г. Подписано к печати 2/IV 1968 г. Бумага 60×90¹/₁₆, тип. № 2. Физ. печ. л. 57. Условн. печ. л. 57. Уч.-изд. л. 50,8. Тираж 60 000 экз. Т-00189. Цена книги 1 р. 55 к. Заказ № 2149.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени
А. А. Жданова
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР.
Москва, Ж-54, Валовая, 28